Физика низких температур, 1995, т. 21, № 2, с.127–161 УДК 537.6

Термодинамика низкоразмерных магнитных систем (Обзор)

Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 1 августа 1994 г.

В обзоре изложены наиболее интересные и важные, с точки зрения авторов, результаты, относящиеся к проблеме низкоразмерного магнетизма. Основное внимание уделено рассмотрению термодинамических свойств одно- и двумерных изотропных гейзенберговских магнетиков. Подробно обсуждены достоинства и недостатки различных теоретических подходов, используемых при описании указанных систем.

В огляді викладено найбільш цікаві та важливі, з точки зору авторів, результати, що стосуються проблеми низковимірного магнетизму. Головна увага приділена розгляду термодинамічних властивостей одно- і двовимірних ізотропних гейзенбергівських магнетиків. Докладно обговорено переваги та недоліки різних теоретичних підходів, що використовуються для опису зазначених систем.

Содержание

Введение 127
1. Метод континуального интеграла в модели Гейзенберга 128
1.1. Статистическая сумма системы невзаимодействующих спинов . 129
1.2. Приближение хаотических фаз 130
2. Связь модели Гейзенберга с теоретико-полевыми моделями 132
3. Топологический заряд и проблема Халдейна 135
4. Нелинейная σ-модель 136
5. Некоторые точно решаемые модели 141
6. Некоторые результаты численных расчетов 143
7. Приближенные методы, основанные непосредственно на модели Гейзенберга 146
7.1. Обобщенный метод Такахаши 146
7.2. Модель Гейзенберга в представлении спаренных бозонов Швингера 149
7.3. Приближение Кондо и Ямадзи 150
7.4. Представление Вигнера—Йордана и его двумерный аналог в применении к модели Гейзенберга 154
Заключение 156
Приложение 1 156
Приложение 2 157
Приложение 3 157
Приложение 4 159
Список литературы 159

Введение

Теория низкоразмерных магнитных систем представляет собой весьма обширный и достаточно развитый раздел физики твердого тела, начало которому было положено классическими работами Изинга и Бете. В теоретической физике конденсированного состояния низкоразмерный магнетизм является одной из фундаментальных проблем, разработка которой за шесть десятилетий ее существования привела к появлению многих важных результатов, имеющих как принципиальное, так и прикладное значение. Открытие высокотемпературной сверхпроводимости вызвало новую волну интереса к низкоразмерным магнитным системам, поскольку в нелегированном состоянии высокотемпературные сверхпроводники представляют собой квазидвумерные антиферромагнитные изоляторы [1]. В некотором смысле эта ситуация аналогична той, которая имела место после открытия квазивысокотемпературной сверхпроводимости в органических ион-радикальных солях, стимулировавшего исследование одномерных систем.

Специфика одно- и двумерных изотропных магнитных систем, как было впервые показано Лан-

© Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, 1995

дау [2] и в дальнейшем строго подтверждено Мермином и Вагнером [3], состоит в том, что в них отсутствует дальний порядок. Теорема, доказанная в [3], носит «негативный» характер и не распространяется на системы с более высокой размерностью пространства $d > 2$. В работах [4,5] приведено строгое доказательство существования дальнего порядка в классическом гейзенберговском магнетике при $d > 2$ и получена оценка снизу для критической температуры T_c. Если в соответствующем выражении сделать предельный переход $d \to 2$ или, положив $d = 3$, устремить величину обменного взаимодействия в одном из измерений к нулю, то температура перехода обратится в нуль. Таким образом, размерность пространства $d = 2$ является критической для существования магнитоупорядоченной фазы в изотропных гейзенберговских магнетиках.

Хотя поток работ и важных результатов, посвященных исследованию низкоразмерных магнитных систем, достаточно велик, тем не менее теория свойств таких систем к настоящему времени еще далека от своего завершения. Это связано прежде всего с отсутствием универсального подхода к описанию указанных свойств.

Целью настоящего обзора является изложение наиболее перспективных, с нашей точки зрения, подходов к рассмотрению явлений низкоразмерного магнетизма. Ввиду значительной сложности возникающих здесь задач и невозможности сколько-нибудь подробно охватить обширные материалы, опубликованные по низкоразмерным магнетикам даже в последние годы, мы ограничимся в основном рассмотрением термодинамических свойств одно- и двумерных гейзенберговских ферро- и антиферромагнетиков, поскольку анализ круга вопросов, относящихся к этой области, позволяет, как нам кажется, наилучшим образом изложить состояние проблемы в целом.

1. Метод континуального интеграла в модели Гейзенберга

Метод континуального интеграла является одним из наиболее эффективных средств исследования различных квантовых систем. В настоящем разделе мы изложим его применительно к модели Гейзенберга [6].

Исходный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + H_{\text{int}} ,$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{f},\mathbf{f}'} J_{\mathbf{f}\mathbf{f}'}\mathbf{S}_\mathbf{f}\mathbf{S}_{\mathbf{f}'} ; \qquad H_0 = -\mathbf{h}_e\sum_{\mathbf{f}}\mathbf{S}_\mathbf{f} . \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{S}_\mathbf{f}$ — оператор спина в узле $\mathbf{f}$; $J_{\mathbf{f}\mathbf{f}'}$ — обменный интеграл; $\mathbf{h}_e$ — внешнее магнитное поле. Представим $J_{\mathbf{f}\mathbf{f}'}$ в виде

$$J_{\mathbf{f}\mathbf{f}'} = \sum_{\mathbf{g}} K_{\mathbf{f}\mathbf{g}}K_{\mathbf{g}\mathbf{f}'} \tag{1.2}$$

и введем обозначение

$$\mathbf{x}_\mathbf{f} = \sum_{\mathbf{g}} K_{\mathbf{f}\mathbf{g}}\mathbf{S}_\mathbf{g} . \tag{1.3}$$

Тогда обменную часть гамильтониана (1.1) можно записать в виде

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{f}} \mathbf{x}_\mathbf{f}^2 . \tag{1.4}$$

Статистическая сумма системы равна

$$Z = \mathrm{Sp}\, T_\tau \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, H(\tau)\right) , \tag{1.5}$$

где T_τ обозначает упорядочение операторов по мнимому времени τ. Используя преобразование Хаббарда—Стратоновича, для (1.5) получаем

$$Z = \frac{1}{C}\int D[\mathbf{t}_\mathbf{f}] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{f}} t_\mathbf{f}^2\right) \times$$

$$\times\, \mathrm{Sp}\, T_\tau \exp\left(\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{f}} \mathbf{y}_\mathbf{f}\mathbf{S}_\mathbf{f} + \beta\mathbf{h}_e\sum_{\mathbf{f}}\mathbf{S}_\mathbf{f}\right) ; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{y}_\mathbf{f} = \sum_{\mathbf{g}} K_{\mathbf{f}\mathbf{g}}t_\mathbf{g} , \tag{1.7}$$

где $C = (2\pi)^{N/2}$ — нормировочная постоянная, N — число узлов в решетке. Отметим, что используемая нами форма представлений для Z отличается от обычно приводимой в литературе (см., например, [6]) тем, что не предполагает отрицательной определенности матрицы обменного взаимодействия $J_{\mathbf{f}\mathbf{f}'}$. Из (1.6) видно, что проблема построения статистической суммы Z распадается на две части: 1) вычисление статистической суммы для системы невзаимодействующих спинов, находящихся в эффективном внешнем классическом (вообще говоря, зависящем от мнимого времени τ) поле; 2) усреднение получаемой свободной энергии по гауссовским флуктуациям этого поля. Рассмотрим последовательно методы решения двух упомянутых задач.

1.1. Статистическая сумма системы невзаимодействующих спинов

Прежде всего рассмотрим первую часть задачи. Поскольку мы имеем дело с системой невзаимодействующих спинов, достаточно изучить поведение уединенного спина, находящегося во внешнем флуктуирующем магнитном поле $\mathbf{h}(\tau)$. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = -\mathbf{h}(\tau)\mathbf{S} \ . \qquad (1.8)$$

Статистическая сумма вычисляется тривиально в двух случаях, а именно, когда внешнее поле в (1.8) не зависит от τ, либо, когда временной зависимостью можно пренебречь (статический предел [6]). Тогда, выбрав направление оси 0Z вдоль поля $\mathbf{h}$, для статистической суммы Q_0 одного спина получаем

$$Q_0 = \exp\left(-\beta\Phi_0(h_0)\right) \ ,$$

а соответствующая свободная энергия Φ_0 равна

$$\Phi_0(h_0) = -T \ln\left[\mathrm{sh}\left((S+1/2)\,\beta h_0\right) / \mathrm{sh}\,(\beta h_0/2)\right] \ , \qquad (1.9)$$

где $h_0 = |\mathbf{h}|$. Отметим, что статическое приближение справедливо при достаточно высоких температурах порядка величины обменного взаимодействия, но эта область температур наименее интересна с точки зрения ожидаемых физических эффектов [6].

Вычисления также могут быть доведены до конца и в более общем случае, когда поле $\mathbf{h}$ имеет вид

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} + \mathbf{h}_1(\tau) \ ; \qquad |\mathbf{h}_1| << |\mathbf{H}| . \qquad (1.10)$$

Воспользуемся стандартной квантово-статистической теорией возмущений [7] для статистической суммы одного спина Q:

$$Q = \mathrm{Sp}\left[\exp(\beta h_0 S_z) T_\tau \exp\left(\int_0^\beta d\tau\, \mathbf{h}_1(\tau)\mathbf{S}(\tau)\right)\right] \ ,$$

где $h_0 \equiv H_z$. Пусть $h_1^{\pm} = h_{1x} \pm i h_{1y}$, тогда

$$Q = \mathrm{Sp}\left(\exp(\beta h_0 S_z)\right) \times$$

$$\times\left(1 + \int_0^\beta d\tau\, \mathbf{h}_1(\tau)\langle\mathbf{S}(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\langle S_z^2\rangle\left(\int_0^\beta d\tau\, \mathbf{h}_1(\tau)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2\, h_1^-(\tau_1) h_1^+(\tau_2)\,\langle T_\tau S^+(\tau_1) S^-(\tau_2)\rangle\right) .$$

Здесь введены обозначения:

$$S^{\pm} = S_x \pm i S_y \ ; \quad \langle A\rangle = \frac{1}{Q_0}\mathrm{Sp}\left(A\exp(\beta h_0 S_z)\right) \ .$$

Используем разложение по мацубаровским частотам и учтем соотношения

$$\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = 0 \ ,$$

$$\langle S_z\rangle = B_s(\beta h_0) \ ;$$

$$\langle S^+ S^-\rangle_{\omega_n} = 2B_s(\beta h_0)/(-i\omega_n + h_0) \ .$$

Здесь $B_s(x)$ — функция Бриллюэна, равная

$$B_s(\beta h_0) =$$

$$= (S+1/2)\,\mathrm{cth}\left((S+1/2)\beta h_0\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}\,(\beta h_0/2) \ .$$

Тогда для статистической суммы получаем следующее выражение:

$$Q = Q_0\left(1 + h_{\parallel}(0)B_s(\beta h_0) + \frac{T}{2}B_s(\beta h_0) \times\right.$$

$$\left.\times\sum_n h_1^-(\omega_n)h_1^+(\omega_n)/(-i\omega_n + h_0) + \frac{1}{2}h_{\parallel}^2(0)\langle S_z^2\rangle\right) , \qquad (1.11)$$

где $h_{\parallel}(0) = h_{1z}(\omega_n = 0)$. Соответственно для свободной энергии Φ имеем

$$\Phi = -T\ln Q = \Phi_0(h_0) + \Phi_1 \ ;$$

$$\Phi_1 = -T\left(h_{\parallel}(0)B_s(\beta h_0) + \frac{1}{2}h_{\parallel}^2(0)B_s'(\beta h_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{T}{2}B_s(\beta h_0)\sum_n h_1^-(\omega_n)h_1^+(\omega_n)/(-i\omega_{ii} + h_0)\right) , \qquad (1.12)$$

где $B_s'(x)$ — производная от функции Бриллюэна, а Φ_0 определяется выражением (1.9). В принципе первые два слагаемых в (1.12) могут быть включены в Φ_0, что приведет к перенормировке h_0.

И, наконец, задача также доводится до конца в другом важном и, как мы увидим, полезном для нас случае, когда поле $\mathbf{h}$ можно предствить в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1(\tau) + \mathbf{h}_e \ ; \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{h}_1 = r\vec{\Omega} \ ; \quad \vec{\Omega} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \ ,$$

где r, θ, φ — слабо меняющиеся функции τ, удовлетворяющие условию

$$r >> \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \ , \ \frac{\partial\theta}{\partial\tau} \ , \ |\mathbf{h}_e| \ . \qquad (1.14)$$

В отличие от предыдущих двух случаев, здесь мы явно выделили внешнее поле $\mathbf{h}_e$. Как будет видно, такое разделение оказывается удобным при дальнейшем рассмотрении. Перейдем в систему координат, связанную с полем $\mathbf{h}_1$, такую, что ось z в каждый момент времени ориентирована вдоль поля (см. Приложение 1). Учитывая, что такой переход осуществляется с помощью унитарных преобразований, сохраняющих шпур, для статистической суммы Q получаем

$$Q = \mathrm{Sp}\exp\left(S_z\int_0^\beta d\tau\, h_{\mathrm{eff}}(\tau)\right), \qquad (1.15)$$

где

$$h_{\mathrm{eff}} = r + h_{\mathrm{eff}}^{(1)};$$

$$h_{\mathrm{eff}}^{(1)} = \mathbf{h}_e\vec{\Omega} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\cos\theta + \frac{1}{2r}\left(i\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau} - \mathbf{h}_e\times\vec{\Omega}\right)^2. \qquad (1.16)$$

Соответствующая свободная энергия Φ имеет вид

$$\Phi = \Phi_0(r) + \Phi_1,$$

$$\Phi_1 = -TB_s(\beta r)\int_0^\beta d\tau\, h_{\mathrm{eff}}^{(1)}(\tau), \qquad (1.17)$$

а Φ_0 определяется соотношением (1.9). Случаи (1.10) и (1.13) соответствуют, вообще говоря, существенно различным приближениям. Однако имеется область значений параметров, в которой эти приближения становятся эквивалентными. Речь идет о ситуации, когда $\mathbf{h}_1(\tau)$ является, с одной стороны, медленно меняющейся функцией мнимого времени τ, а с другой — малой по сравнению с постоянной составляющей поля. Следует отметить, однако, что реально область значений параметров задачи, в которой имеет место указанное совпадение, оказывается достаточно узкой.

Выше мы рассмотрели известные случаи, когда может быть вычислена статистическая сумма одиночного спина в эффективном внешнем магнитном поле, и в результате задача свелась к вычислению функционального интеграла вида

$$Z = \frac{1}{C}\int D[\mathrm{t_f}]\exp\left(\beta W\{t\}\right), \qquad (1.18)$$

$$W\{t\} = -\frac{1}{2\beta}\int_0^\beta d\tau\sum_{\mathrm{f}} t_{\mathrm{f}}^2 - \sum_{\mathrm{f}}\Phi\{y_{\mathrm{f}}\}.$$

В дальнейших расчетах при вычислении интеграла (1.18) к каждой из описанных выше ситуаций следует подходить по-разному.

1.2. Приближение хаотических фаз

Наиболее просто статистическая сумма (1.18) может быть найдена в случае, когда поле $\mathbf{h}$ определяется соотношением (1.10). Для этого используем стандартный способ вычисления функциональных интегралов — метод стационарной фазы, согласно которому основной вклад в интеграл определяется функцией $t_{0\mathrm{f}}(\tau)$, отвечающей минимуму функционала W_0:

$$W_0 = -\frac{1}{2\beta}\int_o^\beta d\tau\sum_{\mathrm{f}} t_{\mathrm{f}}^2 - \sum_{\mathrm{f}}\Phi_0\{y_{\mathrm{f}}\},$$

т.е. удовлетворяет уравнению

$$\delta W_0/\delta t_{0\mathrm{f}} = 0. \qquad (1.19)$$

Будем исходить из естественного предположения о том, что решения (1.19) следует искать в классе функций, не зависящих от τ. Тогда $t_{0\mathrm{f}}$ находится из уравнения самосогласованного поля (ССП):

$$t_{0\mathrm{f}} = \sum_{\mathrm{g}} K_{\mathrm{fg}}B_s(\beta y_{0\mathrm{g}})$$

или, что то же самое,

$$y_{0\mathrm{f}} = \sum_{\mathrm{g}} J_{\mathrm{fg}}B_s(\beta y_{0\mathrm{g}}). \qquad (1.20)$$

Начиная с этого момента будем рассматривать ферро- (ФМ) и антиферромагнетик (АФМ) отдельно.

В случае ФМ решения уравнения (1.20) следует искать в классе пространственно однородных функций, т.е. полагая $y_{0\mathrm{f}} \equiv y_0$ (и соответственно $t_{0\mathrm{f}} \equiv t_0$). Тогда (1.20) принимает вид

$$y_0 = J_0B_s(\beta y_0), \qquad (1.21)$$

где $J_0 = \sum_{\mathrm{g}} J_{\mathrm{fg}}$. После разложения t_{f} в (1.18) вблизи t_0 проблема нахождения статистической суммы сводится к вычислению интеграла следующего вида

$$Z = Z_{SCF}\int D[\mathrm{t_1(k},\omega_n)]\exp\left(\beta W\{t_1\}\right), \qquad (1.22)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; Z_{SCF} — статистическая сумма в приближении ССП, равная

$$\ln Z_{SCF} = -\frac{N}{2J_0}\beta y_0^2 +$$

$$+ N \ln \left[\mathrm{sh}\left((S+1/2)\beta y_0\right) / \mathrm{sh}\,(\beta y_0/2) \right] , \quad (1.23)$$

а величина βW определяется соотношением

$$\beta W\{t_1\} = \beta \Phi_1\{t_1\} - \frac{T}{2} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{k},\omega_n} \left[t_1^+(\mathbf{k},\omega_n) t_1^-(\mathbf{k},\omega_n) + t_{1z}(\mathbf{k},\omega_n) t_{1z}(-\mathbf{k},-\omega_n) \right] , \quad (1.24)$$

в котором $t_1^{\pm} = t_{1x} \pm i t_{1y}$; Φ_1 задается формулой (1.12). Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл (1.22) является гауссовским и, следовательно, интегрируется элементарно. В результате для статистической суммы ФМ приходим к следующему выражению:

$$\ln Z = \ln Z_{SCF} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)\right) -$$

$$- \sum_{\mathbf{k},\omega_n} \ln \left\{ \left(i\omega_n - y_0 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)\right) (i\omega_n - y_0)^{-1} \right\} . \quad (1.25)$$

Здесь $J(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{f}} J_{\mathbf{f}} \exp(i\,\mathbf{kf})$. После суммирования по мацубаровским частотам часть вклада от последнего слагаемого в (1.25) погашает знаменатель второго слагаемого в (1.23) и окончательно получаем

$$\ln Z = -\frac{N}{2J_0}\beta y_0^2 +$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}} \ln \left[\mathrm{sh}\left((S+1/2)\beta y_0\right) / \mathrm{sh}\,(\beta\varepsilon(\mathbf{k})/2) \right] -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)\right) , \quad (1.26)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = y_0 - J(\mathbf{k}) B_s(\beta y_0) . \quad (1.27)$$

Варьируя $\ln Z$ по y_0 , приходим к следующему уравнению для параметра порядка $\langle S \rangle = y_0/J_0$:

$$\langle S \rangle = B_s(\beta y_0) + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\beta J(\mathbf{k}) B_s''(\beta y_0)}{1 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)} + n(y_0) - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} n(\varepsilon(\mathbf{k})) + \beta B_s'(\beta y_0)\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}) n(\varepsilon(\mathbf{k})) . \quad (1.28)$$

$n(y_0)$ — бозевская функция распределения. Выражение для средней энергии на узел с учетом (1.28) имеет вид

$$E/N = -\frac{1}{2J_0} y_0^2 - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}} \frac{J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)}{1 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)} - \frac{1}{2N} B_s(\beta y_0) \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k})\, \mathrm{cth}\,(\beta\varepsilon(\mathbf{k})/2) . \quad (1.29)$$

Рассмотрим теперь двухподрешеточный гейзенберговский АФМ. Решения уравнения (1.20) будем искать в виде $y_{0\mathbf{f}} = \epsilon_{\mathbf{f}} y_0$, где $\epsilon_{\mathbf{f}}$ определяется соотношениями

$$\epsilon_{\mathbf{f}}^2 = 1 , \quad \epsilon_{\mathbf{f}}\epsilon_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} = -1 , \quad (1.30)$$

$\vec{\delta}$ — вектор, соединяющий ближайших соседей. В результате y_0 будет по-прежнему удовлетворять уравнению (1.21), а статистическая сумма в приближении ССП в указанном классе решений одинакова для ФМ и АФМ. После интегрирования по t_{1z} , которое выполняется в АФМ случае так же, как и для ФМ, приходим к следующему выражению:

$$\ln Z = \ln Z_{SCF} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 - \beta J(\mathbf{k}) B_s'(\beta y_0)\right) + \ln Z_1 . \quad (1.31)$$

Здесь

$$Z_1 = \int D[\mathrm{t}_{1\mathbf{f}}(\omega_n)] \exp\left\{ -\frac{T}{2}\sum_{\mathbf{f},\omega_n} \left(t_{1\mathbf{f}}^+(\omega_n) t_{1\mathbf{f}}^-(\omega_n) + B_s(\beta y_0) y_{1\mathbf{f}}^+(\omega_n) y_{1\mathbf{f}}^-(\omega_n) \frac{\epsilon_{\mathbf{f}}}{i\omega_n + \epsilon_{\mathbf{f}}} \right) \right\}$$

или после перехода в импульсное представление имеем

$$Z_1 = \int D[t_1^{\pm}(\mathbf{k},\omega_n)]\exp\left\{-\frac{T}{2}\sum_{\mathbf{f},\omega_n}\left[\left(1 - y_0 J(\mathbf{k})B_s(\beta y_0)\right)t_1^{+}(\mathbf{k},\omega_n)t_1^{-}(\mathbf{k},\omega_n) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_s(\beta y_0)\frac{i\omega_n}{\omega_n^2 + y_0^2}\left(J(\mathbf{k})J(\mathbf{k}+\vec{\pi})\right)^{1/2} t_1^{+}(\mathbf{k},\omega_n)t_1^{-}(\mathbf{k}+\vec{\pi},\omega_n)\right]\right\}. \qquad (1.32)$$

Диагонализуя квадратичную форму в показателе экспоненты (1.32) и выполняя функциональное интегрирование для статистической суммы двухподрешеточного АФМ, приходим к выражению (1.26) с той лишь разницей, что закон дисперсии в этом случае определяется соотношением

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \left(y_0^2 - J^2(\mathbf{k})B_s^2(\beta y_0)\right)^{1/2}. \qquad (1.33)$$

Анализ, проведенный в настоящем разделе, существенным образом основан на сведении соответствующей статистической суммы к функциональному интегралу гауссовского вида (1.22), (1.24), который легко вычисляется и в итоге позволяет получить термодинамические функции системы. Физически такая модель отвечает предположению о малости флуктуаций, поэтому описанное выше приближение [8,9] дает разумные результаты для систем размерности $d > 2$. При этом, если в задаче имеется малый параметр $1/z$ (z — координационное число), оно оказывается справедливым во всей области температур, кроме узкой окрестности точки фазового перехода. Если же значение координационного числа произвольно, то это приближение дает разумные результаты либо в области высоких температур (для неупорядоченной фазы), либо при предельно низких температурах (в упорядоченной фазе).

В интересующем нас низкоразмерном случае достаточно длинноволновые флуктуации могут оказаться сколь угодно большими, и входящие в уравнение (1.28) интегралы по k расходятся на нижнем пределе при произвольных z. В разд. 7 будет показано, как избежать указанной трудности и модифицировать результаты на низкоразмерный случай. Кроме того, указанное обстоятельство заставляет обратиться к альтернативным подходам. Некоторые из них мы обсудим ниже. В частности, в следующей главе мы рассмотрим широко известную так называемую нелинейную σ-модель.

2. Связь модели Гейзенберга с теоретико-полевыми моделями

В настоящем разделе будет показано, как в низкотемпературном пределе можно свести статистической сумму для модели Гейзенберга к статсумме для нелинейной σ-модели. Такое представление удобно по следующей причине. Хотя непосредственное вычисление статистической суммы в рамках σ-модели опять-таки оказывается довольно сложной задачей, тем не менее для ее исследования может быть использован широкий спектр приближенных методов, разработанных в приложениях этой модели к проблемам квантовой теории поля. На эквивалентность низкоэнергетической динамики нелинейной σ-модели и динамики слабовозбужденных состояний антиферромагнитной модели Гейзенберга впервые обратил внимание Халдейн [10], однако доказательство этого факта ему удалось провести только в предположении о том, что величина спина $S >> 1$. Описанный ниже метод сведения низкоразмерной АФМ модели Гейзенберга к нелинейной σ-модели справедлив для произвольных значений S; при его изложении в основном мы будем следовать работе [11].

Прежде всего рассмотрим ферромагнетик с взаимодействием только ближайших соседей ($J > 0$). Используя соотношение (1.7), можно написать

$$\sum_{\mathbf{f}} t_{\mathbf{f}}^2 - \frac{1}{Jz}\sum_{\mathbf{f}} y_{\mathbf{f}}^2 = \frac{1}{2z}\sum_{\mathbf{f},\vec{\delta}}(t_{\mathbf{f}} - t_{\mathbf{f}+\vec{\delta}})^2 .$$

Кроме того, для ФМ, принимая во внимание условие (1.14), в выражении (1.16) для $h_{\text{eff}}^{(1)}$ можно пренебречь последним слагаемым. В результате показатель экспоненты в (1.18) преобразуется к следующему виду:

$$\beta W\{t\} = -\frac{1}{4z}\int_0^{\beta} d\tau \sum_{\mathbf{f},\vec{\delta}}(\mathbf{t}_{\mathbf{f}} - \mathbf{t}_{\mathbf{f}+\vec{\delta}})^2 -$$

$$- \int_0^{\beta} d\tau \sum_{\mathbf{f}} \Psi\{y_{\mathbf{f}}\} - \sum_{\mathbf{f}} B_s(\beta y_{\mathbf{f}})\int_0^{\beta} d\tau\,(\mathbf{h}_1\vec{\Omega}_{\mathbf{f}}) +$$

$$+ i\sum_{\mathbf{f}} B_s(\beta y_{\mathbf{f}})\int_0^{\beta} d\tau \frac{\partial\varphi_{\mathbf{f}}}{\partial\tau}\cos\theta_{\mathbf{f}}; \qquad (2.1)$$

$$\Psi\{y_{\mathbf{f}}\} = -\frac{1}{2Jz}y_{\mathbf{f}}^2 - \Phi_0(y_{\mathbf{f}}) . \qquad (2.2)$$

При $T \ll J$ первое слагаемое «вырезает» медленно меняющиеся от узла к узлу значения t_f . Тогда можно положить $y_f \simeq \sqrt{Jz}\, t_f$, и Ψ_f будет зависеть только от модуля t_f . При некотором $t_f = t_0$ величина Ψ_f становится максимальной и может быть выражена через решение стандартного уравнения самосогласованного поля:

$$m = B_s(\beta J z m) \ , \qquad (2.3)$$

где $m = t_0/\sqrt{Jz}$. Уравнение (2.3) имеет решения только при температурах ниже $T_0 = JzS(S+1)/3$. Как показывают прямые численные расчеты, уже при $T < 0{,}5T_0$ зависимость $m(T)$ с высокой точностью совпадает с ее низкотемпературной асимптотикой $m = S$, а выражение (2.2) приобретает вид

$$\Psi\{y_f\} = \frac{1}{2} JzS^2 \ .$$

Полагая в (2.1) $\mathrm{t_f} = t_0 \vec{\Omega}_f$ и переходя к континуальному пределу, для статистической суммы (1.18) получаем

$$Z = \int D[\vec{\Omega}] \exp\left(-A_{FM}\{\vec{\Omega}\}\right) \ .$$

Здесь

$$A_{FM} = A_{FM}^{(O)} + A_{FM}^{(1)} + A_{FM}^{(2)} \ ;$$

$$A_{FM}^{(0)} = -\frac{N}{2}\beta JzS^2 \ ; \qquad (2.4)$$

$$A_{FM}^{(1)} = -\frac{N}{2}\beta JzS^2 + \int_0^\beta d\tau \times$$

$$\times \int d\mathrm{r} \left[\frac{1}{2g}(\nabla\vec{\Omega}(\mathrm{r}))^2 + Sa^{-d}(\mathrm{h}_1\vec{\Omega}(\mathrm{r}))\right] \ ; \qquad (2.5)$$

$$A_{FM}^{(2)} = -iSa^{-d}\int_0^\beta d\tau \int d\mathrm{r}\, \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\cos\theta - 1) =$$

$$= -iSa^{-d}\int_0^\beta d\tau \int d\mathrm{r}\, \frac{\Omega_y \partial\Omega_x/\partial\tau - \Omega_x\partial\Omega_y/\partial\tau}{\Omega_z + 1} \ , \qquad (2.6)$$

где a — параметр решетки,

$$g = 1/(JS^2a^{2-d}) \ . \qquad (2.7)$$

При записи $A_{FM}^{(2)}$ мы учли, что на поля наложены циклические условия

$$\varphi(0) = \varphi(\beta) \ ; \quad \theta(0) = \theta(\beta) \ , \qquad (2.8)$$

а также воспользовались явным выражением (1.13) для вектора $\vec{\Omega}$. На первый взгляд $A_{FM}^{(2)}$, в отличие от $A_{FM}^{(1)}$, не является $O(3)$ инвариантным, однако, как показано в [12], оно может быть приведено к явно $O(3)$ инвариантному виду.

В результате перехода к континуальному пределу мы получаем систему с бесконечным числом степеней свободы. Поскольку в действительности число степеней свободы конечно, на скорость изменения вектора $\vec{\Omega}$ следует наложить ограничения. Так например, при разложении $\vec{\Omega}(\mathrm{r})$ в интеграл Фурье максимальная величина модуля волнового вектора Λ_0 должна определяться равенством

$$\left(\Lambda_0 a/2\pi\right)^d V_d = 1 \ , \qquad (2.9)$$

где $V_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$ — объем d-мерной сферы единичного радиуса.

Соотношения (2.4),(2.5) представляют собой стандартное полуфеноменологическое действие для ферромагнетика, вид которого вытекает из представления о магнетике как о сплошной среде [13,14]. Естественно возникает вопрос, действительно ли была необходимость в столь сложном выводе довольно простого результата. В связи с этим заметим, что проделанные выше выкладки позволяют проследить на каждом этапе всю цепь аппроксимаций, приводящих к окончательному результату. Кроме того, предложенный вывод (2.4), (2.5) открывает путь к количественному нахождению поправок, которые принципиально невозможно получить в рамках полуфеноменологической теории. Как мы увидим ниже, в определенной области температур эти поправки оказываются существенными для построения термодинамики магнитных систем.

Отметим также, что представленный выше способ описания ферромагнетика, приводящий к соотношениям (2.4),(2.5), в которых $|\vec{\Omega}| = 1$, пригоден также и для рассмотрения моделей более общего вида. Действительно, полагая в (2.1), (2.2) $\mathrm{t_f} = \sqrt{Jz}\ \mathrm{M_f}$ и пользуясь для Ψ_f низкотемпературной асимптотикой, получаем

$$A_{FM}^{(0)} = Jza^{-d}\int_0^\beta d\tau \int d\mathrm{r}\left(\mathrm{M}^2 - \mathrm{SM}\right) \ , \qquad (2.10)$$

$$A_{FM}^{(1)} =$$

$$= \int_0^\beta d\tau \int d\mathrm{r}\left[\frac{1}{2gS^2}(\nabla\mathrm{M}(\mathrm{r},\tau))^2 + a^{-d}(\mathrm{h}_1\mathrm{M}(\mathrm{r},\tau))\right] , \qquad (2.11)$$

а $A^{(2)}_{FM}$ по-прежнему определяется соотношением (2.6). Отметим, что на величину $\mathbf{M} = S\vec{\Omega}$ формально не накладываются никакие ограничения, хотя основной вклад в статистическую сумму вносят значения $|\mathbf{M}| \sim S$. Пользуясь этим обстоятельством, представим выражение (2.10) в виде

$$A^{(0)}_{FM} = \frac{Jza^{-d}}{8S^2}\int_0^\beta d\tau \int dr \left(M^2 - S^2\right)^2 - \frac{N}{2} J\beta S^2 z . \tag{2.12}$$

Перейдем теперь к рассмотрению антиферромагнитной ($J < 0$) модели с взаимодействием ближайших соседей. В этом случае удобно воспользоваться выражением

$$\sum_f t_f^2 + \frac{1}{|J|z}\sum_f y_f^2 = \frac{1}{2z}\sum_{f,\vec{\delta}} (t_f + t_{f+\vec{\delta}})^2 . \tag{2.13}$$

С помощью замены

$$t_f \to \epsilon_f t_f ; \qquad y_f \to \epsilon_f y_f \tag{2.14}$$

(ϵ_f удовлетворяет соотношениям (1.30)) перейдем к новым переменным t_f и y_f, которые можно считать медленно меняющимися от узла к узлу. Легко убедиться, что новые переменные по-прежнему связаны соотношением (1.7). Используя (2.13) и (2.14), показатель экспоненты в выражении для статистической суммы (1.18) можно представить в виде

$$\beta W\{t\} = -\frac{1}{4z}\int_0^\beta d\tau \sum_{f,\vec{\delta}} (t_f - t_{f+\vec{\delta}})^2 - \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \sum_f \Psi_f\{y_f\} - \sum_f \epsilon_f B_s(\beta y_f)\int_0^\beta d\tau\, (h_1 \vec{\Omega}_f) +$$

$$+ i\sum_f \epsilon_f B_s(\beta y_f)\int_0^\beta d\tau \frac{\partial\varphi_f}{\partial\tau}\cos\theta_f - \frac{1}{2}\sum_f \frac{B_s(\beta y_f)}{y_f}\int_0^\beta d\tau \left(i\partial\vec{\Omega}_f/\partial\tau - h_1 \times \vec{\Omega}_f\right)^2 . \tag{2.15}$$

Здесь $\Psi_f\{y_f\}$ определяется формулой (2.2), в которой J следует заменить на $|J|$. В отличие от ФМ случая, в (2.15) мы удержали также члены более высокого порядка малости по h_1 и $\partial\vec{\Omega}/\partial\tau$. Это сделано прежде всего для того, чтобы сохранить в статистической сумме зависимость от внешнего магнитного поля, поскольку линейное по h_1 слагаемое содержит кроме медленно меняющегося параметра $\vec{\Omega}_f$ также альтернирующий множитель ϵ_f, вследствие чего после суммирования по f оно оказывается несущественным. Особого рассмотрения требует вопрос о роли слагаемого, пропорционального $\dot{\varphi}$, к обсуждению которого мы вернемся в следующем разделе. Временно опустим это слагаемое.

Аналогично тому, как это было сделано для ФМ, выполним переход к континуальному пределу. В результате для статистической суммы получаем

$$Z = \int D[\vec{\Omega}]\exp\left(-A_{AFM}\{\Omega\}\right) , \tag{2.16}$$

$$A_{AFM} = -\frac{N}{2}\beta|J|zS^2 + \frac{1}{2g}\int_0^\beta d\tau \times$$

$$\times \int dr\left\{(\nabla\vec{\Omega}(r,\tau))^2 + \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau} + i\,h_1 \times \vec{\Omega}(r,\tau)\right]^2\right\} \tag{2.17}$$

где g определяется соотношением (2.7), в котором следует сделать замену $J \to |J|$. Величину v^2 в (2.17) естественно отождествить с квадратом скорости спиновых волн, однако значение v, входящее в (2.17), оказывается в $\sqrt{2}$ раз меньше того, которое следует из элементарной теории [15]. Правильное значение v может быть восстановлено, если вместо замены (2.14) произвести в (2.15) подстановку более общего вида:

$$t_f \to \epsilon_f t_f + \vec{\xi}_f ; \qquad y_f \to \epsilon_f y_f + \vec{\eta}_f , \tag{2.18}$$

где $\vec{\xi}_f$ и $\vec{\eta}_f$ — медленно меняющиеся добавки, которые к тому же предполагаются малыми. Разложим выражение (2.15) до квадратичных членов по $\vec{\xi}_f$ и $\vec{\eta}_f$ и выполним по ним интегрирование в статистической сумме. В результате коэффициент при $(\partial\vec{\Omega}/\partial\tau)^2$ перенормируется таким образом, что для v мы получаем правильное выражение

$$v = |J|Sa(2z)^{1/2} . \tag{2.19}$$

Ввиду некоторой громоздкости преобразований, подробности расчета вынесены в Приложение 2.

После интегрирования по $\vec{\xi}_f$ и $\vec{\eta}_f$, число степеней свободы у t_f уменьшилось вдвое. Поэтому максимальное значение импульса Λ_0 в случае АФМ вместо (2.9) определяется соотношением

$$\left(\Lambda_0 a/2\pi\right)^d V_d = 1/2 . \tag{2.20}$$

Действие (2.17) совместно с условием

$$\Omega^2(\mathbf{r}, \tau) = 1 \qquad (2.21)$$

определяют так называемую нелинейную σ-модель. Точно так же, как и в ФМ случае, можно было бы не накладывать жесткое условие на величину модуля $\vec{\Omega}$. Соответствующая модель в квантовой теории поля носит название модели Хиггса.

3. Топологический заряд и проблема Халдейна

В настоящем разделе мы вернемся к линейному по $\dot{\varphi}$ слагаемому в действии (2.15) и обсудим его роль в теории низкоразмерного магнетизма. Обозначим это слагаемое A_1. В пределе низких температур $B_s(\beta y_f) \simeq S_\beta$ и в результате

$$A_1 = iS \int_0^\beta d\tau \sum_f \epsilon_f \dot{\varphi}_f \cos\theta_f \,. \qquad (3.1)$$

Прежде всего рассмотрим одномерный случай. Тогда A_1 можно представить в виде

$$A_1 = iS \int_0^\beta d\tau \sum_n \epsilon_n \psi_n \,. \qquad (3.2)$$

Здесь $\psi_n = \dot{\varphi}_n \cos\theta_n$; $\epsilon_n = (-1)^n$, n пробегает целочисленные значения. Объединяя попарно слагаемые в двух соседних узлах и переходя к континуальному пределу, имеем

$$A_1 = iS \int_0^\beta d\tau \sum_{n=2k} (\psi_n - \psi_{n+1}) \simeq \frac{iS}{2} \int dx \int_0^\beta d\tau \frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{iS}{2} \int dx \int_0^\beta d\tau \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \tau} \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) . \qquad (3.3)$$

В первом слагаемом соотношения (3.3) выполним интегрирование по частям и учтем условия (2.8). В результате для действия A_1 получаем [6,16]:

$$A_1 = \frac{iS}{2} \int dx \int_0^\beta d\tau \sin\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \equiv i\,\Theta q, \qquad (3.4)$$

где $\Theta = 2\pi S$. Введенная в (3.4) величина q носит название топологического заряда или индекса Понтрягина. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что q можно записать также в виде

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x\, \vec{\Omega} \left(\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x_\mu} \times \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial x_\nu} \right) . \qquad (3.5)$$

Здесь $\epsilon_{\mu\nu}$ — единичный антисимметричный тензор второго ранга; $x_1 = x$; $x_2 = v\tau$; по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В двумерном эвклидовом пространстве (x_1, x_2) топологический заряд является топологическим инвариантом и может принимать только целочисленные значения [6,14,16]. Конфигурации $\vec{\Omega}$, которым соответствуют ненулевые значения q, обладают топологическими особенностями. Это означает, что непрерывным изменением $\vec{\Omega}(\mathbf{r}, \tau)$ невозможно изменить величину топологического заряда или перевести конфигурации, отвечающие различным значениям q, друг в друга. В качестве иллюстрации приведем пример конфигурации, содержащей одну топологическую особенность [16]:

$$\Omega(\zeta) = \left[(\zeta - \zeta_0)/\lambda \right]^n . \qquad (3.6)$$

Здесь $\zeta = x_1 + ix_2$; $\zeta_0 = a + ib$ — координата центра топологической особенности; λ определяет размер конфигурации; n — произвольное целое число, которое, как легко проверить, совпадает с величиной топологического заряда q. Можно показать, что соотношение (3.6) есть решение уравнения, определяющего локальный минимум действия $A_{AFM} + A_1$ (где A_{AFM} определяется выражением (2.17)) в отсутствие внешнего магнитного поля. Такие решения носят название инстантонов. Легко построить также конфигурации, содержащие произвольное число топологических особенностей [6,14,16].

Целочисленность топологического заряда приводит к существенному различию одномерных АФМ систем с целым и полуцелым значениями величины спина S. Действительно, если S — целое, то $\Theta = 2\pi n$ (n — целое), и тогда A_1 не дает вклад в статистическую сумму, поскольку оно приводит к умножению подынтегрального выражения для Z на единицу. Совершенно иная ситуация возникает, если S равно полуцелому числу. В этом случае $\Theta = \pi(2n + 1)$, и фазовый множитель в подынтегральном выражении для Z будет равен $+1$ или -1 в зависимости от того, четное или нечетное значение принимает для заданной конфигурации $\vec{\Omega}$ топологический заряд q. В результате часть конфигураций $\vec{\Omega}$ вносит в статистическую сумму отрицательный вклад. Из сказанного следует, что при анализе термодинамики фактически достаточно ограничиться рассмотрением случаев $\Theta = 0$ (для целого спина) и $\Theta = \pi$ (для полуцелого спина).

Таким образом, отправляясь от вполне «респектабельного» гамильтониана, в случае полуцелого спина мы приходим к ситуации, характерной для систем с индефинитной метрикой: некоторые состояния или (в случае функционального интеграла) конфигурации имеют отрицательное значение «кратности вырождения».

На различие в поведении систем с целым и полуцелым значениями S впервые обратил внимание Халдейн [10] в связи с совершенно иной проблемой. Именно, им была высказана гипотеза о том, что одномерные гейзенберговские АФМ системы с целым спином имеют невырожденное основное состояние, отделенное конечной щелью от первого возбужденного, в то время как в АФМ с полуцелым спином энергетическая щель в спектре отсутствует. Последнее утверждение было строго доказано в работе [17]. (Простое и изящное доказательство этих авторов изложено в Приложении 3.) Как мы увидим ниже, эти на первый взгляд совершенно различные особенности (отсутствие щели в спектре и отрицательный вклад в статистическую сумму от некоторых конфигураций $\vec{\Omega}$) в поведении одномерных гейзенберговских АФМ с полуцелым спином имеют общую природу.

В системах с пространственной размерностью $d \geq 2$ топологический член отсутствует [18,11], что непосредственно следует из предположения о непрерывности $\vec{\Omega}(\mathrm{r}, \tau)$. Покажем это на примере двумерной квадратной решетки, для которой выражение (3.1) можно представить в виде

$$A_1 = iS \int_0^\beta d\tau \sum_{n,m} (-1)^{m+n} \psi(x, y, \tau) \ .$$

Здесь m, n — целые числа, нумерующие узлы в направлении x и y. Выполняя по одной из координат (например, x) преобразования, аналогичные (3.2)–(3.4), выражение для A_1 можно привести к виду

$$A_1 = 2\pi S \sum (-1)^n q(y) \ ,$$

где, в силу непрерывности $\vec{\Omega}(\mathrm{r}, \tau)$, величина $q(y)$ является непрерывной целочисленной функцией и, следовательно, константой. Это приводит к тому, что A_1 обращается тождественно в нуль. Аналогично доказывается отсутствие топологического слагаемого и в пространствах более высокой размерности.

4. Нелинейная σ-модель

В данном разделе мы покажем, какие физические эффекты могут быть предсказаны в рамках нелинейной σ-модели. В отличие от модели Гейзенберга, в которой число компонент спина равно трем, нелинейная σ-модель может быть формально определена для произвольного числа компонент m вектора $\vec{\Omega}$. Естественно попытаться решить задачу в пределе больших m, а далее экстраполировать результаты на случай $m = 3$. Как мы увидим ниже, данное приближение (разложение по $1/m$) при $m = 3$ приводит к выражениям, качественно согласующимся с результатами, полученными в рамках более последовательных методов.

В пределе больших m величина $\vec{\Omega}^2$ слабо флуктуирует [19], и жесткое условие (2.21) для каждой пространственно-временной точки может быть заменено более слабым:

$$\int d\mathrm{r}\, d\tau\, \vec{\Omega}^2(\mathrm{r}, \tau) = 1 \ . \qquad (4.1)$$

Для классической модели Гейзенберга в дискретном случае приближение, аналогичное (4.1), получило название сферической модели. Условие (4.1) является точным, когда число компонент $m \to \infty$. При вычислении статистической суммы соотношение (4.1) может быть учтено под интегралом (2.16) введением Лагранжева множителя λ, после чего интеграл становится гауссовским.

В отсутствие магнитного поля с помощью (2.16), (2.17) легко получить соотношение

$$\langle \Omega^\alpha(\mathrm{k}, \omega_n) \Omega^\beta(-\mathrm{k}, -\omega_n) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{2Jza^d}{\omega_n^2 + k^2 v^2 + \Delta^2} \ ,$$

где $\Delta = 4Jza^d\lambda$ играет роль щели в спектре, а соответствующая корреляционная длина $\xi = v/\Delta$. Условие (4.1) приводит к следующему уравнению для определения Δ:

$$mT \sum_{\omega_n} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2Jza^d}{\omega_n^2 + k^2 v^2 + \Delta^2} = 1 \ . \qquad (4.2)$$

После суммирования по ω_n соотношение (4.2) принимает вид

$$Jza^d m \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k)} \operatorname{cth} \frac{\beta\varepsilon(k)}{2} = 1 \ , \qquad (4.3)$$

где $\varepsilon(k) = (k^2 v^2 + \Delta^2)^{1/2}$.

В одномерном случае при $T \to 0$ для щели в спектре получаем

$$\Delta = \frac{JS}{\operatorname{sh}(\pi S/m)} \ .$$

Здесь мы учли условие (2.20).

В двумерном случае интеграл (4.3) вычисляется для произвольных температур. Обозначая через Λ_0 верхний предел интегрирования по модулю k, приходим ($v\Lambda_0 >> \Delta$) к следующему выражению для Δ:

$$\Delta = 2T\,\mathrm{Arsh}\left\{\mathrm{sh}\,(\beta\Lambda_0 v/2)\exp\left(-\frac{2\pi JS^2}{mT}\right)\right\}. \quad (4.4)$$

В пределе $T \to 0$ стоящий в фигурных скобках гиперболический синус можно заменить экспонентой:

$$\Delta = 2T\,\mathrm{Arsh}\left\{\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2\pi JS^2}{mT}(1-\eta)\right)\right\}, \quad (4.5)$$

где $\eta = \Lambda_0 nv/(4\pi JS^2)$. Таким образом, поведение щели при $T \to 0$ будет определяться величиной параметра η. При $\eta < 1$

$$\Delta \simeq T\exp\left\{-\frac{2\pi JS^2}{mT}(1-\eta)\right\}.$$

В случае $\eta > 1$ значение щели не зависит от температуры и равно

$$\Delta = 4\pi JS^2(\eta - 1)/m. \quad (4.6)$$

Если скорость спиновых волн v и значение Λ_0 определяются соответственно соотношениями (2.19) и (2.20), то параметр $\eta = m/(S\sqrt{\pi})$.

Полученные выше оценки для Δ плохо согласуются с данными, известными из эксперимента [20], и результатами численного расчета [21–25]. Это и не удивительно, поскольку, как отмечалось в [26,27], имеются веские основания предполагать, что разложение по $1/m$ справедливо только для $m > 8$ и не пригодно для случаев, представляющих наибольший физический интерес, т.е. для $m = 1, 2, 3$.

Задачу о нахождении статистической суммы можно свести к вычислению гауссовского интеграла с использованием вместо нелинейной σ-модели модель Хиггса и применяя затем вариационный метод Фейнмана. Модель Хиггса отличается от нелинейной σ-модели тем, что в ней не налагаются никакие ограничения на модуль векторного поля $\vec{\Phi}$. Пусть действие A имеет вид

$$A = A_0 + A_1,$$

$$A_0 = \frac{1}{2ga^2} \times$$

$$\times \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r}\left\{a^2\left((\nabla\vec{\Phi})^2 + v^{-2}(\partial\vec{\Phi}/\partial\tau)^2\right) + p^2\Phi^2\right\},$$

$$A_1 = \frac{1}{2ga^2}\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r}\left\{z\left(\Phi^2 - 2\Phi\right) - p^2\Phi^2\right\}.$$

Здесь p — вариационный параметр, определяющий величину щели Δ в спектре. Согласно вариационному принципу, свободная энергия F удовлетворяет неравенству

$$F \geq F_0 + F_1, \quad (4.7)$$

где $F_0 = -T\ln Z_0$; $Z_0 = \int D[\Phi]\exp(-A_0)$; а $F_1 = T\langle A_1\rangle$. Угловые скобки обозначают усреднение с действием A_0. Минимизация выражения (4.7) по p приводит к следующему уравнению для параметра p:

$$\frac{\pi}{2p} = \mathrm{sh}\left\{\frac{8\pi S}{m^2(2-p^2)^2}\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]\right\}.$$

Численные расчеты при $S = 1$, $m = 3$ дают $p \simeq 0{,}697$ и, следовательно, значение $\Delta \simeq 1{,}4JS$. Таким образом, Δ, полученное вариационным методом, также является завышенным и не слишком отличается от найденного с помощью разложения по $1/m$.

Более адекватное описание свойств нелинейной σ-модели может быть получено методом $(2+\varepsilon)$-разложения, впервые предложенным Поляковым [28] для решения некоторых задач квантовой теории поля. Применительно к классическому гейзенберговскому магнетику метод Полякова был реализован в [29–31]. В работе [32] метод $(2+\varepsilon)$-разложения использовался для решения вопроса о дальнем порядке в двумерном квантовом гейзенберговском АФМ. Метод $(2+\varepsilon)$-разложения существенным образом использует то обстоятельство, что размерность пространства $d = 2$ является критической по отношению к существованию фазового перехода при условии, что такой переход связан со спонтанным нарушением непрерывной группы симметрии [33].

Нашей основной задачей будет вычисление статистической суммы (2.16) для системы с действием вида (2.17) при $\mathbf{h}_e = 0$:

$$A = (1/2g)\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r}\left[(\nabla\vec{\Omega})^2 + v^{-2}\left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\tau}\right)^2\right]. \quad (4.8)$$

Теперь, однако, мы не станем связывать величину g с конкретными параметрами системы, поскольку можно ожидать, что при различных модификациях модели общая структура действия (4.8) будет сохраняться, а изменятся лишь входящие в него параметры. Хотя при $d \leq 2$ отсутствует дальний порядок, тем не менее корреляционный радиус ξ неограниченно растет с понижением температуры, так что при $T \to 0$ возникает ярко выраженный ближний порядок. Это позволяет предположить, что вектор $\vec{\Omega}$ ориентирован вдоль некоторого медленно меняющегося от точки к точке преимущественного направления, вблизи которого имеются малые быстро меняющиеся пространственные

флуктуации. Ниже будем предполагать, что интегрирование по этим флуктуациям в статистической сумме (2.16) можно выполнить в рамках спин-волнового приближения. Следует, однако, иметь в виду, что при разбиении $\vec{\Omega}$ на быстро и медленно меняющуюся части необходимо удовлетворить условию (2.21). Это можно сделать, если представить вектор $\vec{\Omega}$ в виде [34]

$$\vec{\Omega} = \mathbf{n}\left(1-\varphi^2\right)^{1/2} + \vec{\varphi} \simeq \mathbf{n}\left(1-\varphi^2/2\right) + \vec{\varphi}\,, \tag{4.9}$$

где $\vec{\varphi} = \sum_{a=1}^{n-1} \mathbf{e}_a \varphi_a$, а векторы $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{n}$ удовлетворяют соотношениям

$$(\mathbf{e}_a \mathbf{n}) = 0\,,\ (\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b) = \delta_{ab}\,. \tag{4.10}$$

Будем считать $\mathbf{e}_a(\mathbf{r}, \tau)$ и $\mathbf{n}(\mathbf{r}, \tau)$ медленно меняющимися функциями обоих аргументов, а относительно амплитуд φ_a предположим, что они малы, $\varphi_a \ll 1$, и в их фурье-разложении по координатам присутствуют только компоненты $\varphi_{\mathbf{k}}$ с $\mathbf{k}$, лежащими в слое $\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda_0$. С точностью до членов второго порядка по φ_a для $(\nabla\vec{\Omega})^2$ получим

$$(\nabla\vec{\Omega})^2 \simeq (\nabla\mathbf{n})^2(1-\varphi^2) + 2\sum_a \nabla\mathbf{n}(\mathbf{e}_a\nabla\varphi_a + \nabla\mathbf{e}_a\varphi_a) +$$

$$+ \sum_{a,b}\nabla\mathbf{e}_a\nabla\mathbf{e}_b\,\varphi_a\varphi_b + \sum_a (\nabla\varphi_a)^2\,.$$

Аналогичным образом выписывается выражение для $(\partial\vec{\Omega}/\partial\tau)^2$. Пользуясь теорией возмущений и удерживая содержащие градиенты и производные по τ от $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_a$ слагаемые (линейные по φ_a — во втором порядке, а квадратичные — в первом), выполним интегрирование в статистической сумме по быстро меняющимся переменным. В результате для зависящей от $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_a$ части действия получаем

$$A = (1/2g)\int_0^\beta d\tau \times$$

$$\times \int d\mathbf{r}\left\{(1-\langle\varphi^2\rangle)\left[(\nabla\mathbf{n})^2 + v^{-2}(\partial\mathbf{n}/\partial\tau)^2\right] +\right.$$

$$\left. + \sum_a \langle\varphi_a^2\rangle\left[(\nabla\mathbf{e}_a)^2 + v^{-2}(\partial\mathbf{e}_a/\partial\tau)^2\right]\right\}. \tag{4.11}$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение с действием

$$A_0 = (1/2g) \times$$

$$\times \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \sum_a \left[(\nabla\varphi_a)^2 + v^{-2}(\partial\varphi_a/\partial\tau)^2\right].$$

Заметим, что выбор векторов $\mathbf{e}_a$, ортогональных друг другу и вектору $\mathbf{n}$, неоднозначен. Пользуясь этим, подберем их так, чтобы выполнялось условие [35]

$$(\nabla\mathbf{n})^2 = \sum_a (\nabla\mathbf{e}_a)^2\,. \tag{4.12}$$

(Доказательство соотношения (4.12) дано в Приложении 4.) С помощью (4.12) действие (4.11) вновь может быть представлено в виде (4.8), где, однако, величина g заменена перенормированным значением $\tilde{g}$, равным

$$\tilde{g} = g\left[1 + (m-2)\langle\varphi_a^2\rangle\right]\,. \tag{4.13}$$

Здесь $\langle\varphi_a^2\rangle$ определяется соотношением

$$\langle\varphi_a^2\rangle = T\sum_n \sum_{\Lambda<|\mathbf{k}|<\Lambda_0} \frac{gv^2}{\omega_n^2 + (kv)^2} =$$

$$= (gv/2)\sum_{\Lambda<|\mathbf{k}|<\Lambda_0} \frac{1}{k}\operatorname{cth}\frac{kv}{2T}\,.$$

Многократное повторное применение вышеописанной процедуры приводит в результате к следующему дифференциальному уравнению для эффективной величины $\tilde{g}$:

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\,(1/\tilde{g}) = \frac{1}{2}(m-2)K_d\,v\Lambda^{d-2}\operatorname{cth}\frac{\Lambda v}{2T} \tag{4.14}$$

с начальным условием

$$\tilde{g}(\Lambda_0) = g\,.$$

Здесь $K_d = V_d\,d/(2\pi)^d$. Сравнивая (4.8) и (2.17), видим, что в качестве исходного следует выбрать g, определяемое выражением (2.7). Отметим, что вопрос о корректности процедуры получения уравнения (4.14) весьма сложен. Действительно, с одной стороны, слой $d\Lambda = \Lambda - \Lambda_0$ должен быть достаточно узким, чтобы можно было использовать теорию возмущений по φ_a^2, а, с другой стороны, он должен быть настолько широк, чтобы выполнялось условие применимости теории возмущений по степеням градиентов: $|\nabla\mathbf{n}|, |\nabla\mathbf{e}_a| \ll |\nabla\varphi_a|$. Из (4.14) следует, что

$$1/\tilde{g} - 1/g = \frac{1}{2}(m-2)\,K_d\,v\int_{\Lambda_0}^{\Lambda} d\Lambda\,\Lambda^\varepsilon \operatorname{cth}\frac{\Lambda v}{2T}\,, \tag{4.15}$$

где $\varepsilon = d - 2$.

В двумерном случае ($\varepsilon = 0$) интеграл в (4.15) берется в элементарных функциях. Результат имеет вид

$$1/\tilde{g} - 1/g = \frac{T}{2\pi}(m-2)\ln\left(\mathrm{sh}\,\frac{\Lambda v}{2T} \Big/ \mathrm{sh}\,\frac{\Lambda_0 v}{2T}\right) . \tag{4.16}$$

Исключение быстрых переменных следует прекратить, когда $1/\tilde{g}$ обратится в нуль. Значение $\Lambda \neq 0$, при котором это происходит, определяет корреляционную длину. Соответствующее значение щели в спектре имеет вид, аналогичный (4.5):

$$\Delta = \Lambda v = 2T\,\mathrm{Arsh}\left\{\mathrm{sh}\,(\beta\Lambda_0 v/2)\exp\left(-\frac{2\pi}{(m-2)gT}\right)\right\} . \tag{4.17}$$

Если в качестве затравочного выбрать значение g, определяемое соотношением (2.7), то формула (4.17) совпадет с (4.4) с тем лишь отличием, что в знаменателе показателя экспоненты стоит множитель $(m-2)$. Детальный анализ фазовой диаграммы на плоскости $(\tilde{g}, T)$ для двумерного гейзенберговского АФМ проведен в работе [32].

В случае $\varepsilon > 0$ интеграл (4.16) не берется в элементарных функциях, однако, как легко видеть, он сходится, даже если положить верхний предел равным 0. Условие обращения в нуль $1/\tilde{g}$ приводит к уравнению для критической температуры T_c, разделяющей неупорядоченную и упорядоченную фазы:

$$1/g = \frac{1}{2}(m-2)K_d v \int_0^{\Lambda_0} d\Lambda\, \Lambda^{\varepsilon}\,\mathrm{cth}\,\frac{\Lambda v}{2T_c} ,$$

Таким образом, ситуация с $\varepsilon > 0$ принципиально отличается от двумерной наличием фазового перехода при $T = T_c$.

До сих пор мы пользовались Лагранжевой формулировкой задачи. Однако оказывается, что при переходе к Гамильтоновому формализму удается получить дополнительную информацию о природе различий в поведении одномерных АФМ систем с целыми и полуцелыми значениями спина. В данном случае, когда статистическая сумма рассматривается в континуальном приближении, это оказывается возможным благодаря тому, что соответствующие выражения для действий содержат производные по τ в степени не выше второй. Чтобы упростить запись операторных выражений, возникающих при переходе к гамильтониану, нам будет удобно использовать дискретный вариант, в котором интегралы заменены Римановыми суммами, а производные по координатам — конечными разностями. Для полноты картины приведем вначале гамильтониан ФМ, построенный по обычной схеме [36]:

$$H = \frac{JS^2}{4}\sum_{\mathrm{f},\vec{\delta}} (\vec{\Omega}_{\mathrm{f}} - \vec{\Omega}_{\mathrm{f}+\vec{\delta}})^2 + S\sum_{\mathrm{f}} (\mathrm{h}\vec{\Omega}_{\mathrm{f}}) , \tag{4.18}$$

где роль операторов импульса и координаты играют соответственно $\cos\theta_{\mathrm{f}}$ и φ_{f} : $[\cos\theta_{\mathrm{f}}, \varphi_{\mathrm{f}'}] = -i\Delta_{\mathrm{ff}'}$ ($\Delta_{\mathrm{ff}'}$ — символ Кронекера). Отметим, что (4.18) можно было бы получить и непосредственно из гамильтониана Гейзенберга, если для спиновых операторов воспользоваться представлением, предложенным Барьяхтаром и Яблонским в работе [37].

Для АФМ в случаях, когда отсутствует топологическое слагаемое, используя (2.17) при $\mathrm{h}_1 = 0$, получаем следующий гамильтониан:

$$H = \frac{|J|S^2}{4}\sum_{\mathrm{f},\vec{\delta}} (\vec{\Omega}_{\mathrm{f}} - \vec{\Omega}_{\mathrm{f}+\vec{\delta}})^2 + \frac{|J|z}{2}\sum_{\mathrm{f}} \hat{L}^2_{\mathrm{f}} . \tag{4.19}$$

Здесь $\hat{L}^2_{\mathrm{f}}$ — сферическая часть лапласиана.

Специального рассмотрения требует случай полуцелого спина при $d = 1$, когда топологический заряд отличен от нуля. Переопределим вектор $\vec{\Omega}_n$, введя $\vec{\Omega}_n \to (-1)^n \vec{\Omega}_n$. В результате после ряда преобразований гамильтониан с точностью до несущественной аддитивной постоянной принимает вид

$$H = |J|\sum_n \hat{L}'^2_n + |J|S^2\sum_n \vec{\Omega}_n\vec{\Omega}_{n+1} . \tag{4.20}$$

Здесь

$$\hat{L}'^2_n = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \left\{-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + S\,\mathrm{ctg}\,\theta\right\}^2 . \tag{4.21}$$

Таким образом, учет топологического слагаемого приводит к тому, что вместо угловой части лапласиана $\hat{L}^2$ (см. (4.19)) в выражении (4.21) появляется оператор $\hat{L}'^2$.

Поскольку, как отмечалось в разд. 3, при вычислении статистической суммы в континуальном приближении [6,16] принципиальным является лишь то, какой спин (целый или полуцелый) имеет система, и совершенно неважна конкретная его величина, в данной задаче достаточно рассматривать только случаи $S = 0$ и $S = 1/2$. Для $S = 0$ оператор $\hat{L}'^2$ совпадает с $\hat{L}^2$, спектр которого имеет вид $l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$). При $l = 0$ система имеет невырожденное основное состояние. Первое возбужденное состояние соответствует $l = 1$ и отделено от основного щелью. При $S = 1/2$, как нетрудно убедиться [38], спектр $\hat{L}'^2$ имеет вид $l^2 + 2l + 1/2$. Основное состояние в этом случае двукратно вырождено: нижайшему значению энергии, равному $1/2$, соответствуют две волновые функции $\psi_1 =$

$= \cos(\theta/2)\, e^{-i\varphi/2}$ и $\psi_2 = \sin(\theta/2)\, e^{i\varphi/2}$. Указанное различие в спектрах и в характерах основного состояния операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}'^2$ и определяет существенную разницу в поведении систем с целыми и полуцелыми значениями спина.

Отметим, что оператор $\hat{L}'^2$ допускает любопытную интерпретацию [39]. В 1930 г. Дираком [38] были изучены следствия, вытекающие из предположения о существовании одиночного магнитного полюса (монополя). Обычные требования квантовой механики (однозначность волновой функции) позволили ему установить замечательную связь между электрическим e и магнитным μ зарядами:

$$e\mu/\hbar c = k/2\ , \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\ ,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света. Уравнение Шредингера для электрического заряда в поле монополя имеет вид

$$(\nabla - eA/c)^2\psi = E\psi\ , \qquad (4.22)$$

где для компонент векторного потенциала A в сферических координатах удобно выбрать калибровку

$$A_r = A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \frac{\mu}{2r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\ .$$

Тогда после разделения переменных в (4.22) зависящая от θ и φ часть волновой функции χ будет удовлетворять уравнению

$$\hat{L}'^2\chi = \lambda\chi\ ,$$

где $\hat{L}'^2$ определяется соотношением (4.21) с той разницей, что вместо S в ней возникает множитель $e\mu/\hbar c$, равный полуцелому числу.

Обратим теперь внимание на интересную, с нашей точки зрения, аналогию между поведением магнетиков с целым и полуцелым значениями спина и известными свойствами [40] квантовых кристаллов пара- и ортоводорода, обусловленными наличием у последних трехкратно вырожденного основного состояния в метастабильном долгоживущем состоянии, отвечающем вращательному квантовому числу $l = 1$. Поскольку конверсия в состояние с $l = 0$ происходит за времена порядка десятков часов, а ближайшее возбужденное состояние с $l = 2$ отделено от «основного» щелью в десятки градусов, ортоводород может рассматриваться за времена реального эксперимента как трехуровневая система, в которой квадруполь-квадрупольное взаимодействие молекул-ротаторов в соседних узлах является возмущением по сравнению с большой вращательной кинетической энергией водорода. Расчет матричных элементов межмолекулярного взаимодействия по «усеченному» вращательному спектру приводит к появлению в гамильтониане системы дополнительного эффективного взаимодействия, в результате которого возникает ориентационное упорядочение молекул ортофазы [40] в пространственную конфигурацию $Pa3$.

В антиферромагнетике с полуцелым спином основное состояние является двукратно вырожденным, и при рассмотрении слабых возбуждений в такой системе возникает ситуация, аналогичная описанной выше. Так, если в гамильтониане (4.20), описывающем системы с любыми полуцелыми спинами, рассмотреть второе слагаемое как возмущение, то, ограничив систему функций для оператора $\hat{L}'^2$ только функциями основного состояния, после элементарных вычислений получим, что (4.20) сведется к гамильтониану Гейзенберга со спином 1/2 [39].

Общая суть упомянутой аналогии состоит, вероятно, в том, что ограничение возможных состояний системы, обусловленное реальными физическими причинами, означает наложение на нее «кинематических» связей, которые как раз и проявляются в появлении в системе соответствующего эффективного взаимодействия. Формально этот эффект проявляется в том, что, несмотря на обращение в усеченном базисе первого слагаемого (4.20) (оператора кинетической энергии) в константу, второй член в (4.20) выразится теперь через некоммутирующие между собой операторы. Действительно, в базисе функций ψ_1, ψ_2 матричные элементы векторов $\vec{\Omega}$ совпадают с матрицами Паули.

В заключение подчеркнем, что рассмотренная выше нелинейная σ-модель обладает рядом достоинств, среди которых прежде всего следует отметить то, что в рамках этой модели удается явно проследить различие в поведении систем с целым и полуцелым значениями спинов. Кроме того, она оказывается проще исходной модели Гейзенберга и переход к ней осуществляется с помощью вполне контролируемых приближений. И, наконец, получаемые с использованием σ-модели результаты дают правильное качественное описание низкоразмерных гейзенберговских систем. Отметим также, что на основе σ-модели удается предсказать возможность существования квантово разупорядоченной фазы для двумерных АФМ. Вместе с тем использование нелинейной σ-модели до настоящего времени не позволяло достичь удовлетворительного количественного согласия при описании термодинамических свойств низкоразмерных магнетиков.

Как будет видно ниже, для получения надежных количественных результатов оказывается полезным вновь вернуться к исходной модели Гейзенберга. В следующем разделе мы перейдем к обсуждению работ, содержащих точные результаты в стандартной модели Гейзенберга и в близких к ней моделях.

5. Некоторые точно решаемые модели

В данном разделе мы рассмотрим ситуации, когда можно получить некоторые точные результаты. Начнем с классической модели Гейзенберга для линейной цепочки из N узлов в отсутствие магнитного поля. В этом случае можно точно рассчитать как статистическую сумму, так и корреляционные функции. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+1} , \qquad (5.1)$$

где $\mathbf{n}_1$ — классический вектор единичной длины. Обменный интеграл J в (5.1) как в ФМ, так и АФМ случае можно считать положительным. Действительно, гамильтониан АФМ, где $J<0$, сводится к виду (5.1) с положительным J с помощью замены $\mathbf{n}_i \to (-1)^i \mathbf{n}_i$. Для нахождения статистической суммы и корреляционных функций удобно воспользоваться методом матрицы переноса (трансфер-матрицы) [41], согласно которому задача для рассматриваемой модели сводится к нахождению собственных функций и собственных значений оператора V:

$$V\psi = \lambda\psi , \quad V\psi(\mathbf{n}) = \int d\mathbf{n}' \exp(K\mathbf{n}\mathbf{n}')\psi(\mathbf{n}') ,$$

где $K = \beta J$. Легко убедиться, что при циклических граничных условиях статистическая сумма представляется в виде шпура оператора V^N:

$$Z = \mathrm{Sp}\, V^N ,$$

а парная корреляционная функция имеет вид

$$\langle n_0^\alpha n_j^\beta \rangle = \langle n_m^\alpha n_{m+j}^\beta \rangle = Z^{-1}\,\mathrm{Sp}\left(n^\alpha V^i n^\beta V^{N-i}\right) . \qquad (5.2)$$

Поэтому при $N \to \infty$ для вычисления статистической суммы достаточно ограничиться только наибольшим собственным значением λ_0 оператора V. Для нахождения корреляционной функции (5.2) нужно взять λ_0 и следующее по величине собственное значение λ_1, а также необходимо знать соответствующие λ_0 и λ_1, собственные функциями ψ_0 и ψ_1. Вид этих функций легко угадывается. С учетом нормировки они имеют вид

$$\psi_0 = 1/\sqrt{4\pi} , \quad \psi_1 = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta ,$$

а для собственных значений получаем

$$\lambda_0 = 4\pi\frac{\mathrm{sh}\,K}{K} , \quad \lambda_1 = \frac{4\pi}{K}\left(\mathrm{ch}\,K - \frac{\mathrm{sh}\,K}{K}\right) .$$

В результате для свободной энергии и корреляционной функции (5.2) имеем

$$F/N = -T\ln\left(4\pi\frac{\mathrm{sh}\,K}{K}\right) ,$$

$$\langle n_0^\alpha n_j^\beta \rangle = \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta} y^{|j|} , \quad y = \mathrm{cth}\,K - 1/K .$$

Средняя энергия и безразмерные восприимчивости в ФМ и АФМ случаях соответственно равны

$$E/NJ = -y ,$$

$$\chi_{FM}^{\alpha\beta} = \frac{J}{TN}\sum_{i,j}\langle n_i^\alpha n_j^\beta\rangle = \frac{J}{3T}\Delta_{\alpha\beta}\frac{1+y}{1-y} ,$$

$$\chi_{AFM}^{\alpha\beta} = \frac{J}{TN}\sum_{i,j}(-1)^{1+j}\langle n_i^\alpha n_j^\beta\rangle = \frac{J}{3T}\Delta_{\alpha\beta}\frac{1-y}{1+y} .$$

Таким образом, видно, что в классическом случае описание одномерных гейзенберговских магнетиков может быть сравнительно просто доведено до окончательного результата.

Менее тривиальна ситуация в квантовом случае. Здесь проблемы возникают как для ферро-, так и для антиферромагнетиков, однако суть их и сложность в двух указанных случаях оказывается различной. Еще в 1931 г. Бете [42] предложил способ (называемый теперь анзацем Бете) построения волновых функций для изотропной одномерной модели Гейзенберга со спином 1/2. Оказалось, что для ферромагнетика квантовомеханическая задача может быть решена без принципиальных затруднений, и осложнения возникают только при попытке описания термодинамических свойств ФМ систем [43]. Что же касается антиферромагнетика, то здесь сложности появляются на более раннем этапе. Волновые функции для АФМ со спином 1/2 Бете получил, трансформируя очевидное основное состояние ферромагнетика в набор антиферромагнитных возбуждений [42]. Энергию же основного состояния для этой системы Хюльтену [44] удалось вычислить только в 1938 г., а точное решение задачи об основном состоянии АФМ системы с произвольным спином не известно еще и до настоящего времени. Впоследствии в течение многих лет основные усилия исследователей были сосредоточены на возможных обобщениях подхода Бете [45–47], в частности на случай анизотропного магнетика. При этом оставались нерешенными многие принципиальные проблемы, например вопрос о классификации возбужденых состояний в АФМ цепочке со спином 1/2. Окончательная ясность в решение этой проблемы была внесена Тахтаджяном и Фаддеевым [48], которые показали, что спектр слабовозбужденных состояний имеет по крайней мере двухпараметрический характер. Авторы же более ранних работ искусственно выделяли однопараметрическое семейство волновых функций из двухпараметрического семейства общего вида, фиксируя один из параметров. И, наконец,

подчеркнем, что проблема точного вычисления термодинамических функций для одномерной модели Гейзенберга считается решенной [43,49]. Однако она сводится к бесконечной системе сложных нелинейных интегральных уравнений, анализ которой можно провести только в предельных случаях $T \to \infty$ и $T \to 0$. При произвольных же значениях параметров нахождение термодинамических характеристик представляет собой сложную задачу, решение которой возможно только с помощью численных методов.

Весьма нетривиальный анализ уравнений, определяющих термодинамические функции ФМ и АФМ спиновых цепочек, был проведен в работе [49]. Приведем здесь результаты для представляющего наибольший физический интерес случая изотропного антиферромагнетика. В низкотемпературном пределе для свободной энергии F, теплоемкости C и восприимчивости χ авторами работы [49] были получены следующие результаты:

$$F/|J|N \simeq$$

$$\simeq \varepsilon_0 - \frac{1}{3}\tau^2 + \sigma B - B^2(2\pi^2)^{-1} - \tau^2\left(6(\ln B)^2\right)^{-1}; \tag{5.3}$$

$$C/N \simeq \frac{2}{3}\tau + \tau\left(3(\ln B)^2\right)^{-1}; \tag{5.4}$$

$$\chi/N \simeq \pi^{-2} + \tau^2\left(3B^2(\ln B)^3\right)^{-1}. \tag{5.5}$$

Здесь $\tau = T/|J|$, $B = h_e/|J|$, h_e — внешнее магнитное поле. Структура приведенных выражений наводит на мысль о том, что такие же формулы могли бы быть получены с помощью обычной теории спиновых волн. Непосредственные расчеты, однако, показывают, что коэффициенты при степенях τ, полученные в спин-волновом приближении, будут отличаться от соответствующих коэффициентов в (5.3)–(5.5) в несколько раз.

В высокотемпературном пределе формулы [49] полностью согласуются с результатами, полученными методом высокотемпературных разложений. Первые три члена разложения по $1/T$ для свободной энергии имеют вид

$$F/|J|N \simeq -\tau \ln\left(2\operatorname{ch}\frac{B}{2}\right) +$$

$$+ \sigma B - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4T}\right)\operatorname{ch}^{-2}\frac{B}{2} -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \operatorname{th}^2\frac{B}{2} - \frac{3}{2}\operatorname{th}^4\frac{B}{2}\right)\frac{1}{16T} + \ldots, \tag{5.6}$$

где σ — намагниченность на узел, определяемая из условия $\partial(F/|J|N)/\partial B = 0$.

Квантовые одномерные цепочки со спином 1/2 исследовались также в континуальном пределе, после перехода к которому изотропная АФМ модель сводится к точно разрешимой модели Латтинжера [50] для одномерной многофермионной системы. Спектр этой модели был детально исследован в работе Маттиса и Либа [51]. В этом пределе удается получить и вид корреляционных функций. Однако проблема оказывается весьма сложной. Хотя степенной характер поведения корреляционных функций предполагался достаточно давно [52], правильные выражения для них были получены лишь сравнительно недавно [53,54]:

$$\langle S_0 S_n\rangle \propto (-1)^n(\ln n)^{1/2}/n. \tag{5.7}$$

Для одномерных систем со спином $S > 1/2$ точные результаты удается получить только для некоторых моделей специального вида, в частности, для спиновой цепочки с $S = 1$, описываемой гамильтонианом вида

$$H = \frac{J}{2}\sum_i \left(S_i S_{i+1} - \lambda (S_i S_{i+1})^2\right), \tag{5.8}$$

при специальном выборе λ. Так, для $\lambda = -1/3$ найдены основное состояние и парные корреляционные функции [55,56]. Это удалось сделать благодаря тому, что при $\lambda = -1/3$ гамильтониан (5.8) с точностью до аддитивной постоянной представляется в виде суммы проекционных операторов

$$P_2(\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1} + \frac{1}{6}(\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1})^2 + \frac{1}{3},$$

где $P_n(\mathbf{S})$ — ортогональная проекция на подпространство с $S^2 = n(n+1)$. Указанное обстоятельство позволяет угадать [55–57] вид волновой функции основного состояния и строго доказать [56] невырожденность основного состояния, наличие щели в спектре, отделяющей первое возбужденное состояние от основного, а также получить точные выражения для корреляционных функций. В частности, парная корреляционная функция по основному состоянию имеет вид [56]

$$\langle S_0^\alpha S_n^\beta\rangle = \frac{4}{3}\Delta_{\alpha\beta}(-1)^n 3^{-n} \quad (n \neq 0). \tag{5.9}$$

В случае $\lambda = 1$ модель (5.8) может быть решена при произвольных значениях спина с помощью анзаца Бете [58,59]. Оказалось, что такая модель, независимо от величины спина, имеет единственное основное состояние, но не имеет щели в спектре. Парная корреляционная функция в модели (5.8) с $\lambda = 1$ затухает с расстоянием степенным образом. Авторы работы [56] высказывают также предположение о том, что в модели (5.8) при любых $-1 < \lambda < 1$ всегда имеется единственное основное состояние и щель в спектре. И, наконец, отметим, что с помощью анзаца Бете может быть решен еще ряд задач, гамильтонианы которых обладают

определенным сходством с моделью Гейзенберга для цепочек с произвольным спином, но имеют весьма экзотический вид [58,60–62].

Для моделей с гамильтонианами, представимыми в виде суммы проекционных операторов, удается найти основное состояние также в пространстве бóльшего числа измерений. Так, например, в [56] это сделано для модели со спином 3/2, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + \frac{116}{243} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j)^2 + \frac{16}{243} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j)^3$$

на гексагональной решетке. Угловые скобки обозначают суммирование по ближайшим соседям. Строго доказано, что основное состояние в такой модели единственно, а парная корреляционная функция затухает экспоненциально, т.е. корреляционная длина конечна, но тем не менее щель в спектре отсутствует. Здесь хотелось бы подчеркнуть, что данная модель является контрпримером, разрушающим бытующее мнение о том, что существование конечной корреляционной длины непременно влечет за собой наличие щели в спектре.

Другим поучительным примером является одномерная модель со спином 1/2, предложенная в [63–65], гамильтониан которой равен:

$$H = \sum_i H_i \quad , \qquad H_i = P_{3/2}(\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{i+1} + \mathbf{S}_{i+2}) \quad , \tag{5.10}$$

где введено обозначение

$$P_{3/2}(\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{i+1} + \mathbf{S}_{i+2}) =$$

$$= \frac{2}{3} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1} + \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+2} + \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{S}_{i+2}) + \frac{1}{2} \, .$$

Как уже отмечалось, для гамильтониана, который представляется в виде суммы проекционных операторов, основное состояние может быть найдено точно. В [63–65] показано, что основное состояние системы (5.10) двукратно вырождено и в спектре имеется щель. В работах [66,67] найдено несколько первых возбужденных состояний для этой системы.

Мы не будем обсуждать подробности нахождения решений для перечисленных моделей ввиду их крайне специального вида.

Так же, как и в одномерном случае, для классической модели Гейзенберга в двух измерениях был получен ряд точных результатов [68, 69]. Если для одномерной системы решение получается элементарно, то в двумерном случае необходимо выполнить ряд остроумных преобразований и нетривиальных предельных переходов, после чего исходная проблема сводится к задаче о взаимодействующих фермионах в пространстве размерности (1+1), которая затем может быть решена с помощью анзаца Бете. Мы не будем излагать здесь вывод указанных результатов и за подробностями отсылаем читателя к оригинальной работе [69].

6. Некоторые результаты численных расчетов

С известными оговорками к категории точных можно отнести результаты, полученные на основе методов высокотемпературных разложений. Для средней энергии и магнитной восприимчивости двумерного АФМ со спином 1/2 на квадратной решетке получены следующие разложения [70]:

$$E/N = -0{,}5J(1{,}5x + 0{,}75x^2 - 0{,}875x^3 - 1{,}5625x^4 + 0{,}40625x^5 +$$
$$+ 2{,}705208x^6 + 0{,}7137649x^7 - 4{,}179204x^8 - 3{,}315586x^9) \, , \tag{6.1}$$

$$\chi = (0{,}25/T)(1 - 2x + 2x^2 - 1{,}33333x^3 + 1{,}083333x^4 - 1{,}083333x^5 + 0{,}5097222x^6 +$$
$$+ 0{,}3218254x^7 + 0{,}4073909x^8 - 1{,}06728x^9 - 0{,}6928188x^{10}) \, , \tag{6.2}$$

где $x = J/(2T)$.

К числу точных также можно отнести решения, полученные с помощью точной диагонализации гамильтонианов на конечных решетках. Так например, в работе [71] построена термодинамика одномерных магнетиков со спином 1/2 для цепочек с числом узлов $N = 2$–11. Результаты подобного расчета АФМ модели Гейзенберга со спином 1/2 на решетке 4×4, приведены в работе [72]. Однако следует отметить, что точная диагонализация может быть осуществлена лишь на решетках весьма ограниченного размера.

Подобного недостатка лишены методы численного моделирования (например, квантовый метод Монте-Карло), размер решеток для которых может быть выбран достаточно большим. Полученные с их помощью результаты также можно отнести к числу точных. Количество работ, использующих численные методы для анализа поведения низкоразмерных магнитных систем, в последние годы резко возросло в связи с прогрессом вычисли-

тельной техники, и мы не в состоянии дать даже краткий обзор всех имеющихся в этой области достижений. Однако нам хотелось бы остановиться на одной из работ этого направления [73], поскольку на основе ее результатов удается в значительной степени прояснить вопрос о справедливости гипотезы Халдейна и о пределах ее применимости. В работе [73] детально проанализировано поведение системы, описываемой гамильтонианом (5.8) для значений λ в пределах $-1 \le \lambda \le 2$. Наиболее интересный результат [73] состоит в следующем. В отличие от предположения, высказанного в [56], о том, что точка $\lambda = 1$ является изолированной особой точкой, в которой щель обращается в нуль, корреляционная функция спадает по степенному закону и происходит переход в димеризованную фазу, в работе [73] показано, что имеется целый интервал $\lambda_c < \lambda < \lambda_1$, в каждой точке которого при $T = 0$ происходит фазовый переход типа Костерлица—Таулеса по параметру λ. Критическое значение $\lambda = \lambda_c$ лежит в окрестности $\lambda_c \simeq 0{,}25$, а λ_1 по крайней мере больше двух. Во всех точках этого интервала щель равна нулю, а парная корреляционная функция имеет вид

$$\langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+n} \rangle = (-1)^n a(\lambda) n^{-\eta(\lambda)} . \qquad (6.3)$$

Температурная зависимость средней энергии на узел аппроксимирована выражением

$$E/NJ = \left(\frac{T}{\theta(\lambda)}\right)^{\nu} + c_0(\lambda) . \qquad (6.4)$$

Здесь зависимость параметров a, η, c_0, θ и ν от λ так же, как и других параметров, о которых мы будем говорить ниже, представлена авторами [73] в виде таблиц. Для удобства читателя приведем аппроксимационные формулы для указанных зависимостей. Так, входящие в (6.3) и (6.4) параметры с хорошей точностью описываются соотношениями

$$a = \frac{1}{3}(1 + \lambda) ; \qquad \eta = \frac{1}{21}(12 - 7\lambda + 3\lambda^2) , \qquad (6.5)$$

$$\theta = 3\lambda/\pi + \sqrt{3} ; \quad c_0 = -\frac{4}{3}(1 + 2\lambda) , \quad \nu = \frac{9}{4}\lambda^{1/7} . \qquad (6.6)$$

Значение c_0, соответствующее энергии основного состояния, а также величина ν, полученные с помощью метода Монте-Карло, согласуются с точно найденными при $\lambda = 1$ [58,59].

В области $\lambda \le \lambda_c$ в спектре имеется щель, а парная корреляционная функция экспоненциально убывает с расстоянием по закону

$$\langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+n} \rangle = (-1)^n b(\lambda) \exp(-n/\xi(\lambda)) , \qquad (6.7)$$

где для параметров ξ и b можно написать

$$\xi(\lambda) \simeq 2\sqrt{3} + 15\lambda/2 ;$$

$$b(\lambda) \simeq 12/25 + \lambda/3 + 6\lambda^2 .$$

Как уже отмечалось, при $\lambda = -1/3$ рассматриваемая модель имеет точное решение [56], и $\langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+n} \rangle$ задается соотношением (5.8). Полученные при этом величины $\xi(-1/3)$ и $b(-1/3)$ согласуются с соответствующими значениями, найденными точно. Аналогичное утверждение касается также энергии основного состояния $E_0/NJ \simeq -0{,}6899$, точное значение для которой равно $-2/3$. Численные расчеты, проведенные в [73], подтверждают также отсутствие щели в спектре при $\lambda = -1$.

В заключение отметим, что стандартной гейзенберговской модели соответствует значение параметра $\lambda = 0$, которое попадает в область $\lambda \le \lambda_c$. Таким образом, результаты численных расчетов подтверждают гипотезу Халдейна о наличии щели в спектре одномерного гейзенберговского АФМ с целым спином (в данном случае $S = 1$).

Численные методы Монте-Карло использовались также для анализа двумерных магнитных систем [74–80]. В указанных работах, как правило, вычислялись температурные зависимости средней энергии, теплоемкости, корреляционной длины, восприимчивости. Мы остановимся на работе [80], в которой исследовался двумерный гейзенберговский АФМ со спином 1/2 на квадратной решетке (вплоть до решеток размером 128×128). Как следует из [80], при температурах $T/J > 1$ зависимости всех перечисленных выше термодинамических характеристик хорошо укладываются на соответствующие кривые, полученные методами высокотемпературных разложений. Результаты работы [80] представлены в виде таблиц и рисунков. Для температурной области $1 \le T/J \le 2{,}5$ используя данные [80], мы получили простые аппроксимационные формулы, которые приведены ниже ($x = J/T$):

$$E_0/JN = -0{,}6091 - 0{,}5847x + 0{,}6177x^2 - 0{,}8133x^3 ,$$

$$C/N = -1{,}397 - 9{,}9827x - 20{,}0058x^2 +$$

$$+ 17{,}7566x^3 - 0{,}60155x^4 ,$$

$$\chi J/N = 0{,}0436 + 0{,}5336x - 0{,}2954x^2 .$$

В [80] рассматривалась также статическая спиновая корреляционная функция, определяемая соотношением

$$C(\mathbf{r}) = (-1)^{r_x + r_y} \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{f}} \langle S^z_{\mathbf{f}} S^z_{\mathbf{f}+\mathbf{r}} \rangle , \qquad (6.8)$$

где было показано, что поведение (6.8) при $r \to \infty$ можно описать следующей зависимостью орнштейн–цернике вского типа:

$$C_\infty(r) \propto r^{-1/2} \exp(-r/\xi) \ . \qquad (6.9)$$

Входящая в (6.9) корреляционная длина при $T \to 0$ имеет асимптотику

$$\xi = A \exp(-2\pi\rho_s / T) \ ,$$

где $\rho_s \approx 0{,}199J$; $A \approx 0{,}276$.

Следует, однако, помнить, что в методе Монте-Карло фактически имитируется взаимодействие системы с термостатом, и в результате машинного моделирования есть опасность попасть в локальный минимум, так как указанный алгоритм не исключает метастабильные состояния.

В заключение этого раздела отметим, что если бы нас интересовал только ограниченный круг термодинамических характеристик (таких как средняя энергия, теплоемкость и статическая восприимчивость), то естественным способом построения удовлетворительных выражений была бы экстраполяция (с конечных решеток на системы с бесконечным числом узлов) и последующая аналитическая аппроксимация зависимостей, получаемых квантовым методом Монте-Карло. Однако такое описание оказывается неудовлетворительным, например, при попытке вычислить динамический отклик магнитной подсистемы или в случае, когда выполняется любая модификация исходной модели, к которой был применен численный метод. Поэтому для описания низкоразмерных систем имеет смысл использовать приближенные методы, приводящие к системам уравнений, которые содержат дополнительную информацию, позволяющую получить динамические характеристики.

В следующем разделе будут описаны некоторые из таких методов. Почти все они основаны на трудно контролируемых приближениях. Гарантией того, что описание с их помощью является адекватным, служит хорошее совпадение получаемых на их основе статистических величин с точными результатами и результатами численного анализа.

7. Приближенные методы, основанные непосредственно на модели Гейзенберга

7.1. Обобщенный метод Такахаши

Для описания поведения одно- и двумерных гейзенберговских магнетиков при низких температурах в работах Такахаши [72,81,82] был предложен эффективный метод, основанный на обобщении нелинейной теории спиновых волн. Эта теория позволила количественно описать целый ряд статических и динамических свойств низкоразмерных магнитных систем в области температур $T \le 0{,}5J$.

Позже в работах [83,84] нами был предложен новый метод для описания магнитных систем, в основу которого положены некоторые идеи работ [72,81,82]. Этот метод позволил значительно расширить область температур, при которых имеет место практически полное совпадение с известными на сегодняшний день точными результатами [85,86] и результатами численных экспериментов [75,80]. Указанная температурная область простирается вплоть до температур, где уже применимы высокотемпературные разложения.

Изложим суть подхода, предложенного в [83,84]. Поскольку данный метод позволяет описать с единой точки зрения ФМ и АФМ системы, ниже удобно в качестве исходного выбрать гамильтониан вида

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\mathbf{f},\vec{\delta}} \left(S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^x + \Delta S_{\mathbf{f}}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y + S_{\mathbf{f}}^z S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^z \right) - h_e \sum_{\mathbf{f}} S_{\mathbf{f}}^z \ . \qquad (7.1)$$

Здесь мы полагаем $J > 0$, параметр Δ может принимать значения ± 1. При $\Delta = 1$ гамильтониан (7.1) описывает ФМ модель Гейзенберга, а при $\Delta = -1$ после соответствующего унитарного преобразования — АФМ модель Гейзенберга. Величина h_e играет роль поля, сопряженного параметру порядка.

Как и ранее, исходным пунктом рассмотрения является общепринятое допущение о том, что корреляционная длина l при $T \to 0$ стремится к бесконечности. В областях, характерный размер которых меньше l, можно ввести среднее значение спина с относительно малыми поперечными флуктуациями вблизи него. Продольные флуктуации в силу принципа сохранения модуля [27] оказываются подавленными так же, как это происходит в трехмерных магнитоупорядоченных системах. В пределах такой области в качестве нулевого следует взять приближение, в котором средний модуль спина описывается в приближении ССП, а поперечные флуктуации в приближении хаотических фаз (ПХФ). Причем оба вклада учитываются на равных основаниях. Продольными флуктуациями в нулевом приближении следует пренебречь и рассматривать их далее как малую поправку. Как мы увидим ниже, такая модификация теории приводит к правильному температурному поведению энергии спиновых волн, согласующемуся с теорией Дайсона [87], которая до настоящего времени является наиболее строгой теорией в области низких температур. Предлагаемый метод в известном смысле аналогичен так называемому квазигармоническому приближению в теории кристаллической решетки. В отличие от гармонического приближения, в котором вклад фононов в свободную энергию рассматривается как малая поправка

к упругой энергии решетки, в квазигармоническом приближении оба вклада учитываются на равных основаниях. Несмотря на столь простую модификацию, квазигармоническое приближение позволяет правильно описать как плавление одноатомных Ван-дер-Ваальсовых кристаллов, так и ориентационные переходы в молекулярных Ван-дер-Ваальсовых кристаллах [40].

Пусть ось z в каждой точке направлена вдоль локального среднего направления спина. Тогда гамильтониан (7.1) можно представить в виде

$$H = H_0 + H_1 + H_2 , \qquad (7.2)$$

$$H_0 = \frac{N}{2} J_0 S^2 \xi - \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{f}} S_{\mathbf{f}}^z . \qquad (7.3)$$

Здесь N — число узлов; $J_0 = Jz$; $\varepsilon_0 = J_0 S\xi + h_e$;

$$\xi = \langle S^z \rangle / S , \qquad (7.4)$$

угловые скобки обозначают термодинамическое усреденение. Гамильтониан H_1 учитывает эффекты, обусловленные флуктуациями поперечных компонент спина, а H_2 — продольных.

Свободная энергия в приближении самосогласованного поля равна

$$F_0 = -T \ln \mathrm{Sp}\,(\exp(-\beta H_0)) =$$

$$= \frac{N}{2} J_0 S^2 \xi^2 - TN \ln \frac{\mathrm{sh}\left(\beta(S+1/2)\varepsilon_0\right)}{\mathrm{sh}\,(\beta\varepsilon_0/2)} . \qquad (7.5)$$

Уравнения движения для фурье-образа поперечных компонент спина $S_{\mathbf{k}}^x$ и $S_{\mathbf{k}}^y$ в ПХФ имеют вид

$$\frac{dS_{\mathbf{k}}^x}{dt} = \varepsilon_1(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^y , \qquad \frac{dS_{\mathbf{k}}^y}{dt} = -\varepsilon_2(\mathbf{k}) S_{\mathbf{k}}^x . \qquad (7.6)$$

Здесь введены обозначения: $\varepsilon_1(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \Delta J_0 \xi \Gamma_{\mathbf{k}}$; $\varepsilon_2(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 - J_0 \xi \Gamma_{\mathbf{k}}$, $\Gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{z} \sum_{\vec{\delta}} e^{i\mathbf{k}\vec{\delta}}$. В результате для фурье-компонент двухвременных функций Грина имеем

$$\langle\langle S_{\mathbf{k}}^x | S_{-\mathbf{k}}^x \rangle\rangle_\omega = S\xi\varepsilon_1(\mathbf{k}) / (\omega^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2) ;$$

$$\langle\langle S_{\mathbf{k}}^y | S_{-\mathbf{k}}^y \rangle\rangle_\omega = S\xi\varepsilon_2(\mathbf{k}) / (\omega^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2) , \qquad (7.7)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 = \varepsilon_1(\mathbf{k})\varepsilon_2(\mathbf{k}) . \qquad (7.8)$$

Откуда

$$\langle S_{\mathbf{k}}^x S_{-\mathbf{k}}^x \rangle = \frac{S\xi}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \varepsilon_1(\mathbf{k}) \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2T} ;$$

$$\langle S_{\mathbf{k}}^y S_{-\mathbf{k}}^y \rangle = \frac{S\xi}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \varepsilon_2(\mathbf{k}) \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2T} . \qquad (7.9)$$

Добавка к средней энергии системы, связанная с поперечными компонентами спина, равна

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \left(\langle S_{\mathbf{k}}^x S_{-\mathbf{k}}^x \rangle + \Delta \langle S_{\mathbf{k}}^y S_{-\mathbf{k}}^y \rangle \right) =$$

$$= -\frac{S\xi}{2} \sum \frac{J_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \left[\varepsilon_1(\mathbf{k}) + \varepsilon_2(\mathbf{k}) \right] \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2T} , \qquad (7.10)$$

где $J_{\mathbf{k}} = J_0 \Gamma_{\mathbf{k}}$.

Свободная энергия $F_\perp$ определяется соотношением

$$F_\perp = \sum_{\mathbf{k}} F_{\perp \mathbf{k}} ;$$

$$\frac{\partial F_{\perp \mathbf{k}}}{\partial J_{\mathbf{k}}} = -\frac{1}{2} \left(\langle S_{\mathbf{k}}^x S_{-\mathbf{k}}^x \rangle + \Delta \langle S_{\mathbf{k}}^y S_{-\mathbf{k}}^y \rangle \right) .$$

В результате с учетом соотношений (6.9) приходим к выражению

$$F_\perp = T \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\mathrm{sh}\,(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2)}{\mathrm{sh}\,(\beta\varepsilon_0/2)} . \qquad (7.11)$$

При интегрировании по $J_{\mathbf{k}}$ мы полагали, что ξ не зависит от $J_{\mathbf{k}}$. Но тогда соотношения (7.10) и (7.11) совместны только при условии, что полная свободная энергия F

$$F = F_0 + F_\perp = \frac{N}{2} J_0 S^2 \xi^2 +$$

$$+ T \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\mathrm{sh}\,(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2)}{\mathrm{sh}\,[\beta\varepsilon_0(S+1/2)]} \qquad (7.12)$$

минимальна по ξ. Поскольку мы учитываем на равных основаниях вклады от H_0 и спиновых волн, нам необходимо отказаться от соотношения (7.4), так как оно соответствует минимуму только F_0 . Будем определять ξ из условия минимума полной свободной энергии (7.12). При этом ξ уже не будет иметь смысла величины, пропорциональной средней намагниченности системы, а является просто параметром самосогласования. Впрочем физический смысл ξ достаточно прозрачен. Эта величина представляет собой «жесткость» (stiffnees) системы. Истинный параметр порядка η, характеризующий дальний порядок в системе, пропорционален производной от полной свободной энергии по полю h_e , сопряженному параметру порядка. Нормируя η так, чтобы в случае полного упорядочения $\eta = 1$, получаем

$$\eta = -\frac{1}{NS} \frac{\partial F}{\partial h_e} . \qquad (7.13)$$

В результате выражение для η и уравнение для ξ можно записать в виде

$$\eta = \frac{2S+1}{2S}\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_0(S+1/2)) - \\ - \frac{1}{4NS}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\left[2\varepsilon_0 + J_0 S(1+\Delta)\Gamma_{\mathbf{k}}\right]\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2)\,, \tag{7.14a}$$

$$\xi = \frac{2S+1}{2S}\frac{\varepsilon_0}{J_0 S\xi}\operatorname{cth}\left(\beta\varepsilon_0(S+1/2)\right) - \\ - \frac{1}{2NJ_0S^2\xi}\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2) - \frac{h_e\eta}{J_0 S\xi}\,. \tag{7.14б}$$

Как уже отмечалось в конце разд. 1, в отсутствие внешнего магнитного поля для низкоразмерных систем интеграл в правой части (7.14а) расходится. В действительности же в таких системах во всей области температур параметр порядка η должен быть равным нулю. Следуя Такахаши [72,81,82], будем рассматривать поле h_e не как произвольный внешний параметр, а как новый дополнительный параметр самосогласования, определяемый из условия тождественного обращения η в нуль. Эта идея, по-существу, эквивалентна предположению о том, что в низкоразмерных системах в спектре длинноволновых магнонов возникает щель Δ. Наличие щели есть формальное отражение того обстоятельства, что магноны с длиной волны, большей радиуса корреляции r_0, не могут существовать (или, по крайней мере, распространяться) в системах, где отсутствует дальний порядок. По порядку величины щель в спектре магнонов равна $\Delta \approx \approx J_0 a^2/r_0^2$ (a — параметр решетки). Таким образом, в основу метода уже с самого начала заложено предположение о существовании щели в спектре независимо от величины спина, знака обменного взаимодействия и размерности пространства. С использованием метода Такахаши для одномерного гейзенберговского антиферромагнетика в работе [88] была найдена щель, величина которой оказалась существенно меньше значения, полученного с помощью численных расчетов [22].

Формально появление щели или, что то же самое, фиктивного магнитного поля можно понять из следующих соображений. При точном вычислении статистической суммы Z соотношение $\sum_{\mathbf{f}} \mathbf{S}_{\mathbf{f}} = 0$ должно выполняться автоматически. При приближенном же рассмотрении это условие нарушается и его следует учитывать, вводя в выражение для Z лагранжев множитель, которым и является в данном случае поле h_e. Как уже отмечалось, величина этого поля определяется из условия равенства нулю параметра порядка, т. е. правой части уравнения (7.14а). В результате мы приходим к системе трансцендентных уравнений для определения двух самосогласованных параметров ξ и h_e:

$$0 = \frac{2S+1}{2S}\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_0(S+1/2)) - \\ - \frac{1}{4NS}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\left[2\varepsilon_0 + J_0 S\,\xi(1+\Delta)\Gamma_{\mathbf{k}}\right]\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2)\,, \tag{7.15a}$$

$$\xi = \frac{2S+1}{2S}\frac{\varepsilon_0}{J_0 S\xi}\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_0(S+1/2)) - \\ - \frac{1}{2NJ_0S^2\xi}\sum_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2)\,, \tag{7.15б}$$

а для средней энергии системы получаем выражение

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = -\frac{N}{2}J_0\xi^2S^2\,. \tag{7.16}$$

Как уже отмечалось, уравнение (7.15б) представляет собой условие минимума полной свободной энергии по ξ. Любопытно отметить, что выражение (7.15а) оказывается условием максимума полной свободной энергии по h_e. Если в (7.15) заменить $\operatorname{cth}(\beta\varepsilon_0(S+1/2))$ на единицу, то с точностью до обозначений полученные уравнения совпадут с предложенными Такахаши в [72,81,82].

Рассмотрим теперь связь между ПХФ, описанным в разд. 1.2, и приближением Такахаши. Сделаем это на уровне выражений (1.26) и (7.12) для свободной энергии. Прежде всего, последнее слагаемое в (1.26), отвечающее вкладу от продольных флуктуаций среднего значения спина, надо рассматривать как малую добавку и учитывать в дальнейшем по теории возмущений. Далее, учитывая, что нулевое приближение в (1.26) соответствует приближению ССП, следует сделать замену $B_s(\beta y) \to \langle S\rangle$. Теперь, чтобы получить систему уравнений (7.15) из модифицированной таким образом свободной энергии (1.26), мы должны минимизировать по $\langle S\rangle$ не только свободную энергию в приближении ССП, но и вклад в F от продольных спиновых волн. В результате $\langle S\rangle$ теряет смысл средней намагниченности и должна быть заменена на величину $\xi = \langle S\rangle/S$, которая соответствует жесткости спиновых волн и определяется уравнением, полученным минимизацией F по ξ. И, наконец, истинный параметр порядка задается соотношением (7.13), в котором, согласно теореме Мермина—Вагнера, следует положить левую часть равной нулю, что и приведет к уравнению (7.15б).

Из термодинамических величин наибольший интерес представляют средняя энергия, теплоемкость и восприимчивость. Мы уже выписывали

среднюю энергию в нулевом приближении (7. 14). Как будет видно ниже, добавление вклада от продольных флуктуаций приводит к лучшему согласию с известными точными результатами и результатами численных экспериментов. Известно, что коррелятор для продольных компонент спина в приближении ССП имеет вид [89]

$$\langle S_{\mathbf{k}}^{y} S_{-\mathbf{k}}^{y} \rangle = B_s'(y) \left(1 - \beta J_{\mathbf{k}} B_s'(y)\right)^{-1},$$

где $B_s'(y)$ — производная от функции Бриллюэна. Аргумент имеет смысл отношения эффективного поля к температуре. В рассматриваемом случае $y = \beta\varepsilon_0$. Соответственно добавка к средней энергии за счет продольных флуктуаций такова:

$$\Delta E_{\parallel} = -\frac{1}{2} B_s'(\beta\varepsilon_0) \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \left(1 - \beta J_{\mathbf{k}} B_s'(\beta\varepsilon_0)\right)^{-1} .$$

Что касается восприимчивости, то здесь нужно отметить следующее. «Поперечная» восприимчивость для модели Гейзенберга пропорциональна $\eta/\varepsilon_{\min}$, где $\varepsilon_{\min}$ — значение энергии в спектре спиновых волн при $k = 0$. В рассматриваемой схеме расчета мы полагали $\eta \equiv 0$. С другой стороны, $\varepsilon_{\min} \neq 0$ благодаря наличию магнитного поля h_e . В результате «поперечная» восприимчивость равна нулю. На это парадоксальное обстоятельство Такахаши обратил внимание в работе [72]. Однако по смыслу использованного приближения что окончательные выражения для термодинамических величин должны быть усреднены по направлениям оси квантования. Таким образом, восприимчивость оказывается изотропной и равной 1/3 от продольной ее части χ , т. е.

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} \chi_{\parallel} .$$

Продольная восприимчивость для ФМ может быть получена дифференцированием правой части (7.14а) по полю h_e . Что касается АФМ, то после унитарного преобразования, сводящего задачу к одной подрешетке, постоянное магнитное поле становится альтернирующим, а в спектре спиновых волн возникает две ветви: $\varepsilon_{\mathbf{k}} \to \varepsilon_{\mathbf{k}} \pm \mu h_e$; $\varepsilon_0 \to \varepsilon_0 \pm \mu h_e$ (где h_e — постоянное внешнее магнитное поле, μ — магнетон Бора). Продольная восприимчивость для АФМ может быть получена двукратным дифференцированием свободной энергии по полю h_e . Окончательное выражение для восприимчивости ФМ и АФМ формально имеет одинаковый вид, отличаясь только спектром спиновых возбуждений:

$$\chi = \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{3} \beta \left[-\mathrm{sh}^{-2}(\beta\varepsilon_0) + \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{sh}^{-2}(\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}/2) \right] . \qquad (7.17)$$

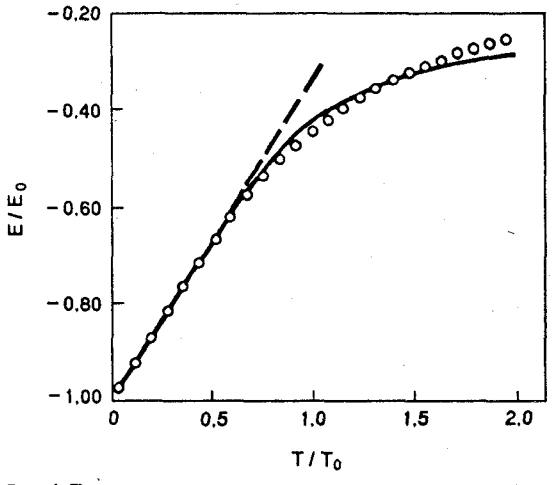

Рис. 1. Температурная зависимость средней энергии (отнесенной к одному узлу) для одномерного ферромагнетика с бесконечным спином: точный результат [90] (○); [84] (——); приближение Такахаши (– – –).

Прежде всего рассмотрим, к каким результатам приводит описанный выше метод в одномерном случае. Для $d = 1$ системами с непрерывной группой симметрии, допускающими точное аналитическое решение, являются XY-модель с $S = 1/2$ и гейзенберговская модель с $S = \infty$. Для сравнения полученных результатов при $S = \infty$ с точными [90] в формулах (7.15)–(7.17) следует сделать предельный переход $J \to 0$, $S \to \infty$, $JS^2 \to \mathrm{const}$, $h_e S \to \mathrm{const}$. Температурные зависимости средней энергии и теплоемкости в одномерном случае для $S \to \infty$ приведены на рис. 1, 2, где в качестве единиц измерения выбраны температура T_0 для соответствующего фазового перехода в ССП прибли-

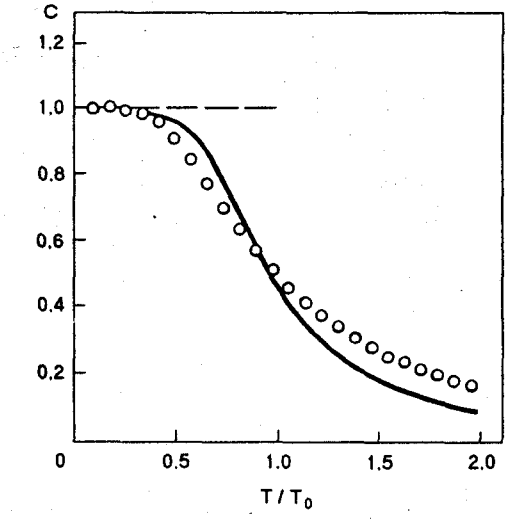

Рис. 2. Температурная зависимость теплоемкости (отнесенной к одному узлу) для одномерного ферромагнетика с бесконечным спином: точный результат [90] (○); [84] (——); приближение Такахаши (– – –).

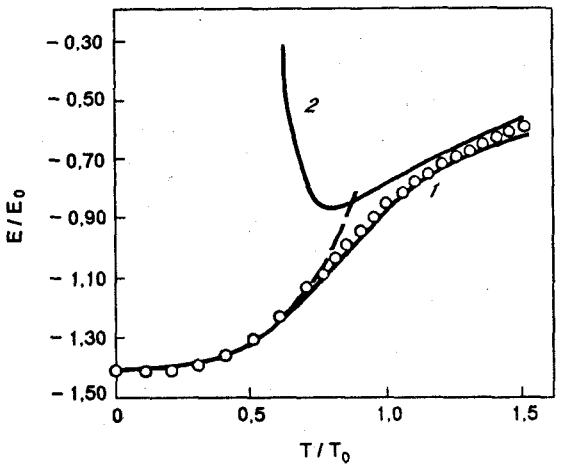

Рис. 3. Температурная зависимость средней энергии (отнесенной к одному узлу) для одномерного антиферромагнетика со спином $S = 1/2$ на решетке 4×4. Результаты получены: точной диагонализацией гамильтониана системы (○); [84] (*1*); методом высокотемпературных разложений (*2*); в приближении Такахаши (– – –).

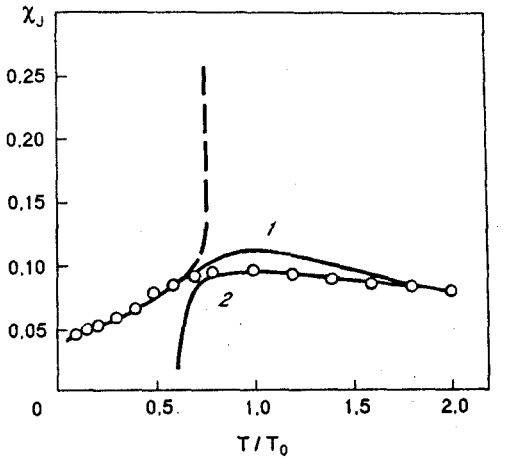

Рис. 5. Температурная зависимость восприимчивости (отнесенной к одному узлу) для одномерного антиферромагнетика со спином $S = 1/2$ на решетке 12×12. Результаты получены: квантовым методом Монте-Карло [75] (○); [84] (*1*); методом высокотемпературных разложений (*2*); в приближении Такахаши (– – –).

жении (для температуры) и энергия E_0 при $T = 0$ в этом же приближении (для энергии).

Для случая двумерного АФМ ($\Delta = -1$) со спином 1/2 на решетке размером 4×4 имеются результаты, полученные точной численной диагонализацией гамильтониана [72], а также результаты, полученные квантовым методом Монте-Карло (для решеток большего размера) [75,80]. На рис. 3 приведена температурная зависимость средней энергии, рассчитанная в рамках подхода [83,84], точный результат [72] и зависимости $E(T)$, полученные в приближении Такахаши и методом высокотемпературных разложений. Как видно из рис. 3, метод Такахаши становится неприменимым уже при $T/J \approx 0{,}7$. В то же время предложенный в [83,84] метод дает хорошее согласие во всей области температур, для которой известны точные результаты, а в области $T/J \approx 1{,}5$, полученные на его основе средние значения энергии очень близки к тем, которые дает метод высокотемпературных разложений. Для вторых производных свободной энергии (теплоемкости и восприимчивости) согласие, как видно из рис. 4, 5, является несколько худшим.

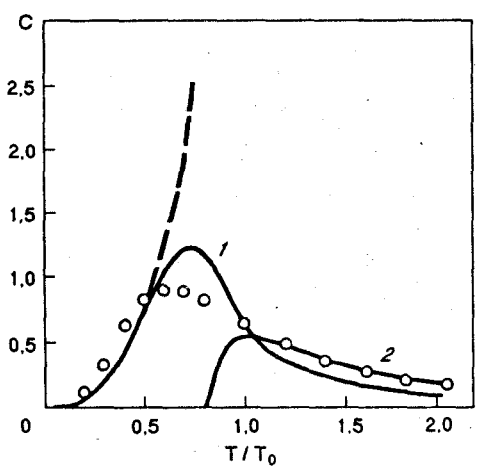

Рис. 4. Температурная зависимость теплоемкости (отнесенной к одному узлу) для одномерного антиферромагнетика со спином $S = 1/2$ на решетке 12×12. Результаты получены: квантовым методом Монте-Карло [75] (○); [84] (*1*); методом высокотемпературных разложений (*2*); в приближении Такахаши (– – –).

Следует отметить, что в основе метода Такахаши и, следовательно, работ [83,84] лежит предположение о существовании выделенного направления, по которому в дальнейшем необходимо произвести усреднение, в то время как отсутствие дальнего порядка с самого начала предполагает наличие изотропии системы.

7.2. Модель Гейзенберга в представлении спаренных бозонов Швингера

Приближенное описание магнитных систем, лишенное указанного недостатка, т. е. обладающее явной ротационной инвариантностью, было предложено Аровасом и Ауэрбахом (АА) [91,92]. Оно приводит к уравнениям, по структуре близким к тем, которые следуют из теории Такахаши [72,81,82].

Основная суть подхода, предложенного АА, состоит в следующем. В стандартном гейзенберговском гамильтониане (1.1) с взаимодействием ближайших соседей спиновые операторы представляются через два сорта швингеровских бозонов [93], операторы уничтожения которых будем обозначать a и b:

$$S^+ = a^+ b \ ; \qquad S^- = b^+ a \ ; \ S^z = (a^+ a - b^+ b)/2 \ .$$

В результате гамильтониан Гейзенберга можно переписать в виде

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} A_{ij}^+ A_{ij} + 2NJS^2$$

с дополнительным условием

$$2S = a^+ a + b^+ b \ ,$$

где $A_{ij} = a_i b_j + b_i a_j$. Затем делается SU(M) обобщение швингеровской бозонной алгебры на M бозонов $b_{\alpha i}$ в узле i ($\alpha = 1, \ldots, M$). Генераторы соответствующей алгебры задаются операторами

$$S_\beta^\alpha(i) = b_{\alpha i}^+ b_{\beta i} \ ,$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[S_\beta^\alpha(i), S_\sigma^\rho(j)] = \delta_{ij} \left(\delta_{\beta\rho} S_\sigma^\alpha(i) - \delta_{\alpha\sigma} S_\beta^\rho(i) \right)$$

и условию

$$\sum_{\alpha=1}^{M} S_\alpha^\alpha(i) = MS \ ,$$

где S должно быть равно целому числу, умноженному на $1/M$. Обобщенный гамильтониан для ФМ дается соотношением

$$H = -\frac{J}{M} \sum_{\langle i,j \rangle} S_\beta^\alpha(i) S_\alpha^\beta(j) \ .$$

Аналогично можно выписать соответствующий обобщенный гамильтониан и в АФМ случае. Дальнейшая теория основана на разложении по малому параметру $1/M$ и последующей экстраполяции на $M = 2$, что соответствует обычной модели Гейзенберга. Промежуточные уравнения и вытекающие из них результаты отличаются от полученных в [72] только численными множителями. Так, например, свободная энергия оказывается в два раза больше, а восприимчивость и динамическая корреляционная функции отличаются множителем 3/2 от соответствующих значений, найденных в приближении Такахаши. Конечно, такое отличие в численных множителях является серьезным недостатком метода. Причина подобного расхождения обусловлена экстраполяцией результатов теории возмущений по $1/M$ на случай $M = 2$. Однако безусловное преимущество приближения АА состоит в том, что выполнение теоремы Мермина—Вагнера в нем не «навязано руками» (как в методе Такахаши), а заложено с самого начала. Обобщение метода Ароваса и Ауэрбаха на случай размерности $d \geq 2$ сделано в работе [94].

Рассмотренные выше приближенные методы хорошо описывают поведение гейзенберговских магнетиков в низкотемпературной области и становятся неприменимыми при $T \propto J$.

7.3. Приближение Кондо и Ямадзи

После появления техники двухвременных и температурных функций Грина было предложено значительное число методов, позволяющих в принципе дать описание термодинамических характеристик различных систем при произвольных температурах. Однако попытки получить на их основе какие-либо количественные результаты в применении к низкоразмерным магнетикам оказались явно неудовлетворительными [95]. Единственным исключением является метод, предложенный Кондо и Ямадзи (КЯ) [96]. Первоначально этот метод был разработан для описания одномерных гейзенберговских систем со спином 1/2. Однако его без труда можно обобщить на двумерные и квазидвумерные системы [97]. Поскольку весь последующий вывод вплоть до анализа окончательных уравнений совершенно не чувствителен к знаку обменного интеграла J, в качестве исходного возьмем гамильтониан (7.1), в котором $\Delta = 1$.

Уравнение движения для фурье-компоненты «одночастичной функции» Грина $\langle\langle S_{\mathbf{f}}^z | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle_\omega$ имеет вид

$$\omega \langle\langle S_{\mathbf{f}}^z | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle =$$

$$= iJ \sum_{\vec{\delta}} \left(\langle\langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle - \langle\langle S_{\mathbf{f}}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^x | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle \right) .$$

Уравнения для $\langle\langle S_{\mathbf{f}}^x | S_{\mathbf{f}'}^x \rangle\rangle_\omega$ и $\langle\langle S_{\mathbf{f}}^y | S_{\mathbf{f}'}^y \rangle\rangle_\omega$ могут быть получены циклической перестановкой. Далее необходимо выписать уравнения для высших функций $\langle\langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle$ и $\langle\langle S_{\mathbf{f}}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^x | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle$. Выпишем одно из них:

$$\omega \langle\langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \left(\Delta_{\mathbf{f}+\delta,\mathbf{f}'} \langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^x \rangle - \Delta_{\mathbf{f},\mathbf{f}'} \langle S_{\mathbf{f}}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y \rangle \right) + iJ \sum_{\vec{\delta}'} \left(\langle\langle S_{\mathbf{f}}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}'}^z S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle - \right.$$

$$\left. - \langle\langle S_{\mathbf{f}}^z S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}'}^y S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^y | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle + \langle\langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^z S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}+\vec{\delta}'}^x | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle - \langle\langle S_{\mathbf{f}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}^x S_{\mathbf{f}+\vec{\delta}+\vec{\delta}'}^z | S_{\mathbf{f}'}^z \rangle\rangle \right) . \qquad (7.18)$$

На первый взгляд, естественно расцепить функции, входящие в правую часть уравнения (7.18), следующим образом:

$$\langle\langle S^y_{\mathbf{f}} S^z_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle = \Delta_{\vec{\delta},\vec{\delta}'} \langle\langle S^y_{\mathbf{f}} S^z_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle + (1 - \Delta_{\vec{\delta},\vec{\delta}'}) \langle\langle S^y_{\mathbf{f}} S^z_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}'} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle \to$$

$$\to -\frac{i}{2} \Delta_{\vec{\delta},\vec{\delta}'} \langle\langle S^y_{\mathbf{f}} S^x_{\mathbf{f}+\vec{\delta}} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle + (1 - \Delta_{\vec{\delta},\vec{\delta}'}) \langle S^y_{\mathbf{f}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}\rangle \langle\langle S^z_{\mathbf{f}} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle \,. \qquad (7.19)$$

Здесь учтено, что для спина 1/2 выполняется условие $S^z S^y = -\frac{i}{2} S^x$. Именно такой способ расцепления был использован в [98], однако он не привел к каким-либо физически интересным результатам.

В [96] был предложен нестандартный и весьма эффективный прием, состоящий в том, что в последнем слагаемом (7.19) среднее $\langle S^y_{\mathbf{f}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}\rangle$ заменялось перенормированной величиной $\alpha \langle S^y_{\mathbf{f}} S^y_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}\rangle$, а коэффициент α подбирался так, чтобы удовлетворялось кинематическое соотношение:

$$\langle S^2\rangle = S(S+1) = 3/4 \,. \qquad (7.20)$$

Отметим, что выполнение условия (7.20) в одномерном случае автоматически приводит к совпадению температурных зависимостей корреляционных функций с соответствующими выражениями, полученными непосредственным высокотемпературным разложением. Кроме того, в ферромагнитном случае ($J > 0$) (7.20) обеспечивает совпадение с точными результатами и при $T = 0$. Введем следующие обозначения ($\nu = x, y, z$):

$$c_1 = 4 \langle S^\nu_{\mathbf{f}} S^\nu_{\mathbf{f}+\vec{\delta}}\rangle \;;\; c_2 = 4 \langle S^\nu_{\mathbf{f}} S^\nu_{\mathbf{f}+\vec{\delta}+\vec{\delta}'}\rangle \,,$$

$$\vec{\delta} \neq \vec{\delta}' \;; \qquad \tilde{c}_i = \alpha c_i \,.$$

После расцепления высших функций Грина и перехода к преобразованию Фурье по координатам для функции

$$G(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{f}} \langle\langle S^z_{\mathbf{f}} | S^z_{\mathbf{f}'}\rangle\rangle \exp(i\mathbf{k}\mathbf{f})$$

получаем

$$G(\mathbf{k}) = \frac{Jc_1}{4\pi} \frac{\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}}{\omega^2 - \omega^2_{\mathbf{k}}} \,, \qquad \gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{\vec{\delta}} \exp(i\mathbf{k}\vec{\delta}) \,,$$

$$\omega^2_{\mathbf{k}} = \frac{J^2}{2} (\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}) \left[\Delta + \tilde{c}_1 (\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}})\right] \,, \qquad (7.21)$$

$$\Delta = 1 + \tilde{c}_2 (\gamma_0 - 1) - \tilde{c}_1 (\gamma_0 + 1)$$

и соответственно

$$\langle S^z_{\mathbf{k}} S^z_{-\mathbf{k}}\rangle = \frac{Jc_1}{4} g(\mathbf{k}) \,, \qquad g(\mathbf{k}) = \frac{\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \operatorname{cth} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2T} \,. \qquad (7.22)$$

В результате система уравнений для определения величин α, c_1 и c_2 принимает вид

$$1 = \frac{Jc_1}{N} \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) \,, \qquad c_1 = \frac{Jc_1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\gamma_0} g(\mathbf{k}) \,,$$

$$c_2 = \frac{Jc_1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma^2_{\mathbf{k}} - \gamma_0}{\gamma_0(\gamma_0 - 1)} g(\mathbf{k}) \,. \qquad (7.23)$$

Формально система (7.23) выглядит одинаково для ФМ и АФМ случаев. Однако конкретный анализ уравнений принципиально зависит от знака J. В частности, знак J определяет знак корреляционной функции c_1.

Система (7.23) подробно проанализирована для одномерного случая в работе [96], а для двумерного и квазидвумерного — в [97]. При $d = 1$ в АФМ случае, в отличие от ФМ, при нулевой температуре отсутствует дальний порядок. В то время как в двумерной системе на квадратной решетке при $T = 0$ дальний порядок существует всегда, независимо от знака J.

В области высоких температур система уравнений (7.23) может быть решена разложением по $1/T$. При этом все вычисления для ФМ и АФМ идентичны. В низкотемпературном пределе следует различать случаи $J < 0$ и $J > 0$. Для АФМ выражение (7.21) удобно представить в виде

$$\omega^2_{\mathbf{k}} = \frac{J^2}{2} (\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}) \left(\Delta_1 + |\tilde{c}_1| (\gamma_0 + \gamma_{\mathbf{k}})\right) \,, \qquad (7.24)$$

$$\Delta_1 = 1 + (\tilde{c}_2 - |\tilde{c}_1|)(\gamma_0 - 1) \,.$$

Легко проверить, что уравнениям самосогласования при $T \to 0$ невозможно удовлетворить, если не предполагать, что интегралы, входящие в правые части (7.23), расходятся по крайней мере логарифмически при малых k в ФМ и при $\mathbf{k} \to (\pi, \pi)$ в АФМ случае. Это означает, что соответственно должны обращаться в нуль величины Δ (при $\mathbf{k} \to 0$) или Δ_1 (при $\mathbf{k} \to (\pi, \pi)$). Функция $g(\mathbf{k})$ при $T \to 0$ принимает орнштейн-церниковский вид:

$$g(\mathbf{k}) \cong \frac{4T}{J^2 |\tilde{c}_1|} \frac{1}{\kappa^2 + k^2} \,, \qquad (7.25)$$

где для АФМ $\mathbf{k} \to (\pi, \pi) - \mathbf{k}$, а величина κ играет роль обратной корреляционной длины ($\kappa = (\Delta/4\tilde{c}_1)^{1/2}$ для ФМ и $\kappa = (\Delta_1/4|\tilde{c}_1|)^{1/2}$ для АФМ). Отметим также, что при не слишком малых (или близких к (π, π) в случае АФМ) значениях k закон дисперсии для элементарных возбуждений имеет обычный для упорядоченной фазы вид.

На рис. 6,*а* приведены температурные зависимости средней энергии на узел для двумерного АФМ, полученные методом, предложенным в [97], с помощью машинного моделирования [80] и прямым высокотемпературным разложением. Как видно из рис. 6,*а*, метод КЯ пригоден во всей области температур и, в отличие от метода Такахаши [72], дает очень хорошее описание средней энергии E при больших T. В то же время вычисленное с его помощью E при низких температурах совпадает с численными данными значительно хуже, чем E, полученное в рамках подхода Такахаши [72] или методом, предложенным в [83,84]. Так, для квадратного АФМ со спином 1/2 на решетке 4×4 значение энергии на узел при $T = 0$, полученное точной диагонализацией гамильтониана, составляет $E_0 = -0{,}702J$. Метод Такахаши дает для E_0 значение равное $-0{,}701J$, что практически не отличается от точного значения, в то время как метод, предложенный в [96], дает для E_0 значение $-0{,}63J$, так что относительная ошибка составляет $\propto 10\%$. Температурное поведение теплоемкости для квадратной решетки 12×12 приведено на рис. 6,*б*, где также представлены соответствующие кривые, полученные на основе высокотемпературного разложения.

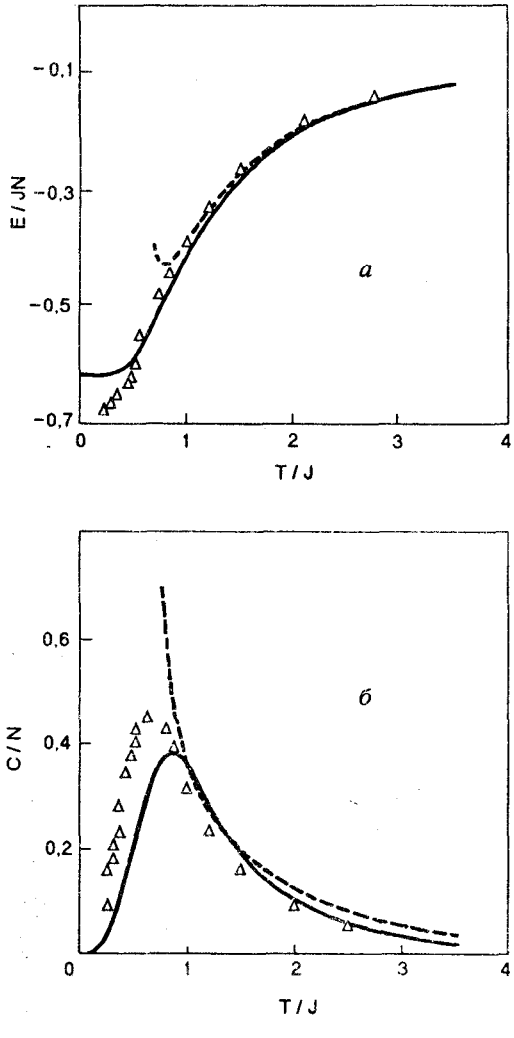

Рис. 6. Температурные зависимости средней энергии (*а*) и теплоемкости (*б*) (отнесенных к одному узлу) для двумерного антиферромагнетика: результат машинного эксперимента [80] (△); [97] (—); метод высокотемпературных разложений (– – –).

Схема КЯ может быть применена также и к другим типам плоских решеток. Наибольший интерес здесь представляет АФМ треугольная решетка, поскольку, согласно предположению, высказанному Фазекашем и Андерсоном [99], в треугольной решетке основное состояние принципиально отлично от такового в квадратной решетке. Согласно [99], у треугольного АФМ есть определенное сходство с основным состоянием одномерной АФМ цепочки в том смысле, что основное состояние в обеих системах является синглетным и невырожденным, а корреляционные радиусы при $T \to 0$ остаются конечными. Поскольку утверждение Фазекаша и Андерсона опирается по существу на догадку, не имеющую строгого обоснования, представляет интерес вновь рассмотреть эту задачу с помощью метода КЯ. Соответствующий расчет может быть выполнен с использованием полученных выше результатов.

Для треугольной решетки величины α, c_1 и c_2 по-прежнему определяются системой уравнений (7.23), в которой $\gamma_0 = 6$, а входящую в $g(\mathbf{k})$ величину ω_k следует представить в виде

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{J^2}{2}(\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}})\left[\Delta_2 + \frac{1}{2}|\tilde{c}_1|(\gamma_0 + 2\gamma_{\mathbf{k}})\right],$$

$$\Delta_2 = 1 + 5\tilde{c}_2 - 2|\tilde{c}_1| .$$

При $T \to 0$ для направлений k, близких к $(2\pi/3, 2\pi/3)$, функция $g(k)$ также имеет орнштейн-церниковский вид (7.25), где $\kappa = (\Delta_2/3|\tilde{c}_1|)^{1/2}$. Поведение корреляционных радиусов $r_c = 1/\kappa$, полученных в результате численного решения системы (7.23), иллюстрируется рис. 7, на котором приведены температурные зависимости r_c для квадратной и треугольной решеток. Видно, что при $T \to 0$ для треугольной решетки r_c стремится к конечному пределу, в то время

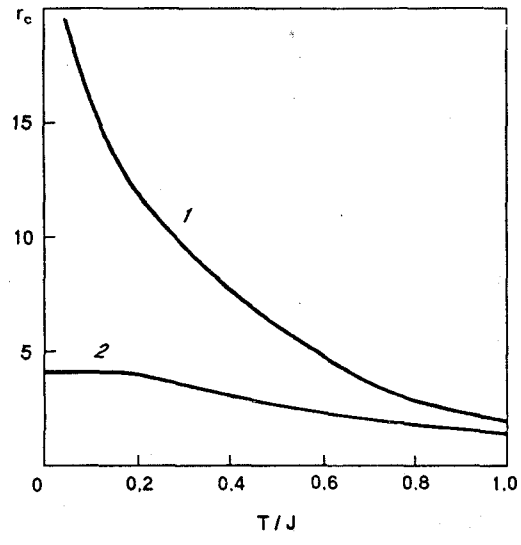

Рис. 7. Температурная зависимость корреляционного радиуса для квадратной (*1*) и треугольной (*2*) решеток.

как для квадратной решетки r_c обращается в бесконечность. Таким образом, метод КЯ правильно воспроизводит результат работы [99] и, следовательно, пригоден для описания магнитных систем, находящихся в RVB-состоянии.

Метод КЯ принципиально не содержит ограничений на размерность пространства и может быть использован для описания неупорядоченной фазы в системе любой размерности. В случае $d = 3$ при соответствующей модификации он может быть распространен также и на описание упорядоченной фазы [97]. Во всей области существования упорядоченной фазы обратная корреляционная длина κ равна нулю. Это означает, что в соответствующей области температур тождественно обращается в нуль величина Δ для ФМ (Δ_1 для АФМ). Кроме того, наличие дальнего порядка в системе формально можно учесть, добавляя к правой части выражения для $g(\mathbf{k})$ (7.22) δ-функционное слагаемое, коэффициент при котором пропорционален квадрату параметра порядка η. Это приведет к тому, что одно из уравнений системы (7.23) перейдет в выражение для определения η. Анализ трехмерного случая при произвольных значениях внутриплоскостного J и межплоскостного J_1 обменных интегралов весьма громоздок. Выражения упрощаются в изотропном ($J = J_1$) или предельно анизотропном ($J >> J_1$) случаях. Упрощение уравнений в последнем случае связано с тем, что можно опустить слагаемые, содержащие произведение межплоскостных корреляционных функций и J_1. При этом система уравнений в неупорядоченной фазе приобретает вид

$$1 = \frac{J}{N}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\gamma_0} h(\mathbf{k}) ,$$

$$1 = \Delta + J|\tilde{c}_1| \left[2\lambda - \frac{1}{N\gamma_0}\sum_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}} - 1)(\gamma_0 + \gamma_{\mathbf{k}})h(\mathbf{k})\right] ,$$

где

$$h(\mathbf{k}) = \frac{\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \operatorname{cth} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2T} ;$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{J^2}{2}(\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}})\left(\Delta + |\tilde{c}_1|\varepsilon(\mathbf{k})\right) ;$$

$$\Delta = 1 - |\tilde{c}_1|(3 + 2\lambda) + 3\tilde{c}_2 ;$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = (\gamma_0 + \gamma_{\mathbf{k}}) + 2\lambda(1 + \cos k_z); \quad \lambda = J_1/J \qquad (7.26).$$

Описание упорядоченной фазы значительно проще. В этом случае проблема фактически сводится к решению одного уравнения, определяющего $\tilde{c}_1$:

$$1 + J|\tilde{c}_1| \left[2\lambda - \frac{1}{N\gamma_0}\sum_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}} - 1)(\gamma_0 + \gamma_{\mathbf{k}})h_1(\mathbf{k})\right] .$$

Здесь

$$h_1(\mathbf{k}) = \frac{\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}}}{\Omega_{\mathbf{k}}} \operatorname{cth} \frac{\Omega_{\mathbf{k}}}{2T} ;$$

$$\Omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{J^2}{2}|\tilde{c}_1|(\gamma_0 - \gamma_{\mathbf{k}})\varepsilon(\mathbf{k}) ,$$

а величина $\varepsilon(\mathbf{k})$ определяется соотношением (7.26). Как уже отмечалось выше, одно из оставшихся уравнений переходит в выражение для параметра порядка η

$$\tilde{\eta} = |\tilde{c}_1| \left(1 + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\gamma_0} h_1(\mathbf{k})\right) , \qquad \tilde{\eta} = \alpha\eta ,$$

а второе дает соотношение, определяющее параметр расцепления α:

$$\alpha = \tilde{\eta}/3 + \frac{|\tilde{c}_1|}{N}\sum_{\mathbf{k}} h_1(\mathbf{k}) .$$

Температурные зависимости параметра порядка и теплоемкости, найденные на основе этих уравнений, для $J_1/J = 0{,}1$ приведены на рис. 8, 9. В заключение отметим, что при формальном обобщении как метода КЯ, так и метода Такахаши на трехмерный случай механизм перехода из упоря-

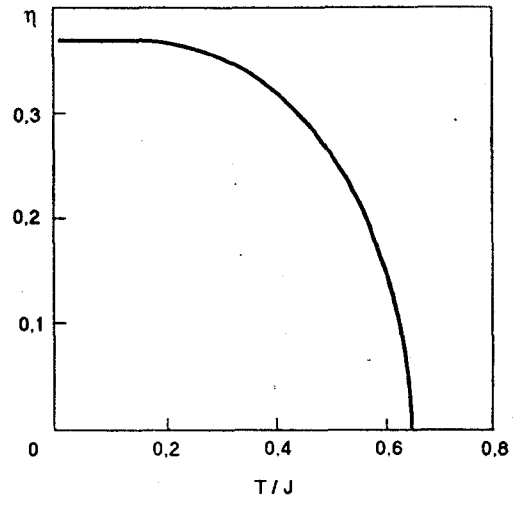

Рис. 8. Температурная зависимость параметра порядка для квазидвумерной ($J_1/J = 0{,}1$) квадратной решетки.

доченного состояния в неупорядоченное имеет такой же характер, как в сферической модели или в идеальном Бозе-газе и, к сожалению, не учитывает флуктуационных эффектов. Таким образом, при приближении к точке перехода со стороны низких температур система как бы «не чувствует» наступление перехода.

В заключение отметим, что изложенный выше метод КЯ, непосредственно применим только для систем со спином 1/2. В случае $S > 1/2$ мы сталкиваемся с проблемой аппроксимации «трехточечных» функций Грина вида $\langle\langle Q_f^{\alpha\beta} S_{f'}^{\gamma} | S_{f''}^{\delta} \rangle\rangle$, где $Q_f^{\alpha\beta}$ — спиновый квадрупольный момент, равный

$$Q_f^{\alpha\beta} = S_f^{\alpha} S_f^{\beta} - \frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} S(S+1) \ .$$

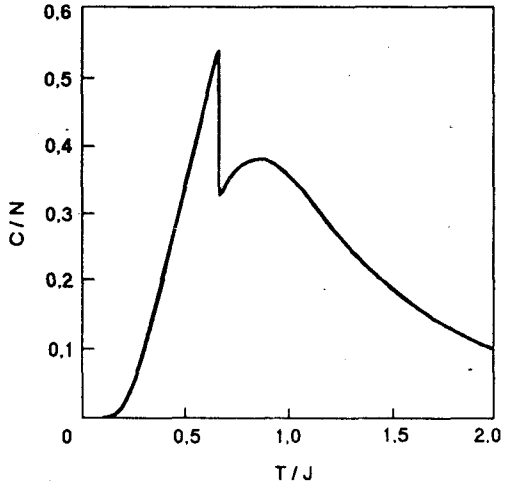

Рис. 9. Температурная зависимость теплоемкости (отнесенной к одному узлу) для квазидвумерной ($J_1/J = 0{,}1$) квадратной решетки.

Другим подходом, пригодным для описания гейзенберговских АФМ со спином 1/2, является метод, основанный на преобразовании Вигнера—Йордана [93] и его двумерном обобщении [100,101].

7.4. Представление Вигнера — Йордана и его двумерный аналог в применении к модели Гейзенберга

Рассмотрим вначале одномерный АФМ со спином 1/2. Детальный анализ этой системы, основанный на преобразовании Вигнера—Йордана (ВЙ), был дан Булаевским в работе [102]. Согласно этому преобразованию, спиновые операторы в этом представлении выражаются через следующие комбинации фермиевских операторов a и a^+:

$$S_i^+ = a_i^+ Q_i \ ; \quad S_i^- = Q_i a_i \ ; \quad S_i^z = a_i^+ a_i - \frac{1}{2} \ ,$$

где

$$Q_i = Q_i^+ = Q_i^{-1} = \exp\left(i\pi \sum_{j<i} a_j^+ a_j \right) \ .$$

В результате исходный гамильтониан Гейзенберга принимает вид

$$H = J \sum_i a_i^+ a_{i+1} +$$

$$+ J \sum_i \left(a_i^+ a_i - \frac{1}{2} \right) \left(a_{i+1}^+ a_{i+1} - \frac{1}{2} \right) \ . \qquad (7.27)$$

Используя для взаимодействующих ВЙ фермионов приближение Хартри—Фока, гамильтониан (7.27) можно переписать следующим образом:

$$H = J \sum_i a_i^+ a_{i+1} + 2J\Delta \sum_i a_i^+ a_{i+1} + NJ\Delta^2 \ . \qquad (7.28)$$

Здесь $\Delta = \langle a_i a_{i+1} \rangle$ — параметр согласования, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta = -\frac{1}{N} \sum_k n_F(\varepsilon_k) \cos kb \ , \ \varepsilon_k = J(1 + 2\Delta) \cos kb \ ,$$

n_F — фермиевская функция распределения, b — параметр решетки. Из (7.28) следует, что энергия основного состояния $E_0 = -J/\pi(1 - 1/\pi) \simeq \simeq -0{,}4196J$. Это значение несколько превышает результат точного расчета, полученный с помощью анзаца Бете, согласно которому $E_0 = = (1/4 - \ln 2) = -0{,}4431J$. Несмотря на столь хорошее совпадение в энергии основного состояния, для корреляционной функции при $T = 0$ имеем выражение

$$\langle S_0^z S_n^z \rangle = -\frac{\sin^2(\pi n/2)}{(\pi n)^2} ,$$

т. е. корреляционная функция обращается в нуль при четных n и убывает как $1/n^2$ при нечетных n. Такое поведение $\langle S_0^z S_n^z \rangle$ существенно отличается от задаваемого соотношением (5.7). Для теплоемкости при низких температурах из (7.28) имеем [102]

$$C \simeq \frac{\pi T}{3(1+2/\pi)} . \qquad (7.29)$$

Численный коэффициент в (7.29) на 4% отличается от точного значения 2/3. В случае высоких температур

$$C \simeq 1/(8T^2) ,$$

что составляет 2/3 от результата, полученного с помощью высокотемпературных разложений.

Как уже отмечалось выше, преобразование ВЙ можно обобщить на двумерный случай [100,101]. Это осуществляется с помощью подстановки

$$S_{\mathrm{f}}^- = \exp(i\varphi_{\mathrm{f}}) a_{\mathrm{f}} \; ; \; S_{\mathrm{f}}^+ = a_{\mathrm{f}}^+ \exp(-i\varphi_{\mathrm{f}}) \; ; \qquad (7.30)$$

$$S_{\mathrm{f}}^z = a_{\mathrm{f}}^+ a_{\mathrm{f}} - 1/2 \; ; \qquad (7.31)$$

$$\varphi_{\mathrm{f}} = \sum_{\mathrm{f}' \neq \mathrm{f}} a_{\mathrm{f}'}^+ a_{\mathrm{f}'} \operatorname{Im} \ln(\tau_{\mathrm{f}'} - \tau_{\mathrm{f}}) , \qquad (7.32)$$

где $\tau_{\mathrm{f}} = x_{\mathrm{f}} + iy_{\mathrm{f}}$ — комплексная координата спина, находящегося в узле f. В результате этой подстановки гамильтониан Гейзенберга для двумерной системы принимает вид

$$H = J \sum_{\mathrm{f},\vec{\delta}} a_{\mathrm{f}}^+ \exp\left[i(\varphi_{\mathrm{f}} - \varphi_{\mathrm{f}+\vec{\delta}})\right] a_{\mathrm{f}+\vec{\delta}} +$$

$$+ J \sum_{\mathrm{f},\vec{\delta}} \left(a_{\mathrm{f}}^+ a_{\mathrm{f}} - \frac{1}{2}\right)\left(a_{\mathrm{f}+\vec{\delta}}^+ a_{\mathrm{f}+\vec{\delta}} - \frac{1}{2}\right) . \qquad (7.33)$$

В отличие от одномерного случая, в рассматриваемой ситуации фазовый множитель в первом слагаемом (7.33) не исчезает и, как будет видно ниже, играет важную роль в определении спектра ВЙ фермионов. Гамильтонианы структуры, аналогичной (7.33), возникают при исследовании дробного квантового эффекта Холла и, как показано в [103], с достаточно хорошей точностью разность фаз в (7.33) можно заменить ее средним значением. В результате $\exp(i\langle\varphi_{\mathrm{f}} - \varphi_{\mathrm{f}+\vec{\delta}}\rangle)$ будет альтернировать и принимать соответственно значения 1 и $\exp(\pm i\pi)$ (см. рис. 10). Второе слагаемое в (7.33) так же, как и в одномерном случае, будем рассматривать в приближении Хартри—Фока. Вводя параметр самосогласования $\Delta = \langle a_{\mathrm{f}} a_{\mathrm{f}+\vec{\delta}}^+ \rangle$ и переходя к двум подрешеткам, операторы уничтожения в которых будем обозначать соответственно a_{f} и b_{f}, приходим к выражению [104,105]

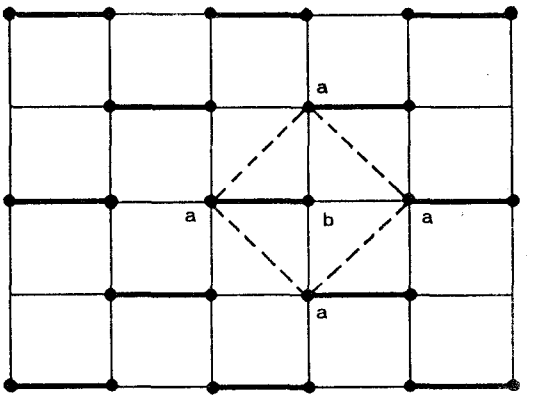

Рис. 10. Распределение значений фазового множителя в приближении ССП для гамильтониана (7.33). Жирной линии соответствует значение фазового множителя $\exp(i\pi)$, тонкой линии — 1. Штриховые линии выделяют элементарную ячейку.

$$H = 2NJ\Delta^2 + \frac{J}{2}\left(1 + 2\Delta\right) \times$$

$$\times \sum_{\mathrm{f}} \left[a_{\mathrm{f}}^+ \left(b_{\mathrm{f}-\delta_x} - b_{\mathrm{f}+\delta_x} + b_{\mathrm{f}-\delta_y} - b_{\mathrm{f}+\delta_y}\right) + \text{э.с.}\right] . \qquad (7.34)$$

Гамильтониан (7.34) легко диагонализуется, и энергетический спектр имеет вид

$$\varepsilon(\mathrm{k}) = \pm J(1 + 2\Delta)\left(\sin^2 k_x + \cos^2 k_y\right)^{1/2} . \qquad (7.35)$$

Параметр самосогласования Δ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(1 + 2\Delta) = \frac{1}{4NJ} \sum_{\mathrm{k}} \varepsilon(\mathrm{k}) \operatorname{th} \frac{\varepsilon(\mathrm{k})}{2T} . \qquad (7.36)$$

Это приближение приводит к удивительно хорошему согласию для теплоемкости. По мнению автора работ [104,105], столь хорошее согласие обязано взаимной компенсации ошибок, связанных с пренебрежением флуктуациями фазы и с использованием приближения хаотических фаз при учете четырехфермионного взаимодействия. Следует отметить, однако, что вычисление восприимчивости χ в данном приближении приводит не к столь оптимистичным результатам. В частности, при низких температурах χ ведет себя линейно по T, причем $\chi(0) = 0$.

Заключение

К сожалению, недостаточный объем настоящей публикации вынуждает нас ограничить рассмотрение лишь небольшой частью весьма интересных и важных результатов, относящихся к проблеме низкоразмерных магнетиков. Мы не обсуждаем здесь, в частности, различные анизотропные модели, а также системы более общего типа (например, модель Хаббарда, которая в предельном случае описывается гамильтонианом Гейзенберга). Хотя из изложенных подходов в целом возникает достаточно стройная картина, тем не менее ни один из них не дает полностью адекватного описания низкоразмерных магнитных систем. Даже в случае модели Гейзенберга ни один из предложенных приближенных методов не дает универсальных решений, позволяющих описать широкий спектр характеристик низкоразмерных систем. Каждый из них наряду с известными преимуществами обладает также и очевидными ограничениями. Кроме того, ясно, что большое разнообразие предлагаемых описаний означает скорее всего то, что ни одно из них не является вполне удовлетворительным. Основной недостаток, присущий всем описанным выше подходам, состоит в том, что они не выдерживают никакой критики при попытке применить их к анализу трехмерных задач. Для примера сошлемся на то, что экспериментальные исследования [106], равно как и точно решаемые модели (например, квазиодномерная модель Изинга), указывают на наличие резкого пика теплоемкости в точке фазового перехода, в то время как ни один из приближенных методов не позволяет предсказать этот результат. Кроме того, отметим, что, несмотря на значительный прогресс в теории низкоразмерных магнитных систем, остается еще много белых пятен. Это не удивительно хотя бы потому, что сама по себе модель Гейзенберга довольно сложна, и ее разработка на сегодняшний день никоим образом не может считаться законченной, тем более что даже для сравнительно простой и глубже изученной модели Изинга еще и в настоящее время удается получить новые интересные результаты [107]. Таким образом, ясно, что теория гейзенберговских магнетиков является живой и активно развивающейся областью физики твердого тела и физики низких температур с далеко не исчерпанными возможностями получения принципиально важных результатов и предсказания новых эффектов. Мы надеемся, что предпринятая в настоящем обзоре попытка систематизации современных концепций, используемых для описания низкоразмерных магнитных систем, окажется полезным вкладом в общие усилия, направленные на решение затронутых здесь проблем.

Авторы выражают благодарность К. А. Чишко за многочисленные полезные обсуждения.

Настоящая работа частично финансирована Международным научным фондом (ISF), грант № U9N000 и Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий в рамках программы «Фундаментальные исследования» (проект 2.2/248).

Приложение 1

Рассмотрим уравнение Шредингера системы с гамильтонианом (1.8)

$$i\frac{d\Psi}{dt} = -\,\mathrm{h}S\Psi\ , \qquad (\Pi 1.1)$$

в котором h задается выражением (1.13). Сделаем в (П1.1) подстановку

$$\Psi \Rightarrow \exp(i\alpha S_z)\exp(i\gamma S_y)\Psi\ .$$

Коэффициенты α и γ подберем из условия, чтобы при компонентах спина S_y и S_x слагаемые, пропорциональные r, обратились в нуль. После простых, но несколько громоздких преобразований получаем

$$\alpha = -\varphi\ ; \qquad \gamma = -\theta\ ,$$

а уравнение Шредингера примет вид (П1.1), в котором h заменено эффективным полем R. Компоненты вектора R имеют вид

$$\mathbf{R} = \{A_1 - \dot{\varphi}\sin\theta, A_2 + \dot{\theta}, -r + \dot{\varphi}\cos\theta - \mathrm{h}_1\vec{\Omega}\}\ ; \qquad (\Pi 1.2)$$

$$A_1 = h_{1z}\sin\theta - \cos\theta\,(h_{1x}\cos\varphi + h_{1y}\sin\varphi)\ ;$$

$$A_2 = h_{1x}\sin\varphi - h_{1y}\cos\varphi\ .$$

Выполним дополнительный поворот системы координат, направляя ось z вдоль поля R. В результате, учитывая неравенство

$$r >> \dot{\varphi}, \dot{\theta}, |\mathrm{h}_1| \qquad (\Pi 1.3)$$

и пренебрегая вторыми производными по времени от φ и θ, уравнение Шредингера приводим к виду

$$i\frac{d\Psi}{dt} = -\,|\mathbf{R}|\,S_z\Psi\ ,$$

$$|\mathbf{R}| = \Big[(A_1 - \dot{\varphi}\sin\theta)^2 +$$

$$+ (A_2 + \dot{\theta})^2 + (r - \dot{\varphi}\cos\theta + \mathrm{h}_1\vec{\Omega})^2\Big]^{1/2}\ .$$

Воспользовавшись явными выражениями для A_1 и A_2, приходим к следующим соотношениям:

$$A_1^2 + A_2^2 = h_1^2 - (\mathrm{h}_1\vec{\Omega})^2\ ;$$

$$\dot{\theta}A_2 - A_1\dot{\varphi}\sin\theta = \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t}(\mathbf{h}_1 \times \vec{\Omega}) \ . \qquad (\Pi 1.4)$$

Наконец, учитывая (П1.3) и (П1.4), окончательно для $|\mathbf{R}|$ получаем

$$|\mathbf{R}| = r + \left[1 + \mathbf{h}_1\vec{\Omega}/r - \dot{\varphi}\cos\theta/r + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} - \mathbf{h}_1 \times \vec{\Omega}\right)^2\right] . \qquad (\Pi 1.5)$$

Приложение 2

Для упрощения проводимых ниже выкладок ограничимся случаем равного нулю внешнего магнитного поля.

Замена (2.18) приводит к тому, что действие (2.15) получает добавку

$$\delta A = \frac{1}{4z}\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{f},\vec{\delta}}(\vec{\xi}_\mathbf{f} + \vec{\xi}_{\mathbf{f}+\vec{\delta}})^2 - \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{f},\mathbf{f}'} K_{\mathbf{f}\mathbf{f}'}\vec{\xi}_{\mathbf{f}'}\langle \mathbf{S}_\mathbf{f}\rangle \ . \qquad (\Pi 2.1)$$

Угловые скобки в этом выражении обозначают усреднение с гамильтонианом

$$H_\mathbf{f} = -JzS\epsilon_\mathbf{f}\vec{\Omega}_\mathbf{f}\mathbf{S}_\mathbf{f} \ . \qquad (\Pi 2.2)$$

Легко убедиться, что составляющая $\vec{\xi}_\mathbf{f}$, параллельная $\vec{\Omega}_\mathbf{f}$, приводит к вкладу в статсумму, пропорциональному B'_s, который при $T \to 0$ несуществен. Поэтому ниже будем полагать $\vec{\xi}_\mathbf{f}\vec{\Omega}_\mathbf{f} = 0$. В системе координат, связанной с вектором $\vec{\Omega}_\mathbf{f}$, выражение (П2.2) имеет вид

$$H_\mathbf{f} = -\epsilon_\mathbf{f}\left[(JzS + \dot{\varphi}_\mathbf{f}\cos\theta_\mathbf{f})S^z_\mathbf{f} + \dot{\theta}_\mathbf{f}S^y_\mathbf{f} - \dot{\varphi}_\mathbf{f}\sin\theta_\mathbf{f}S^x_\mathbf{f}\right] .$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по τ. Сделаем в (П2.1) преобразование Фурье по координатам и перейдем к мацубаровским частотам. В результате

$$\delta A = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\omega}(1 + \Gamma_\mathbf{k})|\vec{\xi}(\mathbf{k},\omega)|^2 - \sum_{\mathbf{k},\omega}\sqrt{J(\mathbf{k})}\,\langle \mathbf{S}(\mathbf{k},\omega)\rangle\,\vec{\xi}(\mathbf{k},\omega) \ ,$$

где $J(\mathbf{k}) = Jz\Gamma_\mathbf{k}$. После выполнения в статистической сумме интегрирования по переменным $\vec{\xi}(\mathbf{k},\omega)$ действие (2.15) получит добавку вида

$$\delta A_{AFM} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\omega}\left[J(\mathbf{k})/(1 + \Gamma_\mathbf{k})\right]|\langle \mathbf{S}(\mathbf{k},\omega)\rangle|^2 \ . \qquad (\Pi 2.3)$$

В предположении, что $\langle \mathbf{S}_\mathbf{f}\rangle$ является медленно меняющейся функцией координат, в сумме по $\mathbf{k}$ (П2.3) достаточно ограничиться слагаемым с $\mathbf{k}$, равным нулю. Тогда (П2.3) перепишется в виде

$$\delta A_{AFM} = -\frac{Jz}{4}\int_0^\beta d\tau \sum_\mathbf{f}\langle S^+_\mathbf{f}\rangle\langle S^-_\mathbf{f}\rangle \ . \qquad (\Pi 2.4)$$

Уравнения движения для $S^\pm$ имеют вид

$$-dS^+_\mathbf{f}/d\tau = \epsilon_\mathbf{f}JzSS^+_\mathbf{f} + h^-_\mathbf{f}S^z_\mathbf{f} \ ;$$
$$dS^-_\mathbf{f}/d\tau = \epsilon_\mathbf{f}JzSS^-_\mathbf{f} + h^+_\mathbf{f}S^z_\mathbf{f} \ . \qquad (\Pi 2.5)$$

Здесь $h^\pm_\mathbf{f} = \epsilon_\mathbf{f}(\dot{\theta}_\mathbf{f} \pm i\dot{\varphi}_\mathbf{f}\sin\theta_\mathbf{f})$. Учтем, что $h^\pm_\mathbf{f}$ являются медленно меняющимися функциями τ. Это дает возможность в усредненных уравнениях (П2.5) пренебречь $\langle dS^\pm_\mathbf{f}/d\tau\rangle$. В результате для $\langle S^\pm_\mathbf{f}\rangle$ получаем

$$\langle S^\pm_\mathbf{f}\rangle = -\epsilon_\mathbf{f}h^\pm_\mathbf{f}\langle S^z_\mathbf{f}\rangle/(JzS) \ . \qquad (\Pi 2.6)$$

Поскольку при $T \to 0$ среднее $\langle S^z\rangle = S$, (П2.6) можно переписать в виде

$$\langle S^\pm_\mathbf{f}\rangle = -\epsilon_\mathbf{f}h^\pm_\mathbf{f}/(Jz) \ . \qquad (\Pi 2.7)$$

Подставляя (П2.7) в (П2.4), окончательно для δA_{AFM} получаем

$$\delta A_{AFM} = -\frac{1}{4|J|z}\int_0^\beta d\tau \sum_\mathbf{f}(\partial\vec{\Omega}_\mathbf{f}/\partial\tau)^2 \ .$$

Полученная добавка в два раза уменьшает коэффициент при $(\partial\vec{\Omega}_\mathbf{f}/\partial\tau)^2$ в соотношении (2.17), что в результате приводит к правильному выражению для скорости спиновых волн.

Приложение 3

Рассмотрим гейзенберговский АФМ на периодической линейной цепочке длиной N (величина J положена равной единице):

$$H = \sum_{n=1}^N \mathbf{S}_n\mathbf{S}_{n+1} \ . \qquad (\Pi 3.1)$$

Предположим, что основное состояние ψ_0 системы, описываемой гамильтонианом (П3.1), невырождено. Тогда ψ_0 изотропна, трансляционно инвариантна и соответствует суммарному спину, равному нулю, т. е.

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{S}_n\psi_0 = 0 \ . \qquad (\Pi 3.2)$$

Мы хотим доказать, что в системе имеются возбуждения с энергией $O(1/N)$. Доказательство состоит в построении состояния ψ_1, ортогонального основному и соответствующего низкоэнергетическим возбуждениям, т. е. удовлетворяющего соотношениям

$$\langle\psi_1(H-E_0)\psi_1\rangle = O(1/N)\ ;\ \langle\psi_1\psi_0\rangle = 0\ . \qquad (\text{П3.3})$$

Введем оператор магнитного дипольного момента

$$\mathrm{D} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{S}_n$$

и оператор сдвига $\hat{T}$:

$$\hat{T}^+\mathrm{S}_n\hat{T} = \mathrm{S}_{n+1}\ ;\ \hat{T}^+\mathrm{S}_N\hat{T} = \mathrm{S}_1\ . \qquad (\text{П3.4})$$

В силу трансляционной инвариантности, $\hat{T}\psi_0 = \psi_0$. Волновую функцию ψ_1 построим с помощью унитарного преобразования

$$\psi_1 = U\psi_0\ ; \qquad U = \exp(2i\pi D^z)\ .$$

Прежде всего покажем, что для систем с полуцелым значением спина она ортогональна ψ_0:

$$\langle\psi_1\psi_0\rangle = \langle\psi_0 U\psi_0\rangle = \langle\psi_0\hat{T}^+U\hat{T}\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\sum_{n=1}^{N} n\hat{T}^+S_n^z\hat{T}\right)\psi_0\rangle\ . \qquad (\text{П3.5})$$

Используя равенства (П3.4), получаем

$$\langle\psi_1\psi_0\rangle = \langle\psi_0\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\left(\sum_{n=1}^{N-1} nS_{n+1}^z + NS_1^z\right)\right]\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0 U\exp\left(-\frac{2\pi i}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n^z\right)\exp(2\pi iS_1^z)\psi_0\rangle\ .$$

Учитывая условие (П3.2), имеем

$$\langle\psi_1\psi_0\rangle = \langle\psi_0 U\exp(2\pi iS_1^z)\psi_0\rangle\ .$$

Для полуцелых значений спина $\exp(2\pi iS_1^z) = -1$. В этом случае скалярное произведение $\langle\psi_1\psi_0\rangle$ равно самому себе с противоположным знаком, т. е. нулю. Таким образом, ψ_1 ортогональна ψ_0.

Найдем теперь среднее значение гамильтониана с функцией ψ_1:

$$\langle\psi_1(H-E_0)\psi_1\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\cos(2\pi/N)-1\right]\sum_n\langle\psi_0 S_n^+S_{n+1}^-\psi_0\rangle + \text{э.с.}\right\}\ .$$

Здесь E_0 — энергия основного состояния. Из изотропии ψ_0 следует соотношение

$$\langle\psi_0 S_n^+S_{n+1}^-\psi_0\rangle = \langle\psi_0 S_n^-S_{n+1}^+\psi_0\rangle\ .$$

В результате

$$\langle\psi_1(H-E_0)\psi_1\rangle =$$

$$= \left[\cos(2\pi/N)-1\right]\sum_n\langle\psi_0 S_n^+S_{n+1}^-\psi_0\rangle =$$

$$= \left[\cos(2\pi/N)-1\right](2E_0/3) = O(1/N)\ .$$

Таким образом, при $N\to\infty$ собственное значение, соответствующее волновой функции ψ_1, будет сколь угодно близко к энергии основного состояния. Доказательство элементарно распространяется на произвольную размерность пространства, а также на изотропные гамильтонианы более общего вида, обладающие трансляционной симметрией. Следует отметить, однако, что предположение о единственности основного состояния является существенным. Действительно, можно привести примеры систем (см. разд. 5) с полуцелым спином, для которых вырожденность основного состояния приводит к появлению щели в спектре.

Возникает вопрос, нельзя ли построить пробную волновую функцию возбужденного состояния, которая позволила бы сделать заключения по поводу характера спектра для прозвольных значений спина. По аналогии с фейнмановской теорией возбужденных состояний в сверхтекучем гелии [108] в качестве таковой естественно выбрать [57]

$$\psi_k \equiv S_k^z\psi_0 = N^{-1/2}\sum_n\exp(ikn)S_n^z\psi_0\ . \qquad (\text{П3.6})$$

Поскольку оператор полного спина системы коммутирует с гамильтонианом H, естественно ожидать, что среднее значение H с (П3.6) будет близко к E_0. С другой стороны, можно показать, что при любом сколь угодно малом k функция ψ_k будет ортогональна основному состоянию. Действительно, применяя оператор сдвига $\hat{T}$ к ψ_k, получаем

$$\langle\psi_0\psi_k\rangle(1-\exp(ik)) = 0\ .$$

Значение энергии E_k, соответствующее функции ψ_k, определяется соотношением

$$E_k - E_0 = f(k)/s(k)\ , \qquad (\text{П3.7})$$

где

$$f(k) = \frac{1}{2}\langle\psi_0[S_{-k}^z,[H,S_k^z]]\psi_0\rangle\ ,$$

$$s(k) = \langle \psi_0 S^z_{-k} S^z_k \psi_0 \rangle .$$

Легко показать [57], что

$$f(k) = \frac{1}{2} C(1 - \cos k) ,$$

где C — константа, значение которой для наших целей несущественно. В результате при $k \to 0$ величина $f(k) \propto k^2$. Чтобы сделать дальнейшие заключения по поводу наличия или отсутствия щели, мы должны проанализировать поведение статического структурного фактора $s(k)$ при малых k. Поскольку основное состояние соответствует полному спину, равному нулю, структурный фактор при $k = 0$ обращается в нуль. Вопрос теперь состоит в том, с какой скоростью это происходит. Как было показано в [53,54], для цепочки со спином 1/2 при больших n спиновая корреляционная функция имеет вид

$$\langle \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_n \rangle \to (-1)^n [\ln n]^{1/2}/n + O(1/n^2) .$$

Знакопеременный характер первого слагаемого приводит к частичной компенсации каждых из двух последовательных слагаемых в ряду, определяющем статический структурный фактор, и существенная для $s(k)$ плавная часть корреляционной функции фактически убывает как $1/n^2$. Это приводит к линейному (с логарифмической точностью) поведению структурного фактора при малых k и, следовательно, к заключению об отсутствии щели в спектре, что находится в согласии с точными результатами. Следует, однако, отметить, что реальный спектр слабовозбужденных состояний в линейном АФМ со спином 1/2 более сложен, чем это предполагается формулой (П3.7), и имеет двухпараметрический характер [48].

Для гейзенберговских АФМ систем с целым спином S отсутствуют какие-либо аналитические результаты, касающиеся поведения структурного фактора. Определенные заключения можно сделать только для специального вида гамильтонианов. Простейшим из них является, например,

$$H = \sum_n P(n) ,$$

$$P(n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{6} (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n+1})^2 . \qquad (\text{П3.8})$$

Для (П3.8) волновая функция основного состояния, величина $f(k)$ и статический структурный фактор находятся точно [55,57] (см. также разд. 5)

$$f(k) = \frac{10}{27} (1 - \cos k) ,$$

$$s(k) = 2(1 - \cos k)/(5 + 3 \cos k) .$$

Таким образом, $s(k)$ оказывается аналитической функцией k^2, и из (П3.7) следует наличие в рассматриваемой системе щели $\Delta = 10/27 \simeq 0{,}37$. Следует, однако, отметить, что (П3.7) дает оценку сверху для энергии возбужденного состояния. Поэтому с его помощью можно сделать однозначное заключение только по поводу отсутствия щели. В связи с этим [57] Халдейном были проведены численные расчеты для цепочки из 12 узлов, которые привели к значению щели $\Delta \simeq 0{,}35$, что довольно близко к значению $\Delta \simeq 0{,}41$, полученному для реальной гейзенберговской модели с помощью метода Монте-Карло [21–25].

Приложение 4

Докажем равенство (4.12). В более общем виде оно приведено в работе [35]

$$\sum_a \left[\mathrm{e}_a(\mathrm{r}) - \mathrm{e}_a(\mathrm{r}') \right]^2 = \left[\mathrm{n}(\mathrm{r}) - \mathrm{n}(\mathrm{r}') \right]^2 . \qquad (\text{П4.1})$$

Для простоты ограничимся наиболее интересным случаем $a = 2$. Пусть оси координат направлены вдоль векторов $\mathrm{e}_1(\mathrm{r})$, $\mathrm{e}_2(\mathrm{r})$ и $\mathrm{n}(\mathrm{r})$

$$\mathrm{e}_1(\mathrm{r}) = (0, 1, 0) ; \qquad \mathrm{e}_2(\mathrm{r}) = (1, 0, 0) ,$$

$$\mathrm{n}(\mathrm{r}) = (0, 0, 1) ,$$

а вектор $\mathrm{n}(\mathrm{r}')$ представим в виде

$$\mathrm{n}(\mathrm{r}') = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) .$$

Очевидно, что векторы $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$, равные соответственно

$$\vec{\varepsilon}_1 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) ;$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta) ,$$

ортогональны между собой и вектору $\mathrm{n}(\mathrm{r}')$. Тогда линейные комбинации векторов $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ вида

$$\mathrm{e}_1(\mathrm{r}') = \vec{\varepsilon}_1 \cos\alpha + \vec{\varepsilon}_2 \sin\alpha ;$$

$$\mathrm{e}_2(\mathrm{r}') = -\vec{\varepsilon}_1 \sin\alpha + \vec{\varepsilon}_2 \cos\alpha \qquad (\text{П4.2})$$

также будут ортогональны между собой и вектору $\mathrm{n}(\mathrm{r}')$ при произвольных α. Кроме того,

$$|\mathrm{e}_1(\mathrm{r}')| = |\mathrm{e}_2(\mathrm{r}')| = 1 .$$

Легко убедиться, что равенство (П4.1) тождественно удовлетворяется, если в (П4.2) положить $\alpha = \varphi$.

1. Ю. А. Изюмов, Н. М. Плакида, Ю. Н. Скрябин, *УФН* 159, 621 (1989).
2. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, т. 1, Наука, Москва (1969).

3. H. Mermin and N. D. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
4. J. Frohlich, B. Simon, and T. Spenser, *Comm. Math. Phys.* **50**, 79 (1976).
5. J. Frohlich, L. Israel, E. H. Lieb, and B. Simon, *Comm. Math. Phys.* **62**, 1 (1978).
6. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
7. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962).
8. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, С. А. Пикин, *ЖЭТФ* **53**, 281 (1967).
9. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, С. А. Пикин, *ЖЭТФ* **53**, 1089 (1967).
10. F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153 (1983).
11. A. Angelucci and G. Jug, *Int. J. Mod. Phys.* **3**, 1069 (1989).
12. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
13. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, *УФН* **LXX1**, 533 (1960).
14. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
15. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
16. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985).
17. E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Ann. Phys. (N. Y.)* **16**, 407 (1961).
18. F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1029 (1988).
19. H. E. Stanly, *Phys. Rev.* **176**, 718 (1968).
20. J. P. Renard, M. Verdaguer, L. P. Regnault, W. A. C. Erkelens, J. Rossat-Mignod, J. Ribas, and C. Vettier, *J. Appl. Phys.* **63**, 3538 (1988).
21. J. Deisz, M. Jarrel, and D. L. Cox, *Phys. Rev.* **B48**, 10227 (1993).
22. R. Botet, R. Jullien, and M. Kolb, *Phys. Rev.* **B29**, 5216 (1983).
23. J. B. Parkinson and J. C. Bonner, *Phys. Rev.* **B32**, 4703 (1985).
24. A. Moreo, *Phys. Rev.* **B35**, 8562 (1987).
25. H. Betsuyaku, *Phys. Rev.* **B36**, 799 (1987).
26. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ε-разложение*, Мир, Москва (1975).
27. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
28. A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B59**, 79 (1975).
29. В. А. Слюсарев, Р. П. Янкелевич, *ФНТ* **9**, 1175 (1977).
30. D. R. Nelson and R. A. Pelcovits, *Phys. Rev.* **B16**, 2106 (1977).
31. С. Б. Хохлачев, *ЖЭТФ* **70**, 265 (1976).
32. S. Chakravarty, B. I. Halperin, and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057 (1988).
33. А. А. Мигдал, *ЖЭТФ* **69**, 1457 (1975).
34. В. Л. Березинский, А. Я. Бланк, *ЖЭТФ* **64**, 725 (1973).
35. J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1577 (1976).
36. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
37. В. Г. Барьяхтар, Д. А. Яблонский, *ТМФ* **25**, 250 (1975).
38. *Монополь Дирака*, Б. М. Болотовский, Ю. Д. Усачев (ред.), Мир, Москва (1970).
39. R. Shankar, N. Read, *Nuclear Phys.* **B336**, 457 (1990).
40. *Криокристаллы*, Б. И. Веркин, А. Ф. Прихотько (ред.), Наукова думка, Киев (1983).
41. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, Мир, Москва (1973).
42. H. Bethe, *Zs. Phys.* **71**, 205 (1931).
43. M. Takahashi, *Progr. Theor. Phys.* **46**, 401 (1971).
44. L. Hulthen, *Arkiv Met. Astron. Fyzik* **26A**, 1 (1938).
45. R. Orbach, *Phys. Rev.* **112**, 309 (1958).
46. J. Des Cloizeaux and J. J. Pearson, *Phys. Rev.* **128**, 2131 (1962).
47. M. Gaudin, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1301 (1971).
48. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддев, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **109**, 134 (1981).
49. J. D. Johnson and B. M. McCoy, *Phys. Rev.* **A6**, 1613 (1972).
50. J. M. Luttinger, *J. Math. Phys.* **4**, 1154 (1963).
51. D. Mattis and E. Lieb, *J. Math. Phys.* **6**, 304 (1965).
52. A. Luther and I. Peschel, *Phys. Rev.* **B12**, 3908 (1975).
53. R. R. P. Singh, M. E. Fisher, and R. Shankar, *Phys. Rev.* **B39**, 2562 (1989).
54. I. Affleck, D. Gepner, H. J. Shulz, and T. Ziman, *J. Phys.* **A22**, 511 (1989).
55. I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799 (1987).
56. I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Commun. Math. Phys.* **115**, 477 (1988).
57. D. P. Arovas, A. Auerbach, and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 531 (1988).
58. J. Babudjian, *Phys. Lett.* **A90**, 479 (1982).
59. J. Babudjian, *Nucl. Phys.* **B215**, 317 (1983).
60. Е. К. Склянин, *Функц. анализ*, **17**, 34 (1983).
61. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.* **5**, 393 (1981).
62. L. A. Takhtajan, *Phys. Lett.* **A87**, 479 (1982).
63. C. K. Majumdar and D. K. Ghosh, *Math. Phys.* **10**, 1388 (1969).
64. C. K. Majumdar, *J. Phys.* **C3**, 911 (1970).
65. P. M. van den Broek, *Phys. Lett.* **A77**, 261 (1980).
66. W. J. Caspers and W. Magnus, *Phys. Lett.* **A88**, 103 (1982).
67. B. S. Shastry and B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 964 (1981).
68. A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, *Phys. Lett.* **B131**, 121 (1983).
69. П. Б. Вигман, *Письма в ЖЭТФ* **41**, 79 (1985).
70. G. S. Rushbrooke, G. A. Baker, Jr. , and P. J. Wood, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and M. S. Green (eds.), Academic press, New-York (1974), v. 3, Chap. 5.
71. J. C. Bonner and M. E. Fisher, *Phys. Rev.* **135**, A640 (1964).
72. M. Takahashi, *Phys. Rev.* **B40**, 2494 (1989).
73. M. Uchinami, *Phys. Rev.* **B39**, 4554 (1989).
74. S. Mijashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **57**, 1934 (1988).
75. Y. Okabe and M. Kikuchi, *J. Phys. Soc. Jpn.* , **57**, 4351 (1988).
76. E. Manousakis and R. Salvador, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 840 (1988).
77. E. Manousakis and R. Salvador, *Phys. Rev.* **B39**, 575 (1989).
78. D. H. Lee, J. D. Joannopoulos, and J. W. Negele, *Phys. Rev.* **B30**, 1599 (1984).
79. G. Gomes-Santos, J. D. Joannopoulos, and J. W. Negele, *Phys. Rev.* **B39**, 4435 (1989).
80. M. S. Makivic and H.-Q. Ding, *Phys. Rev.* **B43**, 3562 (1991).
81. M. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 168 (1987).
82. M. Takahashi, *J. Magn. Magn. Mater.* No **90–91**, 312 (1990).
83. Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, *ФНТ* **18**, 261 (1992).
84. Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, *ТМФ* **95**, 87 (1993).
85. M. Takahashi and M. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **54**, 2808 (1985).
86. M. Takahashi and M. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **55**, 2024 (1986).
87. С. В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, Москва (1975).
88. S. M. Rezende, *Phys. Rev.* **B42**, 2589 (1990).
89. Р. Брout, *Фазовые переходы*, Мир, Москва (1967).
90. M. Fisher, *Amer. J. Phys.* **32**, 343 (1961).
91. A. Auerbach and D. P. Arovas, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 617 (1988).
92. D. P. Arovas and A. Auerbach, *Phys. Rev.* **B38**, 316 (1988).
93. Д. Маттис, *Теория магнетизма*, Мир, Москва (1967).
94. J. E. Hirsch and S. Tang, *Phys. Rev.* **B39**, 2850 (1989).

95. Ю. Г. Рудой, в кн. : *Статистическая физика и квантовая теория поля*, Наука, Москва (1973).
96. J. Kondo and K. Yamaji, *Prog. Theor. Phys.* **47**, 807 (1972).
97. Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, *ФНТ* **19**, 67 (1993).
98. R. H. Knapp Jr. and Ter Haar, в кн. : *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1969).
99. P. Fazekas and P. W. Anderson, *Philos. Mag.* **30**, 423 (1974).
100. J. Ambjorn and G. Semenoff, *Phys. Lett.* **B226**, 107 (1989).
101. E. Fradkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 322 (1989).
102. Л. Н. Булаевский, *ЖЭТФ* **43**, 968 (1962).
103. V. Kalmeyer and R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2095 (1987).
104. Y. R. Wang, *Phys. Rev.* **B43**, 3786 (1991).
105. Y. R. Wang, *Phys. Rev.* **B46**, 151 (1992).
106. L. J. de Jongh and A. R. Miedema, *Adv. Phys.* **23**, 1 (1974).
107. S. B. Rutkevich, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, L163 (1994).
108. Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, Москва (1975).

Thermodynamics of low-dimensional magnetic systems

T. N. Antsygina and V. A. Slusarev

The review reports the most interesting and important results concerning the problem of low-dimensional magnetism. Particular attention is given to thermodynamic properties of one- and two-dimensional isotropic Heisenberg magnetics. The strengths and weaknesses of various theoretical approaches used for description of these systems are discussed extensively.