Физика низких температур, 1997, т. 23, № 4, с. 434–438

Энионный экситон: сферическая геометрия

В. М. Апальков

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г.Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: kfti@kfti.kharkov.ua

Д. М. Апальков

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 1 июля 1996 г., после переработки 28 августа 1996 г.

В сферической геометрии численно рассмотрен энионный экситон, состоящий из валентной дырки и трех квазиэлектронов несжимаемой лафлиновской жидкости дробного квантового эффекта Холла с фактором заполнения $\nu = 1/3$. Квазиэлектроны рассматриваются как бозе-частицы с твердым ядром и кулоновским взаимодействием. Получены энергетический спектр системы и распределение квазиэлектронной плотности вокруг дырки. Энергетический спектр системы имеет форму ветвей, которые можно классифицировать по внутреннему угловому моменту энионного экситона, при этом отсутствуют ветви с угловым моментом меньшим трех и ветвь с моментом четыре, что является следствием принципа Паули для квазиэлектронов.

В сферичній геометрії чисельно розглянуто еніонний ексітон, складений з валентної дірки і трьох квазіелектронів нестисливоємої лафлінівської рідини дрібного квантового ефекту Холла з фактором заповнення $\nu = 1/3$. Квазіелектрони розглядаються як бозе-частки з твердим ядром и кулонівською взаємодією. Одержано енергетичний спектр системи та розподіл квазіелектронної густини навколо дірки. Енергетичний спектр системи має форму гілок, котрі можна класифікувати згідно з внутрішнім кутовим моментом еніонного ексітона, при цьому відсутні гілки з кутовим моментом меншим трьох і гілка з моментом чотири, що є наслідком принципа Паулі для квазіелектронів.

PACS: 71.35.–y

1. Введение

Несжимаемая двумерная электронная жидкость [1], которая лежит в основе дробного квантового эффекта Холла [2], принадлежит к числу наиболее замечательных низкотемпературных объектов современной физики твердого тела. Фундаментальным свойством этой жидкости является отсутствие бесщелевых ветвей в спектре элементарных возбуждений [1]. Элементарными заряженными возбуждениями в такой системе являются квазиэлектроны и квазидырки, обладающие дробными зарядами и дробной статистикой [3]. Весь экспериментальный материал по дробному эффекту Холла вначале основывался исключительно на магнитотранспортных данных. Позже были развиты спектроскопические методики исследования взаимодействующего двумерного (2*D*) электронного газа, одной из которых является исследование излучения, возникающего при рекомбинации 2*D* электронов со свободными дырками [4]. В связи с этим возникает вопрос о поведении экситона (электрон-дырочной пары) на фоне несжимаемой лафлиновской жидкости. Существуют два подхода к изучению этого вопроса.

1. Точное численное исследование в сферической геометрии системы экситон — несжимаемая жидкость, состоящей из конечного числа частиц [5]. Этот подход ограничен малыми расстояниями d между электронной и дырочной плоскостями, поскольку d не может быть больше радиуса сферы.

2. Рассмотрение энионного экситона, т. е. системы, состоящей из положительно заряженной дырки с зарядом $+e$ ($-e$ — заряд электрона) и q квазиэлектронов (энионов) с зарядом $-e/q$ каждый [6]. Энионный экситон хорошо описывает систему экситон — несжимаемая жидкость при достаточно большом удалении валентной дырки от электронной плоскости, когда весь эффект присутствия лафлиновской жидкости состоит в распаде дополнительного электрона на q квазиэлектронов. Энионный экситон при $q = 3$ был рассмотрен в плоской геометрии в [6]. Поскольку в подходе 1 используется сферическая геометрия, в настоящей работе

исследуем энионный экситон, рассматриваемый в подходе 2, также в сферической геометрии.

2. Теория

Рассмотрим энионный экситон, состоящий из валентной дырки с зарядом $+e$ и трех квазиэлектронов с зарядом $-e/3$ каждый, что соответствует системе экситон — несжимаемая жидкость дробного квантового эффекта Холла с фактором заполнения $\nu = 1/3$, где $\nu = N/N_0$, N — число электронов в системе, N_0 — число состояний на нижнем уровне Ландау. Интересным свойством квазиэлектронов является то, что они обладают дробной статистикой [3] — являются энионами со статистическим параметром $\theta = -1/3$, т.е. при перестановке двух квазиэлектронов волновая функция приобретает фазовый множитель $e^{i\pi\theta}$. Рассмотрение системы энионов затруднено тем, что даже в системе без взаимодействия многоэнионная волновая функция не может быть представлена в виде произведения одночастичных функций (всегда остается статистическое взаимодействие). Поэтому для упрощения расчетов воспользуемся бозе-приближением для энионов (квазичастиц), т.е. будем считать, что энионы являются бозе-частицами с твердым ядром [7]. В дальнейшем эту систему рассмотрим в сферической геометрии.

В сферической геометрии движение частиц ограничено сферой, в центре которой помещен магнитный монополь [8]. Из условия квантования Дирака [9] следует, что магнитный поток через поверхность сферы равен целому числу $2S$ квантов потока h/ec. Отсюда получаем, что радиус сферы $R = lS^{1/2}$ где l — магнитная длина; $l^2 = c\hbar/eH$. Удобством сферической геометрии является отсутствие границ и наличие углового момента. Состояния системы на сфере можно классифицировать по полному угловому моменту $\hat{L}^2$ и его проекции $\hat{L}_z$. Волновыми функциями частицы с зарядом $-e$, находящейся на нижнем уровне Ландау в плоской геометрии, в сферической геометрии являются монопольные гармоники [10]

$$e_{S,m} = \left[\frac{2S+1}{4\pi} C^{2S}_{S+m}\right]^{1/2} u^{S+m} v^{S-m} , \qquad (1)$$

$$m = -S, \ldots, S ,$$

где C^{2S}_{S+m} — биномиальные коэффициенты; $u = \cos(\theta/2)\exp(i\varphi/2)$, $v = \sin(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)$; θ, φ — сферические координаты.

Волновая функция положительно заряженной частицы (валентной дырки) получается из (1) путем инверсии времени:

$$g_{S,m} = (-1)^{S-m} e^{*}_{S,-m} ,$$

где знак «*» означает комплексное сопряжение.

Найдем эффективный магнитный поток, который в нашей задаче соответствует квазичастицам с зарядом $-e/3$. Пусть N электронов образуют несжимаемую жидкость с фактором заполнения $1/3$, тогда число квантов магнитного потока через поверхность сферы равно $2S_0 = 3(N-1)$ [11]. Для того чтобы получить три квазичастицы в такой системе, нужно уменьшить число квантов потока на три: $2S = 2S_0 - 3$ [8], при этом каждый квазиэлектрон «видит» исходные электроны как эффективные кванты магнитного потока [8], т.е. для квазичастиц $2S_q = N$. Тогда получаем $S = 3(S_q - 1)$. Таким образом, волновая функция квазиэлектронов имеет вид $e_{S_q,m}$, где $S_q = 1 + S/3$ (см. (1)).

Магнитное поле будем считать достаточно сильным, так что все частицы находятся на нижнем уровне Ландау, тогда гамильтониан системы сводится только к гамильтониану взаимодействия. Взаимодействие между квазиэлектронами аппроксимируем парным потенциалом $V_q(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)$, тогда оно будет полностью описываться приведенными матричными элементами $V_{q,J}$ $(J = 0, \ldots, 2S_q)$:

$$\langle e_{S_q,m_1}, e_{S_q,m_2} | V_q | e_{S_q,m_3}, e_{S_q,m_4}\rangle =$$
$$= \sum_J \sum_M \langle S_q m_1, S_q m_2 | JM\rangle\langle S_q m_3, S_q m_4 | JM\rangle V_{q,J} ,$$

где $\langle | V_q | \rangle$ — матричный элемент взаимодействия между соответствующими состояниями:

$$\langle e_{S_q,m_1}, e_{S_q,m_2} | V_q | e_{S_q,m_3}, e_{S_q,m_4}\rangle =$$
$$= \int\int d\vec{\Omega}_1\, d\vec{\Omega}_2\, e^{*}_{S_q,m_1}(\vec{\Omega}_1)\, e^{*}_{S_q,m_2}(\vec{\Omega}_2) V_q(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|) e_{S_q,m_3}(\vec{\Omega}_1) e_{S_q,m_4}(\vec{\Omega}_2) .$$

Здесь $\vec{\Omega}_i$ — элементы телесного угла; $\mathbf{R}_i$ — положение частицы на сфере; $\langle S_q m_1, S_q m_2 | JM \rangle$ — коэффициенты Клебша—Гордана; $V_{q,J}$ имеет смысл энергии взаимодействия двух квазиэлектронов с относительным угловым моментом $2S_q - J$. В дальнейшем будем рассматривать только кулоновское взаимодействие между квазиэлектронами $V_q(r) = 1/(9r)$, где энергия выражена в кулоновских единицах $e^2/(\kappa l)$ (κ — диэлектрическая проницаемость), а длины — в единицах магнитной длины. Принцип Паули для квазичастиц учитываем, полагая $V_{q,2S_q}$ равным бесконечности.

Аналогично можно ввести приведенные матричные элементы для квазиэлектрон-дырочного взаимодействия, согласно следующему правилу:

$$\langle e_{S_q, m_1}, g_{S,m_2} | V_{eh} | e_{S_q, m_3}, g_{S,m_4} \rangle = (-1)^{m_2 - m_4} \times$$

$$\times \langle e_{S_q, m_1}, e_{S,-m_4} | V_{eh} | e_{S_q, m_3}, e_{S,-m_2} \rangle = (-1)^{m_2 - m_4} \times$$

$$\times \sum_J \sum_M \langle S_q m_1, S\ -m_4 | JM \rangle \langle S_q m_3, S\ -m_2 | JM \rangle V_{h,J} .$$

Для нахождения $V_{h,J}$ воспользуемся выражением

$$V_{eh}(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_h|) = \frac{1}{3} (|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_h|^2 + d^2)^{-1/2} ,$$

где d — расстояние между квазиэлектронной и дырочной плоскостями в плоской геометрии; в дальнейшем d будем использовать как параметр квазиэлектрон-дырочного взаимодействия. Тогда $V_{h,J}$ находится по формуле

$$V_{h,J} = \langle JJ | V_{eh} | JJ \rangle ,$$

где $\quad |JJ\rangle = N_0 u_1^{S-S_q} u_2^{S-S_q} (u_1 v_2 - v_1 u_2)^{S+S_q-J}$; N_0 — нормировочный множитель.

Для нахождения собственных функций гамильтониана взаимодействия используем условие сохранения углового момента в системе и диагонализуем гамильтониан в подпространстве функций с фиксированными L и $L_z = M$. Набор этих функций легко получить, используя правила сложения угловых моментов:

$$\Psi_M(L, J_1, J_2) = \hat{A} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \sum_{m_4} \sum_{M_1} \sum_{M_2} \langle J_1 M_1, J_2 M_2 | LM \rangle \langle S_q m_1, S_q m_2 | J_1 M_1 \rangle \times$$
$$\times \langle S_q m_3, S m_4 | J_2 M_2 \rangle e_{S_q m_1} e_{S_q m_2} e_{S_q m_3} g_{S m_4} , \tag{2}$$

где $\hat{A}$ — оператор симметризации, учитывающий бозе-статистику для квазичастиц; $J_1 = 0, \ldots, 2S_q$; $J_2 = S - S_q, \ldots, S + S_q$. Функции (2) образуют переполненный базис. Выбирая из (2) линейно независимый набор функций и вычисляя матричные элементы гамильтониана на этих функциях, после диагонализации получившейся матрицы находим собственные значения энергии и соответствующие собственные функции, которые одновременно обладают фиксированными значениями углового момента L и его проекции $L_z = M$. Данная процедура позволяет резко уменьшить (примерно в 40 раз) размер матрицы, которую необходимо диагонализовать, если не выделять подпространство с фиксированным значением L.

3. Компьютерные расчеты

Основные расчеты были проведены для $S = 18$ ($S_q = 7$), т.е. магнитный поток через поверхность сферы в единицах кванта потока равен $2S = 36$, при этом радиус сферы равен $R = S^{1/2} \approx 4{,}2$. Это максимальный размер сферы, для которого удалось диагонализовать гамильтониан. Параметр квазиэлектрон-дырочного взаимодействия d изменялся в пределах $0 < d < 2$. На рис. 1 представлен энергетический спектр системы как функция полного углового момента L для $d = 1$ и 2. В плоской геометрии [6] энергетический спектр системы состоит из множества ветвей $\varepsilon(k)$ (зависимость энергии от импульса k, который сохраняется для нейтральной системы), причем одним из квантовых чисел, позволяющих различать ветви, является z-проекция внутреннего углового момента энионного экситона M_0 (в плоской геометрии определен только L_z, а ось z перпендикулярна плоскости). Как видно из рис. 1, в сферической геометрии также наблюдаются ветви, каждая из которых начинается с определенного значения $L = L_m = m$. В работе [5] был предложен алгоритм переноса та-

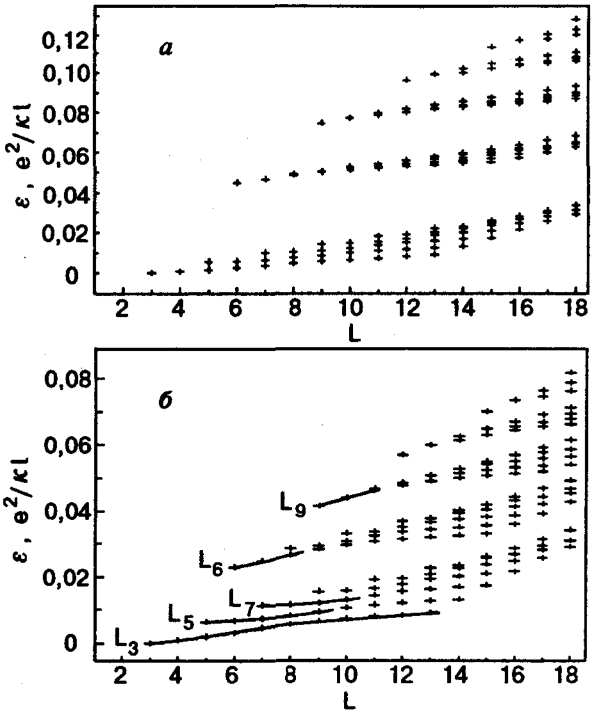

Рис. 1. Энергетический спектр $\varepsilon(L)$ системы для двух значений d: 1 (*а*); 2 (*б*). Показаны только состояния с $L < 19$. Линии проведены для наглядности.

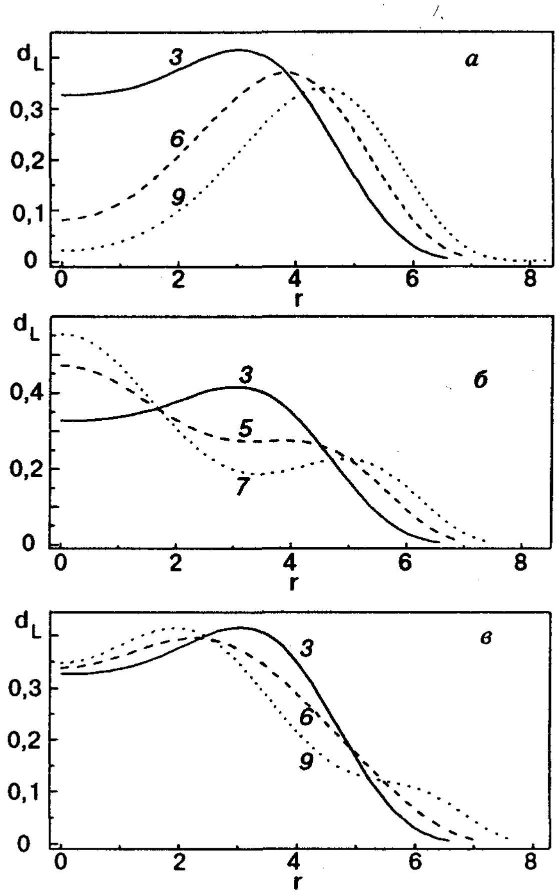

Рис. 2. Распределение квазиэлектронной плотности вокруг дырки $d_L(r)$ для начальных точек ветвей, отмеченных на рис. 1,*б*, $L = L_m$ (*а*, *б*) и для ветви L_3 (рис. 1,*б*) при разных значениях L, которые указаны вблизи соответствующей кривой (*в*).

кой структуры в плоскую геометрию: ветвь, начинающаяся с углового момента L_m в сферической геометрии, в плоской геометрии имеет z-проекцию внутреннего углового момента $M_0 = L_m$, а импульс связан с L соотношением $kR = L - L_m$.

Отметим особенности энергетического спектра в сферической геометрии (рис. 1).

— Отсутствие ветвей с $L_m < 3$ и $L_m = 4$, что является следствием принципа Паули для квазиэлектронов. Эта особенность энергетического спектра системы, отмеченная в расчетах для конечной системы [5], не проявляется в результатах [6], где для энионного экситона в плоской геометрии получены все значения z-проекции внутреннего углового момента $M_0 = L_m$. Это связано с тем, что в работе [6] условие твердого ядра (принципа Паули) для энионов не накладывалось.

— При малых значениях $d \simeq 1$ наблюдается зонная структура спектра, причем угловой момент ветви с наименьшей энергией в каждой зоне кратен трем. Щель между зонами зарастает с увеличением размера сферы.

— При $d < 2$ ветвь с наименьшей энергией обладает угловым моментом $L_m = 3$. Это находится в соответствии с результатами, полученными при точном рассмотрении конечной электрон-дырочной системы [5]. Учитывая результаты расчетов в плоской геометрии [6], следует ожидать, что с увеличением d в основное состояние будут переходить ветви с L_m кратным трем.

Для состояний, представленных на рис. 1, была найдена квазиэлектронная плотность вокруг дырки:

$$d_L(r) = 4\pi/(2L+1) \times$$

$$\times \sum_M \int\int\int d\vec{\Omega}_1\, d\vec{\Omega}_2\, d\vec{\Omega}_3\, |\Psi_{LM}(\vec{\Omega}_1\vec{\Omega}_2\vec{\Omega}_3|\vec{\Omega}_h)|^2 \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{3} \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_j)\ ,$$

где $\vec{\Omega} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$; Ψ_{LM} — волновая функция системы с определенным полным значением углового момента L и его проекции $L_z = M$. Дырка расположена на северном полюсе: $\vec{\Omega} = (0, 0, 1)$ и $r = 2R\sin(\theta/2)$ — расстояние по хорде.

На рис. 2,*а*,*б* представлена функция $d_L(r)$ для начальных точек ($L = L_m$) нескольких ветвей, показанных на рис. 1,*б*. Для ветвей L_3 , L_6 и L_9 (которые соответствуют нижним по энергии ветвям для соответственно первой, второй и третьей зон, рис. 1,*б*) виден четкий минимум в нуле и хорошо выраженный максимум на некотором расстоянии от дырки, положение которого смещается в область бо́льших r при увеличении углового момента ветви. Такое распределение плотности квазиэлектронов можно объяснить классическим расположением квазиэлектронов в вершинах правильного треугольника, площадь которого увеличивается с увеличением внутреннего углового момента [6]. Предполагается, что при увеличении d основное состояние будет описываться именно этими ветвями.

На рис. 2,*в* показано распределение квазиэлектронной плотности вокруг дырки для ветви L_3 при разных значениях L. Видно, что при увеличении L (что в плоском случае соответствует увеличению импульса системы) происходит «подтягивание» плотности квазиэлектронов к дырке, что можно связать с отрывом одного квазиэлектрона от энионного экситона и образованием комплекса квазидырка — квазиэлектрон [5].

В работе предполагалось, что квазиэлектроны являются точечными частицами и взаимодействие между ними кулоновское. Несмотря на эти приближения, полученные результаты находятся в согласии с точными результатами для конечной электрон-дырочной системы и можно заключить, что модель энионного экситона хорошо описывает энергетический спектр системы экситон — несжимаемая жидкость с $\nu = 1/3$ уже при относительно малых $d \sim 2$.

В заключение выражаем благодарность В. В. Еременко за обсуждение результатов работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международной соросовской программы поддержки образования в области точных наук (грант № GSU052223).

1. R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 13 (1983).
2. D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
3. B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984).
4. A. J. Tutberfield, S. H. Heines, P. A. Wright, R. A. Ford, R. G. Clark, J. F. Ryan, J. J. Hattis, and C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 637 (1990); A. Pinczuk, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3983 (1993).
5. V. M. Apalkov, F. G. Pikus, and E. I. Rashba, *Phys. Rev.* **B52**, 6111 (1995).
6. M. E. Portnoi, E. I. Rashba, *Mod. Phys. Lett.* **B50**, 1932 (1995).
7. S. He, X.-C. Xie, and F.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3460 (1992).
8. F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983).
9. P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A133, 60 (1931).
10. T. T. Wu and C. N. Yang, *Nucl. Phys.* B107, 365 (1976).
11. G. Fano, F. Ortolani, and E. Colombo, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 2670 (1986).

Anyon exciton: spherical geometry

V. M. Apalkov and D. M. Apalkov

An anyon exciton, consisting of a valence hole and three quasielectrons of the Laughlin incompressible liquid of the fractional quantum Hall effect with the filling factor $\nu = 1/3$, is investigated numerically in a spherical geometry. The quasielectrons are considered as boseparticles with hard cores and the Coulomb interaction. The energy spectrum and the quasielectron distribution around the hole'are found. The energy spectrum consists of branches which have different angular momenta; there are no branches with an angular momentum below 3 and the angular momentum of 4, which results from the Pauli exclusion principle for quasiparticles.