УДК 517.54

КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

А. К. Бахтин, Р. В. Подвысоцкий

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We give a new approach to solving certain extremal problems in the geometric theory of functions of a complex variable.

Запропоновано новий підхід до розв'язання деяких екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексной переменной (см. [1 – 12]). Важным элементом исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов, один из ключевых результатов которой — „Основная структурная теорема" Дж. А. Дженкинса — дает полное описание глобальной структуры траекторий положительного квадратичного дифференциала на конечной римановой поверхности (см. [3]). Кроме того, квадратичные дифференциалы являются удобным средством описания экстремалей. Новые возможности для данной теории появились после создания метода разделяющего преобразования (см. [7 – 10]).

В последнее время значительно возрос интерес к задачам, соответствующим квадратичным дифференциалам со свободными полюсами (см. [8 – 10]). В данной работе предложен новый подход к решению некоторых экстремальных задач подобного рода.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ обозначают множества натуральных и комплексных чисел соответственно.

Тогда $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Набор точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}/\{0\}$, удовлетворяющих условию

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \ldots < \arg a_n < 2\pi,$$

будем называть n-лучевой системой точек. Рассмотрим области

$$E_k = \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$$k = \overline{1,n}, \quad E_{n+1} := E_1, \quad \arg a_{n+1} = 2\pi, \quad \arg a_{n+2} = \arg a_2 + 2\pi,$$

$\theta_k = \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 2$. Пусть $\xi = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $\xi = -i(e^{-i\arg a_k} w)^{1/\theta_k}$, которая однолистно отображает область E_k на правую полуплоскость $\mathrm{Re}\,\xi > 0$. Внутренний радиус области B, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ обозначим через $r(B, a)$

(см. [7–9]). Для удобства связанную компоненту множества $P \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащую точку b, обозначим через $[P]_b$.

2. Результаты и доказательства. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек на единичной окружности, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$.

В общей постановке задача о максимуме $J_n(\gamma)$ предложена в [8] как открытая проблема. В случае $\gamma \in (0,1]$ эта задача решена в работе [7]. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\gamma_5 = 1{,}15$, $\gamma_6 = 1{,}3$, $\gamma_7 = 1{,}45$, $\gamma_n = 1{,}5$, $n \geq 8$, $n \in N$. *Тогда для каждого* n, $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$, *любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *единичной окружности и произвольной системы неналегающих областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$r^{\gamma_n}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma_n}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k), \tag{2}$$

где $d_k = \exp i\dfrac{2\pi}{n}(k-1), k = \overline{1,n}$. *Для каждого* $n \geq 5$ *знак равенства в неравенстве достигается тогда, когда точки* a_k *и области* B_k, $k = \overline{1,n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma_n)w^n + \gamma_n}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Доказательство. Метод доказательства основан на применении разделяющего преобразования (см. [7–9]).

Повторяя рассуждения, приведенные в [10] при доказательстве теоремы 5.2.3, с учетом введенных в п. 1 наборов областей $\{E_k\}_{k=1}^n$, функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ и чисел $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leq \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} 2^{t_k^2+6} t_k^{t_k^2+2} (2-t_k)^{-\frac{1}{2}(2-t_k)^2} (2+t_k)^{-\frac{1}{2}(2+t_k)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

при условии, что

$$0 < t_k = \sqrt{\gamma}\theta_k \leq 2, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Отметим, что при $0 < \gamma \leq 1$ условие (4) не является ограничением по определению величин $\{\theta_k\}_{k=1}^n$, тогда как при $\gamma > 1$ это условие является существенным ограничением и не позволяет применить метод из работы [7].

Как и в [10], приходим к неравенству

$$J_n(\gamma) \leq \left[2^n \beta_0 (2-\beta_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}, \tag{5}$$

где $\beta_0 = \max_{1\leq k\leq n} \theta_k$.

Правая часть неравенства (2) имеет конкретное числовое значение, полученное в [10]:

$$J_n^{(0)}(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{(\frac{4\gamma}{n^2})^{\frac{\gamma}{n}}}{(1-\frac{\gamma}{n^2})^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \tag{6}$$

где $\gamma > 0$, d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$ — соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2. \tag{7}$$

Далее, следуя [10], рассмотрим величину

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{r^{\gamma}(B_0,0)\Pi_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^{\gamma}(D_0,0)\Pi_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)}.$$

Из соотношений (5) и (6) для функционала (1) при условии, что $\frac{2}{n} < \frac{1,32}{\sqrt{\gamma}} \leq \beta_0$, как и в [10], получаем неравенство

$$\Lambda_n(\gamma) \leq \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\left(1-\frac{1,32}{2\sqrt{\gamma}}\right)^{(n-1)(1-\frac{\gamma}{n})} O(1), \tag{8}$$

в котором

$$O(1) = \left(\frac{2\cdot 1,32}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)(1-\frac{\gamma}{n})} \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} (1-\frac{\gamma}{n^2})^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Таким образом, если для пары (n,γ_n) и $\beta_0 \geq \frac{1,32}{\sqrt{\gamma_n}}$ правая часть неравенства (8) не превышает единицу, то $\Lambda_n(\gamma_n) \leq 1$. Тогда $J_n(\gamma_n) \leq J_n^{(0)}(\gamma_n)$ для всех систем неналегающих областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ и $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, у которых $\beta_0 \geq \frac{1,32}{\sqrt{\gamma_n}}$. Следовательно, для таких систем неналегающих областей теорема доказана. Осталось рассмотреть случай, когда $\frac{2}{n} \leq \beta_0 < \frac{1,32}{\sqrt{\gamma_n}}$. В силу определения имеет место неравенство

$$0 < \theta_k\sqrt{\gamma_n} \leq \beta_0\sqrt{\gamma_n} < 1,32,\ k = \overline{1,n}.$$

Тогда для пары $(n, \gamma_n), n \geq 5$, имеет место неравенство (3). С учетом выпуклости вверх функции

$$y = \ln\left[2^{x^2+6}x^{x^2+2}(2-x)^{1/2(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}\right]$$

на промежутке $(0, x_0]$, $1,32 < x_0 < 1,33$, выполняется неравенство

$$J_n(\gamma_n) \leq J_n^{(0)}(\gamma_n). \tag{9}$$

Из отношения (6) следует, что величина $J_n^{(0)}(\gamma_n)$ реализуется для системы полюсов $\{d_k\}_{k=0}^n$, $d_0 = 0$ и набора круговых областей $\{D_k\}_{k=0}^n$ квадратичного дифференциала (7) при $\gamma = \gamma_n$. Непосредственные вычисления с учетом неравенства (8) показывают, что $\Lambda_5(1,15) < 1$, $\Lambda_6(1,3) < 1$, $\Lambda_7(1,45) < 1$. Несложные оценки правой части неравенства (8) приводят к соотношениям $\Lambda_n(1,5) \leq 1$ при всех $n \geq 8$. Суммируя все изложенное выше, из (9) получаем неравенство (2) для каждой пары (n, γ_n), $n \geq 5$.

Теорема доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5.** — С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.
4. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
5. *Бахтина Г. П.* Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области // Укр. мат. журн. — 1974. — **26**, № 5. — С. 646 – 648.
6. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 21 – 27.
7. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1988. — **168.** — С. 48 – 66.
8. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49 (295)**, № 1. — С. 3 – 76.
9. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пос. — Владивосток: Дальневосточ. ун-т, 2003. — 116 с.
10. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **73**. — 308 с.
11. *Подвысоцкий Р. В.* Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 7. — С. 1004 – 1008.
12. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — **32**, № 5. — С. 1033 – 1043.

Получено 07.04.09