УДК 517.9

ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ТА ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ В МОДЕЛЯХ ІЗ ВІКОВОЮ СТРУКТУРОЮ, ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Ю. М. Мисло, В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We obtain sufficient conditions for the permanence and existence of asymptotically stable periodic solution in single species model with stage structure and impulsive action and in system of delay impulsive differential equations modeling dynamics of two biological species with stage structure.

Получены условия перманентности и существования асимптотически устойчивого периодического решения в модели эволюции биологического вида с вековой структурой, запаздыванием и импульсным воздействием, а также в системе уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием, моделирующей динамику двух конкурирующих видов с вековой структурой.

Вступ. Математична модель еволюції біологічного виду з віковою структурою була запропонована В. Г. Аіелло та Х. І. Фрідманом у 1990 р. [1] і має вигляд

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \delta(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h), \tag{1}$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$ — щільність незрілих особин біологічної популяції (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі), $x_m(t)$ — щільність зрілих особин біологічної популяції в момент часу t. Функції $\alpha(t)$ та $\delta(t)$ задають коефіцієнти народжуваності та смертності незрілих особин, вираз $-\beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t)$ задає смертність зрілих особин, h — час дозрівання. Вираз

$$\alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h)$$

визначає число особин, які народилися в момент часу $(t-h)$, вижили і в момент часу t стали дорослими.

Після появи роботи [1] різного виду моделі з віковою структурою досліджувались у багатьох роботах [2–8].

У даній роботі ми дослідимо модель з віковою структурою (1), (2) та імпульсною дією

$$x_m(t_k + 0) = (1 + d_k)x_m(t_k) \tag{3}$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$. Формули (3) моделюють короткотривалі зовнішні впливи на біологічну систему.

У другій частині роботи розглянемо систему рівнянь з імпульсною дією та запізненням, яка моделює динаміку двох конкуруючих біологічних видів із віковою структурою.

Перманентність та періодичні розв'язки системи. Розглянемо систему рівнянь (1), (2) з імпульсною дією (3).

Будемо припускати, що виконуються наступні умови:

$\mathbf{C_1}$) функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ і $\delta(t)$ кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, h — додатна стала;

$\mathbf{C_2}$) послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строго зростаюча і задовольняє умову періодичності $t_{k+p}-t_k=T$, $k\in\mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p;

$\mathbf{C_3}$) $d_{k+p}=d_k$, $d_k\in(-1,d]$, для всіх $k\in\mathbb{Z}$, $d>0$.

Позначимо $a^L=\inf_{t\in\mathbb{R}}a(t)$, $a^M=\sup_{t\in\mathbb{R}}a(t)$. Вважаємо, що розв'язки системи неперервні зліва.

Виходячи з біологічної інтерпретації будемо розглядати розв'язки системи (1) – (3), які набувають невід'ємних значень. Тому початкові умови розв'язків задаються так:

$$x_i(0)=\varphi_i>0, \tag{4}$$

$$x_m(\theta)=\psi_m(\theta)\geq 0,\quad \theta\in[-h,0],\quad \psi_m(0)>0. \tag{5}$$

Означення 1. *Система рівнянь (1) – (3) називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку $(x_i(t),x_m(t))$ з додатними початковими значеннями (4), (5) виконується*

$$\liminf_{t\to+\infty}x_i(t)\geq m_0,\quad \limsup_{t\to+\infty}x_i(t)\leq M_0,$$

$$\liminf_{t\to+\infty}x_m(t)\geq m_0,\quad \limsup_{t\to+\infty}x_m(t)\leq M_0.$$

Означимо число $\sigma=\dfrac{1}{T}\sum_{0\leq t_k<T}\ln(1+d_k)$. Тоді функція $\omega(t)=\prod_{0\leq t_k<t}(1+d_k)e^{-\sigma t}$ є додатнозначною і T-періодичною.

Теорема 1. *Нехай виконується нерівність*

$$\inf_t\left(\sigma-\beta(t)+\alpha(t-h)e^{\sigma h-\int_{t-h}^t\delta(s)ds}\prod_{t-h\leq t_k<t}(1+d_k)^{-1}\right)>0. \tag{6}$$

Тоді система (1) – (3) перманентна.

Якщо додатково виконується нерівність

$$\sup_t S(t)<2\inf_t S(t), \tag{7}$$

де

$$S(t)=\frac{\sigma-\beta(t)+\alpha(t-h)e^{\sigma h-\int_{t-h}^t\delta(s)ds}\prod\limits_{t-h\leq t_k<t}(1+d_k)^{-1}}{\gamma(t)\prod\limits_{0\leq t_k<t}(1+d_k)e^{\sigma t}},$$

то система (1) – (3) має єдиний додатнозначний T-періодичний розв'язок.

Доведення. 1. Доведемо додатну інваріантність системи (1) – (3). Позначимо через $x_m(t,\varphi)$ розв'язок з початковою функцією φ. Спочатку доведемо, що $x_m(t,\varphi) > 0, t > 0$, якщо $\varphi(\theta) \geq 0$, $\theta \in [-h, 0]$, $\varphi(0) > 0$. Дійсно, при $t \in [0, h]$ рівняння (2), (3) набувають вигляду

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}\varphi(t-h) - \beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t), \tag{8}$$

$$x_m(t_k+0) = (1+d_k)x_m(t_k). \tag{9}$$

Розв'язок рівнянь (8), (9) з початковою умовою $x_m(0) = \varphi(0) > 0$ оцінюється знизу розв'язком рівняння

$$\dot{u}(t) = -\beta(t)u(t) - \gamma(t)u^2(t), \quad t \neq t_k,$$

$$u(t_k+0) = (1+d_k)u(t_k).$$

Розв'язок останнього рівняння є строго додатним при $t \in (0, h]$, оскільки $\varphi(0) > 0$ і $(1 + {}+d_k) > 0$. Аналогічно, розглядаючи рівняння на інтервалах $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$ і т. д., показуємо додатність розв'язку при всіх $t > 0$.

Для доведення додатності розв'язків $x_i(t)$ скористаємося наступними міркуваннями. В момент часу s з'являється $\alpha(s)\, x_m(s)$ незрілих індивидів. Враховуючи коефіцієнт смертності $\delta(s)$, з початкової кількості $\alpha(s)\, x_m(s)$ у момент часу t залишиться $\alpha(s)x_m(s)e^{-\int_s^t\delta(\xi)d\xi}$ індивидів. За припущенням $t - s \leq h$, тому

$$x_i(t) = \int\limits_{t-h}^{t} \alpha(s)x_m(s)e^{-\int_s^t\delta(\xi)d\xi}\, ds. \tag{10}$$

Оскільки $x_m(s) > 0$, з останньої рівності випливає додатність популяції $x_i(t)$.

Виконавши у рівняннях (2), (3) заміну змінних

$$x_m(t) = \omega(t)v(t) = \prod_{0\leq t_k<t}(1+d_k)e^{-\sigma t}v(t), \tag{11}$$

отримуємо рівняння без імпульсів

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t-h) - B(t)v(t) - C(t)v^2(t), \tag{12}$$

де

$$A(t) = \prod_{t-h\leq t_k<t}(1+d_k)^{-1}\alpha(t-h)\exp\left(\sigma h - \int\limits_{t-h}^{t}\delta(s)ds\right),$$

$$B(t) = \beta(t) - \sigma, \quad C(t) = \prod_{0\leq t_k<t}(1+d_k)e^{-\sigma t}\gamma(t).$$

Розв'язки рівняння (12) неперервні з неперервними зліва похідними.

Виберемо $M_0 > 0$ і $\Gamma > 1$ так, що

$$\frac{B(t) + C(t)M_0}{A(t)} \geq \Gamma$$

для всіх $t \geq 0$.

2. Покажемо, що розв'язки рівняння (12) є фінально рівномірно обмеженими, а саме, $\limsup_{t\to\infty} v(t,\varphi) \leq M_0$ для всіх невід'ємних початкових функцій φ. Припустимо від супротивного, що для деякого φ виконується $\limsup_{t\to\infty} v(t,\varphi) = M_1 > M_0$.

Якщо розв'язок монотонний, то $\lim_{t\to\infty} v(t,\varphi) < \infty$. Дійсно, якщо $v(t,\varphi) \to \infty$, то з (12) випливає, що починаючи з деякого моменту часу $v'(t,\varphi) < 0$, що суперечить припущенню $v(t,\varphi) \to \infty$. Отже, існує $A_0 = \lim_{t\to\infty} v(t,\varphi)$. При цьому $\lim_{t\to\infty} v'(t,\varphi) = 0$ (інакше $v(t,\varphi) \to \pm\infty$, що неможливо). Тому

$$\lim_{t\to\infty}(A(t)A_0 - B(t)A_0 - C(t)A_0^2) = 0$$

і $A_0 = 0$, або $A_0 = (A(t) - B(t))/C(t)$. При виконанні (6) рівність $A_0 = 0$ неможлива, тому $(A(t) - B(t))/C(t) = \mathrm{const} > 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. У цьому випадку рівняння має додатну асимптотично стійку нерухому точку $x(t) = A_0$ [9].

Якщо розв'язок немонотонний, то існує послідовність $\xi_k \to \infty$ така, що $v(\xi_k,\varphi) > M_0$, $\dot v(\xi_k,\varphi) = 0$, якщо ξ_k не збігається з точками імпульсної дії, і $\dot v(\xi_k,\varphi) \geq 0$, якщо $\xi_k = t_j$ для деякого j. Тому

$$v(\xi_k - h,\varphi) \geq \frac{B(\xi_k)v(\xi_k,\varphi) + C(\xi_k)v^2(\xi_k,\varphi)}{A(\xi_k)} \geq \Gamma M_0.$$

Якщо $\dot v(\xi_k - h,\varphi) \geq 0$, то з (12) отримуємо

$$v(\xi_k - 2h,\varphi) \geq \frac{B(\xi_k - h)v(\xi_k - h,\varphi) + C(\xi_k - h)v^2(\xi_k - h,\varphi)}{A(\xi_k - h)} \geq \Gamma^2 M_0.$$

Якщо $\dot v(\xi_k - h,\varphi) < 0$, то вибираємо першу зліва від $\xi_k - h$ точку ζ_1, де $\dot v(\zeta_1,\varphi) \geq 0$. За побудовою $v(\zeta_1,\varphi) > v(\xi_k - h,\varphi) \geq \Gamma M_0$. Аналогічно до попереднього $v(\zeta_1 - h,\varphi) \geq \Gamma^2 M_0$. Продовжуючи, отримуємо послідовність точок ζ_m таку, що $v(\zeta_m,\varphi) \geq \Gamma^m M_0$.

Нехай $\varphi^M = \sup_{\theta\in[-h,0]} \varphi(\theta)$. Виберемо k_0 так, що $\Gamma^{k_0} M_0 > \varphi^M$. Тоді $v(\zeta_k,\varphi) > \varphi^M$ при $k \geq k_0$. Вибираючи $\bar k \geq k_0$ так, щоб точка $\zeta_{\bar k}$ належала $[-h,0]$, приходимо до суперечності. З нескінченності послідовності ξ_k випливає, що таке $\bar k$ завжди існує.

Оскільки $\Gamma > 1$ довільне, в якості M_0 можна вибрати число $M_0 = \sup_t \dfrac{A(t) - B(t)}{C(t)}$.

3. Доведемо, що при виконанні (6) існує $m_0 > 0$ таке, що

$$\liminf_{t\to\infty} v(t,\varphi) \geq m_0 \tag{13}$$

для всіх початкових функцій $\varphi(\theta) \geq 0$, $\theta \in [-h,0]$, $\varphi(0) > 0$.

Припустимо, що (13) не виконується. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $v(t,\varphi)$ такий, що $\liminf_{t\to\infty} v(t,\varphi) < \varepsilon$. Існує послідовність точок $\{\tau_k\}$ така, що $v(\tau_k,\varphi) < \varepsilon$ і $v'(\tau_k,\varphi) = 0$, якщо τ_k не збігається з точками імпульсної дії, і $v'(\tau_k - 0,\varphi) \le 0$, якщо $\tau_k = t_j$ для деякого j. Звідси випливає, що

$$A(\tau_n)v(\tau_n - h) - B(\tau_n)v(\tau_n) - C(\tau_n)v^2(\tau_n) \le 0,$$

тому

$$v(\tau_n - h) \le \frac{B(\tau_n) + C(\tau_n)v(\tau_n)}{A(\tau_n)} v(\tau_n).$$

Оскільки $v(\tau_n) < \varepsilon$, з умови

$$\frac{B(t) + C(t)\varepsilon}{A(t)} \le \gamma < 1, \quad t \ge 0,$$

випливає $v(\tau_n - h) < \gamma\varepsilon$ (враховуючи (6), вибираємо γ так, щоб $\gamma A(t) - B(t) > 0$ для всіх t).

Якщо $v'(\tau_n - h) \le 0$, то

$$v(\tau_n - 2h) \le \frac{B(\tau_n - h) + C(\tau_n - h)v(\tau_n - h)}{A(\tau_n - h)}\gamma\varepsilon \le \gamma^2\varepsilon.$$

Якщо $v'(\tau_n - h) > 0$, то вибираємо першу зліва від $\tau_n - h$ точку θ_1, де $v'(\theta_1,\varphi) \le 0$.

Продовжуючи аналогічно, отримуємо послідовність точок θ_k таку, що $v(\theta_k,\varphi) \le \gamma^k\varepsilon$. Нехай $\varphi^L = \inf_{\theta\in[-h,0]}\varphi(\theta) > 0$. Виберемо k_1 так, що $\gamma^{k_1}\varepsilon < \varphi^L$. Вибираючи досить велике τ_n за початкове з нескінченної послідовності $\{\tau_n\}$, переконуємося, що існує $\theta_k \in [-h,0]$ таке, що $v(\theta_k,\varphi) \le \gamma^k\varepsilon < \varphi^L$. Суперечність. Якщо початкова функція $\varphi(\theta)$ не відокремлена від нуля, то в якості початкової функції розглядаємо розв'язок $v(t,\varphi)$, $t \in [0,h]$. За першою частиною доведення теореми він строго додатний і $\inf_{\theta\in[0,h]} v(\theta,\varphi) > 0$.

Отже, в якості m_0 можна вибрати число $m_0 = \inf_t \dfrac{A(t) - B(t)}{C(t)}$. При виконанні умови (6) рівняння (2), (3) перманентні. При обмеженому і відокремленому від нуля розв'язку $x_m(t)$ за формулою (10) легко отримати перманентність розв'язку $x_i(t)$.

4. Доведемо існування та єдиність періодичного розв'язку рівняння (12) при виконанні нерівності (7). Розглянемо два розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ такі, що $x(t) \ge m_0 - \varrho$, $y(t) \ge m_0 - \varrho$ для $t \ge 0$ з деяким малим $\varrho > 0$. Їх різниця $w(t) = x(t) - y(t)$ задовольняє лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt} w(t) = A(t)w(t-h) - w(t)\left(B(t) + C(t)(x(t) + y(t))\right). \tag{14}$$

За теоремою Разуміхіна [10, с. 154] рівняння (14) є рівномірно асимптотично стійким, якщо

$$A(t) \le \gamma_1\left(B(t) + C(t)(x(t) + y(t))\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

з довільною сталою $\gamma_1 < 1$.

Оскільки $x(t) + y(t) \geq 2(m_0 - \delta)$, то достатня умова для асимптотичної стійкості рівняння (14) має вигляд

$$\sup_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)} \leq 2 \inf_t \frac{A(t) - B(t)}{C(t)}. \tag{15}$$

Аналізуючи доведення теореми Разуміхіна [10, с. 153], можна зробити висновок, що рівняння (14) є асимптотично стійким рівномірно для всіх функцій $x(t)$ і $y(t)$, які задовольняють оцінки $x(t), y(t) \in [m_0, M_0]$ для всіх $t \geq 0$. А це й означає рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків рівняння (12), які набувають значень в інтервалі $[m_0, M_0]$. З рівномірної асимптотичної стійкості випливає, що для $\varepsilon > 0$ існує $\bar{t} = \bar{t}(\varepsilon)$ таке, що для всіх розв'язків $v(t, \varphi_1)$, $v(t, \varphi_2)$ рівняння (12) з початковими функціями $m_0 \leq \varphi_i(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, $i = 1, 2$, виконується

$$|v(t, \varphi_1) - v(t, \varphi_2)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 + \bar{t}(\varepsilon).$$

Отже, множина неперервних функцій

$$\mathcal{P} = \{\varphi(\theta) : m_0 \leq \varphi_i(\theta) \leq M_0, \theta \in [-h, 0]\}$$

під дією відображення $\varphi \to v_{kT}(\varphi)$, $v_{kT}(\varphi) = \{v(kT + \theta, \varphi) : -h \leq \theta \leq 0\}$ з деяким натуральним k переходить у себе, і це відображення є відображенням стиску. Тому існує kT-періодичний розв'язок $\bar{v}(t)$ рівняння (12). Оскільки $\bar{v}(t + T)$ також розв'язок T-періодичного рівняння (12) і $\bar{v}(t + T) - \bar{v}(t) \to 0$, $t \to \infty$, то $\bar{v}(t)$ є єдиним T-періодичним розв'язком рівняння (12).

Відповідно рівняння (2), (3) мають єдиний додатнозначний періодичний розв'язок $\bar{x}_m(t) = \omega(t)\bar{v}(t)$. Існування додатнозначного періодичного розв'язку рівняння (1) безпосередньо випливає з формули (10).

Теорему доведено.

Динаміка двох конкуруючих видів із віковою структурою. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1(t) = a_1(t)x_2(t) - a_1(t - h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds} x_2(t - h_1) - d_1(t)x_1(t), \tag{16}$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1(t - h_1)e^{-\int_{t-h_1}^{t} d_1(s)ds} x_2(t - h_1) - b_{11}(t)x_2(t) - b_{12}(t)x_2^2(t) - c_1(t)x_2(t)y_2(t), \tag{17}$$

$$\dot{y}_1(t) = a_2(t)y_2(t) - a_2(t - h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds} y_2(t - h_2) - d_2(t)y_1(t), \tag{18}$$

$$\dot{y}_2(t) = a_2(t - h_2)e^{-\int_{t-h_2}^{t} d_2(s)ds} y_2(t - h_2) - b_{21}(t)x_2(t) - b_{22}(t)y_2^2(t) - c_2(t)x_2(t)y_2(t) \tag{19}$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_2(t_k + 0) = (1 + d_k)x_2(t_k), \quad y_2(t_k + 0) = (1 + g_k)y_2(t_k) \tag{20}$$

у моменти часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Будемо припускати, що виконуються наступні умови:

C₁) функції $a_i(t),\ d_i(t),\ b_{ij}(t),\ c_i(t),\ i,j = 1,2$, кусково-неперервні, T-періодичні та додатнозначні, h_1 і h_2 — додатні сталі;

C₂) послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є строго зростаючою і задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом p;

C₃) $d_{k+p} = d_k$, $d_k \in (-1, d]$, $g_{k+p} = g_k$, $g_k \in (-1, d]$, для всіх $= 1, 2, k \in \mathbb{Z}, d > 0$.

Система рівнянь (16) – (20) описує еволюцію двох конкуруючих біологічних видів з віковою структурою та імпульсною дією. Тут через $x_1(t)$ і $x_2(t)$ позначено щільність незрілих та зрілих особин першого виду, через $y_1(t)$ і $y_2(t)$ — щільність незрілих та зрілих особин другого виду в момент часу t.

Виходячи з біологічної інтерпретації будемо розглядати розв'язки системи (16) – (20), які набувають невід'ємних значень. Тому початкові умови розв'язків задаються так:

$$x_1(0) > 0, \quad x_2(\theta) = \varphi(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-h_1, 0], \quad \varphi(0) > 0, \tag{21}$$

$$y_1(0) > 0, \quad y_2(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-h_2, 0], \quad \psi(0) > 0. \tag{22}$$

Як і раніше, будемо називати систему рівнянь (16) – (20) перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ з додатними початковими значеннями (21), (22) виконується

$$\liminf_{t\to\infty} x_i(t) \geq m_0, \quad \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \leq M_0, \tag{23}$$

$$\liminf_{t\to\infty} y_i(t) \geq m_0, \quad \limsup_{t\to\infty} y_i(t) \leq M_0, \quad i = 1, 2. \tag{24}$$

Введемо позначення

$$A_1(t) = a_1(t-h_1) \prod_{t-h_1 \leq t_k < t} (1+d_k)^{-1} e^{\sigma_1 h_1 - \int_{t-h_1}^t d_1(s)ds}, \quad B_1(t) = b_{11}(t) - \sigma_1,$$

$$C_1 = b_{12}(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1+d_k) e^{-\sigma_1 t}, \quad D_1(t) = c_1(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t},$$

$$A_2(t) = a_2(t-h_2) \prod_{t-h_2 \leq t_k < t} (1+g_k)^{-1} e^{\sigma_2 h_2 - \int_{t-h_2}^t d_2(s)ds}, \quad B_2(t) = b_{21}(t) - \sigma_2,$$

$$C_2 = b_{22}(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t}, \quad D_2(t) = c_2(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1+d_k) e^{-\sigma_1 t},$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t_k < T} \ln(1+d_k), \quad \sigma_2 = \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t_k < T} \ln(1+g_k),$$

$$\omega_1(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1+d_k) e^{-\sigma_1 t}, \quad \omega_2(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1+g_k) e^{-\sigma_2 t}.$$

Внаслідок періодичності системи (16) – (20) функції $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$ додатнозначні і T-періодичні.

Теорема 2. *Система (16) – (20) перманентна, якщо*

$$\inf_t \frac{A_1(t)-B_1(t)}{D_1(t)} > \sup_t \frac{A_2(t)-B_2(t)}{C_2(t)}, \quad \inf_t \frac{A_2(t)-B_2(t)}{D_2(t)} > \sup_t \frac{A_1(t)-B_1(t)}{C_1(t)}. \tag{25}$$

Доведення. В системі рівнянь (16) – (19) з імпульсною дією (20) рівняння (17) і (19) не залежать від інших. Виконавши у цій двовимірній системі заміну змінних $x_2(t) = \omega_1(t)u(t)$, $y_2(t) = \omega_2(t)v(t)$, отримаємо

$$\dot{u}(t) = A_1(t)u(t-h_1) - B_1(t)u(t) - C_1(t)u^2(t) - D_1(t)u(t)v(t), \tag{26}$$

$$\dot{v}(t) = A_2(t)v(t-h_2) - B_2(t)v(t) - C_2(t)v^2(t) - D_2(t)u(t)v(t). \tag{27}$$

Як і при доведенні теореми 1, отримуємо для розв'язків $u(t)$ і $v(t)$ з невід'ємними початковими умовами оцінки зверху

$$\limsup_{t\to\infty} u(t) \le M_{10} = \sup_{t\ge 0} \frac{A_1(t)-B_1(t)}{C_1(t)},$$

$$\limsup_{t\to\infty} v(t) \le M_{20} = \sup_{t\ge 0} \frac{A_2(t)-B_2(t)}{C_2(t)}$$

і знизу

$$\liminf_{t\to\infty} u(t) \ge m_{10} = \inf_{t\ge 0} \frac{A_1(t)-B_1(t)-D_1(t)M_{20}}{C_1(t)},$$

$$\liminf_{t\to\infty} v(t) \ge m_{20} = \inf_{t\ge 0} \frac{A_2(t)-B_2(t)-D_2(t)M_{10}}{C_2(t)}.$$

Розв'язки $x_1(t)$ і $y_1(t)$ задовольняють інтегральні рівності

$$x_1(t) = \int_{t-h_1}^{t} a_1(s)x_2(s)e^{-\int_s^t d_1(\xi)d\xi}ds,$$

$$y_1(t) = \int_{t-h_2}^{t} a_2(s)y_2(s)e^{-\int_s^t d_2(\xi)d\xi}ds.$$

З цих рівностей випливають оцінки для розв'язків $x_1(t)$ і $y_1(t)$ з невід'ємними початковими умовами:

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \le M_{10}\omega_1^M \sup_{t\ge 0} \int_{t-h_1}^{t} a_1(s)e^{-\int_s^t d_1(\xi)d\xi}\,ds,$$

$$\limsup_{t\to\infty} y_1(t) \le M_{20}\omega_2^M \sup_{t\ge 0} \int\limits_{t-h_2}^{t} a_2(s)e^{-\int_s^t d_2(\xi)d\xi}\,ds,$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge m_{10}\omega_1^L \inf_{t\ge 0} \int\limits_{t-h_1}^{t} a_1(s)e^{-\int_s^t d_1(\xi)d\xi}\,ds,$$

$$\liminf_{t\to\infty} y_1(t) \ge m_{20}\omega_2^L \inf_{t\ge 0} \int\limits_{t-h_2}^{t} a_2(s)e^{-\int_s^t d_2(\xi)d\xi}\,ds.$$

Отже, розв'язки системи рівнянь (26), (27), а також $x_2(t)$ і $y_2(t)$ (враховуючи обмеженість і додатність періодичних функцій $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$) перманентні, якщо $m_{10} > 0$, $m_{20} > 0$, що досягається при виконанні (25).

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай система (16) – (20) перманентна, а саме, її розв'язки з невід'ємними початковими даними задовольняють умови (23), (24) і додатково виконується нерівність*

$$\min_t \lambda(t) - \max_t (A_1(t), A_2(t)) > 0,$$

де $\lambda(t)$ *— найменше власне значення матриці* $(\Phi_2(t) + \Phi_2^T(t))/2$,

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} B_1 + C_1(u_1+u_1) + D_1 v_1 & D_1 u_2 \\ D_2 v_1 & B_2 + C_2(v_1+v_1) + D_2 u_2 \end{pmatrix},$$

а функції $u_i(t)$, $v_i(t)$ *задовольняють нерівності*

$$m_{10} \le u_i(t) \le M_{10}, \quad m_{20} \le v_i(t) \le M_{20}, \quad i = 1,2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді система має єдиний додатнозначний кусково-неперервний асимптотично стійкий T*-періодичний розв'язок.*

Доведення. Покажемо, що система (26), (27) є рівномірно асимптотично стійкою. Розглянемо два розв'язки $(u_1(t), v_1(t))$ і $(u_2(t), v_2(t))$. Їх різниці $w_1(t) = u_1(t) - u_2(t)$ і $w_2(t) = v_1(t) - v_2(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\dot w_1(t) = A_1(t)w_1(t-h_1) - \\ - \left(B_1(t) + C_1(t)(u_1(t)+u_2(t)) + D_1(t)v_1(t)\right) w_1(t) - D_1(t)u_2(t)w_2(t), \tag{28}$$

$$\dot w_2(t) = A_2(t)w_2(t-h_1) - \\ - \left(B_2(t) + C_2(t)(v_1(t)+v_2(t)) + D_2(t)u_2(t)\right) w_2(t) - D_2(t)v_1(t)w_1(t). \tag{29}$$

Система (28), (29) лінійна й однорідна відносно w_1, w_2. Перепишемо її у вигляді

$$\dot W(t) = \Phi_1(t)W(t-h) - \Phi_2(t)W(t), \tag{30}$$

де $W(t) = (w_1(t), w_2(t))$, $\Phi_1(t) = \operatorname{diag}\{A_1(t), A_2(t)\}$. Для дослідження її стійкості розглянемо функцію Ляпунова $V(t) = (w_1^2(t) + w_2^2(t))/2 = (W, W)/2$, де $(.,.)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$. Її похідна в силу системи дорівнює

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\Phi_1(t)W(t-h), W(t)) - (\Phi_2(t)W(t), W(t)).$$

Оцінимо похідну вздовж траєкторій, які задовольняють умову $V(\xi) < q^2 V(t)$ або, що еквівалентно, $\|W(\xi)\| < q\|W(t)\|$ для $t - h \leq \xi \leq t$, $q > 1$. Для цих t справедливою є оцінка

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq (q \max(A_1(t), A_2(t)) - \lambda(t))\|W(t)\|^2.$$

При виконанні умов теореми похідна $dV(t)/dt$ в цій точці t є від'ємно визначеною. За теоремою Разуміхіна [10] система (30) є рівномірно асимптотично стійкою. Вона має єдиний додатнозначний асимптотично стійкий періодичний розв'язок.

Теорему доведено.

1. *Aiello W. G., Freedman H. I.* A time-delay model of single-species growth with stage structure // Math. Biosci. — 1990. — **101**. — P. 139–153.
2. *Ciu S., Chen L., Agarwal R.* Recent progress on stage-structured population dynamics // Math. Comput. Modelling. — 2002. — **36**, № 11–13. — P. 1319–1360.
3. *Liu B., Beretta E.* Competitive systems with stage structure of distributed-delay type // J. Math. Anal. and Appl. — 2006. — **323**, № 1. — P. 331–343.
4. *Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y.* Asymptotic behaviors of competitive Lotka–Volterra system with stage structure // Ibid. — 2002. — **271**, № 1. — P. 124–138.
5. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* On the permanence of periodic predator-prey systems with stage structure and pulse action // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 543–558.
6. *Pang G., Wang F., Chen L.* Extinction and permanence in delayed stage-structure predator-prey system with impulsive effects // Chaos Solitons Fractals. — 2009. — **39**, № 5. — P. 2216 –2224.
7. *Song X., Cai L., Neumann A. U.* Ratio-dependent predator-prey system with stage structure for prey // Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B. — 2004. — **4**, № 3. — P. 747–758.
8. *Xu R., Chaplain M. A. J., Davidson F. A.* Permanence and periodicity of a delayed ratio-dependent predator-prey model with stage structure // J. Math. Anal. and Appl. — 2005. — **303**. — P. 602–621.
9. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. — Acad. Press, 1993. — 398 p.
10. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993. — 448 p.

Одержано 11.05.10