УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Бабенко, В. И. Слынько

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail: sofuslee@rambler.ru
vitstab@ukr.net

We study stability of the zero solution of a nonlinear dynamical equation over a time scale under certain assumptions made about the right-hand side of the equation. In addition to conditions that imply existence and uniqueness of a solution, we also assume that the exponential function for the linear approximation is bounded, and the norms of the nonlinear part and its derivatives are majorized by polynomial functions of the norm of the spatial variable. By using a Lyapunov function generalized method, we obtain sufficient conditions for stability of the zero solution of the nonlinear equation under consideration.

Досліджено стійкість нульового розв'язку нелінійного динамічного рівняння на часовій шкалі при деяких припущеннях щодо його правої частини. Крім умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші припускається, що експоненціальна функція лінійного наближення обмежена, а норми нелінійної частини і її похідних по компонентах просторової змінної мажоруються степеневими функціями від норми просторової змінної. На основі узагальненого методу функцій Ляпунова отримано достатні умови стійкості нульового розв'язку досліджуваного нелінійного рівняння.

Введение. Динамические уравнения на временных шкалах являются математическими моделями многих непрерывно-дискретных во времени процессов в медицине [1], экономике [2], математической биологии и экологии [3, 4] и др. Одной из важных задач, возникающих в процессе моделирования таких процессов, является задача об устойчивости решений динамических уравнений. Ее решению посвящено множество работ. В частности, в статье [5] положено начало исследованию динамических уравнений на временных шкалах. Выполнен также анализ устойчивости их решений методом, базирующимся на обобщенных интегральных неравенствах на временной шкале. В статье [6] рассмотрены линейные периодические системы динамических уравнений, заданных на временной шкале той же периодичности, и посредством матричнозначных функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости систем указанного класса. В работе [7] рассмотрены линейные системы динамических уравнений с постоянной и приводимой к жордановой форме матрицей и получены условия их экспоненциальной устойчивости.

Статья [8] посвящена исследованию экспоненциальной и равномерной экспоненциальной устойчивости решений линейных динамических уравнений при линейных и нелинейных возмущениях правой части. При этом рассматриваемые нелинейности характеризуются линейной по пространственной переменной оценкой. Основным инструментом исследования является неравенство Гронуолла на временной шкале.

В работе [9] с помощью матричнозначных функций Ляпунова исследована устойчивость нулевого решения нелинейного динамического уравнения в общем виде, в результате чего получены достаточные условия его устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости.

Целью данной статьи является получение достаточных условий асимптотической устойчивости решений нелинейного динамического уравнения в случае, когда экспоненциальная функция его линейного приближения является ограниченной на временной шкале, а нормы нелинейной части и ее производные по компонентам переменной x мажорируются положительной степенью и степенью с показателем большим -1 нормы переменной x соответственно. Для достижения поставленной цели предложено использовать одну модификацию обобщенного метода функций Ляпунова, базирующуюся на использовании функций разрывного типа [10].

Постановка задачи. Рассматривается нелинейное динамическое уравнение вида

$$x^{\Delta} = A(t)x + f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$, а матричнозначная функция $A : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и вектор-функция $f : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим предположениям:

H_1) функции $A(t)$ и $f(t,x)$ являются rd-непрерывными и $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$;

H_2) функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x в $\mathbb{R}^n$, т. е. существует $L > 0$ такое, что

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad \text{при всех} \quad (t,x_1),(t,x_2) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n;$$

H_3) существует функция $\Pi : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что $f(t,x) = \Pi(t,x)x$ и можно указать ρ_1- и ρ_2-окрестности точки $x = 0$ такие, что:

а) существуют положительные постоянные C_1 и ν_1 такие, что для всех x из окрестности $\|x\| < \rho_1$ равномерно по $t \in \mathbb{T}$ выполняется оценка

$$\|\Pi(t,x)\| \le C_1\|x\|^{\nu_1}; \tag{2}$$

б) для всех x таких, что $\|x\| < \rho_2$, существуют производные $\dfrac{\partial\Pi(t,x)}{\partial x_i}$, для которых справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial\Pi(t,x)}{\partial x_i}\right\| \le C_2\|x\|^{\nu_2}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

где $C_2 > 0$, $\nu_2 \in (-1,\infty)$, равномерно по $t \in \mathbb{T}$;

H_4) существует скалярная функция $\psi(s) > 0$ такая, что

$$\|e_A(t,s)\| \le \psi(s) \quad \text{при всех} \quad t \ge s \ge \tau_0,$$

где τ_0 — некоторый фиксированный элемент шкалы $\mathbb{T}$, а $e_A(t,s)$ обозначает экспоненциальную функцию [11] динамического уравнения $x^{\Delta}(t) = A(t)x$.

Предполагается также ограниченность функции зернистости $\mu(t)$ шкалы $\mathbb{T}$, т. е. существует $\mu_0 > 0$ такое, что $\mu(t) \leq \mu_0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Отметим, что регрессивность матрицы $A(t)$ и условие б) из H_3 гарантируют регрессивность функции [1] $A(t)x + f(t,x)$. Действительно, в силу неравенства (2) функция $f(t,x)$ не может быть линейной относительно переменной x, поэтому линейной частью функции $A(t)x + f(t,x)$ является $A(t)x$. Согласно известной теореме об обратной функции, для функции $\varphi(x) = x + \mu(t)(A(t)x + f(t,x))$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ существует обратная, если $\det(I + \mu(t)A(t)) \neq 0$, но это так согласно регрессивности матрицы $A(t)$. Таким образом, правая часть в уравнении (1) является регрессивной функцией в силу указанных предположений и условия H_1, H_2 гарантируют выполнение всех условий теоремы о существовании и единственности решения динамического уравнения [11].

При предположениях $H_1 - H_4$ поставим далее вопрос об устойчивости решения $x = 0$ уравнения (1).

Основной результат. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основных теорем, приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если матричнозначная функция $F(t,x) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ Δ-дифференцируема по t и непрерывно диференцируема по x, а функция $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ — Δ-дифференцируема, то функция $F(t, g(t))$ также Δ-дифференцируема и имеет место формула*

$$F^{\Delta}(t,g(t)) = F_t^{\Delta}(t,g) + \left\{ \int_0^1 F_x'(\sigma(t), g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t),$$

где $F_t^{\Delta}(t,g)$ обозначает Δ-производную функции $F(t,g)$ по явно содержащемуся времени.

Лемму 1 нетрудно доказать, используя теорему о Δ-дифференцировании сложной функции из работы [12].

В следующих леммах рассматривается вопрос о непрерывной зависимости от параметров и дифференцируемости по параметрам решений динамического уравнения

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x,\alpha), \tag{4}$$

заданного на временной шкале $\mathbb{T}$ и $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(t,x,\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) функция $f(t,x,\alpha)$, заданная при $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$, rd-непрерывна и регрессивна при каждом значении параметра α; 2) $f(t,x,\alpha)$ непрерывна по α в множестве $\mathcal{K}$, которое (как и множество $\mathcal{N}$) предполагается открытым; 3) для каждого $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathcal{N}$ и $\alpha_0 \in \mathcal{K}$ можно указать числа a, b, c, L такие, что n-мерный шар $\|x - x_0\| \leq b$ содержится в $\mathcal{N}$, m-мерный шар $\|\alpha - \alpha_0\| \leq c$ — в $\mathcal{K}$ и выполнено условие Липшица*

$$\|f(t,\overline{x},\alpha) - f(t,\overline{\overline{x}},\alpha)\| \leq L\|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\|$$

[1] Напомним [11], что функция $g : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется регрессивной в $t \in \mathbb{T}$, если для отображения $\varphi(x) = x + \mu(t)g(t,x)$ существует обратное, и регрессивной на $\mathbb{T}$, если g регрессивна в каждой точке t из $\mathbb{T}$. Часто регрессивными называют функции вида $F(t)$, т. е. не зависимые от x. В таких случаях подразумевается регрессивность функции $F(t)x$.

при $t \in I_a = (t_0 - a, t_0 + a)$, $\|\overline{x} - x_0\| \le b$, $\|\overline{\overline{x}} - x_0\| \le b$, $\|\alpha - \alpha_0\| \le c$.

Тогда решение $x = x(t; t_0, x_0, \alpha)$ *уравнения (4):*

а) определено при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, *где* $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1-\varepsilon}{L}\right)$, ε *— некоторое число, и*

$$M = \max_{t \in [t_0 - a, t_0 + a], \|x - x_0\| \le b, \|\alpha - \alpha_0\| \le c} \|f(t, x, \alpha)\|,$$

а если $h < \mu(t_0)$ $(h < \mu(\rho(t_0)))$ *и* t_0 *— разрывная справа (слева) точка, то определено при* $t \in [t_0 - h, \sigma(t_0)]$ $(t \in [\rho(t_0), t_0 + h])$;

б) является непрерывной функцией параметра α *в замкнутой области*

$$\|\alpha - \alpha_0\| \le c. \tag{5}$$

Доказательство. Пункт а) данной теоремы имеет место согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для динамического уравнения [11], которая применима для всех значений параметра из замкнутой области (5). Доказывая п. б), предположим, что $x(t)$ является решением уравнения (4) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующим значению $\overline{\alpha}$ параметра из множества (5), а $y(t)$ — решение уравнения (4) с тем же начальным условием, но соответствующим значению $\overline{\overline{\alpha}}$ параметра из множества (5). Рассмотрим функцию $z(t) = x(t) - y(t)$. Очевидно, что $z(t)$ является решением задачи Коши

$$z^{\Delta}(t) = f(t, z + y, \overline{\alpha}) - f(t, y, \overline{\alpha}) + R, \quad z(t_0) = 0, \tag{6}$$

где $R = f(t, y, \overline{\alpha}) - f(t, y, \overline{\overline{\alpha}})$.

Решение задачи (6) можно представить в виде

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, z(s) + y(s), \overline{\alpha}) - f(s, y(s), \overline{\alpha}) + R(s))\Delta s.$$

Обозначим через E_h промежуток существования решения $x(t; t_0, x_0, \alpha)$ уравнения (4) и оценим по норме при $t \in E_h$ обе части последнего равенства, в результате чего получим неравенства

$$\|z(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|R(s)\|\Delta s + \int_{t_0}^{t} \|f(s, z(s) + y(s), \overline{\alpha}) - f(s, y(s), \overline{\alpha})\|\Delta s \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \delta \Delta s + \int_{t_0}^{t} L\|z(s)\|\Delta s \le \delta h + L\int_{t_0}^{t} \|z(s)\|\Delta s, \quad \text{где} \quad \delta = \max_{t \in E_h} \|R(t)\|.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла на временной шкале [11], окончательно получим оценку нормы $z(t)$ в виде

$$\|z(t)\| \le \delta h \cdot e_L(t, t_0).$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(t, x, \alpha)$ по α в замкнутой области (5) по отношению к x и $t \in \mathbb{T}$, удовлетворяющим неравенствам $|t - t_0| \le a$, $\|x - x_0\| \le b$, δ будет сколь угодно мало, если только $\|\overline{\alpha} - \overline{\overline{\alpha}}\|$ достаточно мал.

Лемма 3. *Пусть функция $f(t, x, \alpha)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) функция $f(t, x, \alpha)$, заданная при $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$, rd-непрерывна и регрессивна при каждом значении параметра α; 2) $f(t, x, \alpha)$ непрерывна по α в множестве $\mathcal{K}$, которое (как и множество $\mathcal{N}$) предполагается открытым; 3) для каждого $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathcal{N}$ и $\alpha_0 \in \mathcal{K}$ можно указать числа a, b, c, L такие, при которых замкнутая область $\|x - x_0\| \le b$ содержится в $\mathcal{N}$, замкнутая область $\|\alpha - \alpha_0\| \le c$ — в $\mathcal{K}$, функция f p раз непрерывно дифференцируема относительно $x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в области, определенной b и c-окрестностью.*

Тогда уравнение (4) имеет решение $x = x(t; t_0, x_0, \alpha)$, определенное, как в п. а) леммы 2, и непрерывно дифференцируемое p раз относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в замкнутой области $\|\alpha - \alpha_0\| \le c$.

Лемму 3 нетрудно доказать, используя теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для динамического уравнения [11] и доказательство теоремы о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по параметрам и по начальным условиям (см., например, [13]).

Рассмотрим далее динамическое уравнение вида

$$x^{\Delta}(t) = C(t, x)x, \tag{7}$$

в котором $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}^n$, а функция $C(t, x)x$ является rd-непрерывной и удовлетворяет условиям а), б) предположения H_3. Условие б), как отмечалось ранее, обеспечивает регрессивность $C(t, x)x$. Такие требования существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (7) соблюдены.

Поставим задачу: найти достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (7), решение которой даст возможность получить достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения исходного уравнения (1).

Пусть $e_C(t, t_0, p)$ — экспоненциальная функция линейного динамического уравнения с параметром $p : x^{\Delta}(t) = C(t, p)x(t)$. Обозначим через $\Phi(t, \tau_k, p)$ оператор эволюции линейного динамического матричного уравнения

$$\begin{aligned}(I + \mu(t)C(t, p))^T P_t^{\Delta}(t, p)(I + \mu(t)C(t, p)) + P(t, p)C(t, p) + \\ + C^T(t, p)P(t, p) + \mu(t)C^T(t, p)P(t, p)C(t, p) = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

т. е. оператор, переводящий произвольную квадратную матрицу P_0 порядка n в решение $P(t, p)$ уравнения (8) с начальным условием $P(t_0, p) = P_0$ при всех $p \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим также некоторую возрастающую неограниченную последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек шкалы $\mathbb{T}$, имеющую свойство $\sup_{k \in \mathbb{N}}(\tau_{k+1} - \tau_k) < \infty$. Тогда имеет место лемма об оценке нормы оператора Φ.

Лемма 4. *При предположениях, приведенных выше относительно правой части уравнения (7), существуют положительные постоянные K_1, r такие, что выполняется* *оценка*

$$\sup_{\tau_k \le s \le t} \|\Phi(\sigma(t), \sigma(s), x)\| \le K_1 \tag{9}$$

при всех $\|x\| < r$ *и* $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ *равномерно по* $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Рассмотрим динамическое уравнение

$$x^\Delta = (\ominus C)(t,p)x, \quad x(s,p) = x_0, \tag{10}$$

где p является n-мерным параметром, $\ominus C$ обозначает матрицу $\ominus C(t,p) = -C(t,p)(I + +\mu(t)C(t,p))^{-1}$. Решение задачи Коши (10) находится по известной формуле $x(t,p) = = e_{\ominus C}(t,s,p)x_0$. С другой стороны, $x(t,p)$ можно представить в виде

$$x(t,p) = x_0 + \int_s^t (\ominus C)(\tau,p)\, x(\tau,p)\Delta\tau,$$

откуда получаем оценку нормы $x(t,p)$ в виде

$$\|x(t,p)\| \le \|x_0\| + \int_s^t \|(\ominus C)(\tau,p)\|\, \|x(\tau,p)\|\Delta\tau \le \|x_0\| +$$

$$+ \int_s^t \|C(\tau,p)\|\, \|(I + \mu(\tau)C(\tau,p))^{-1}\| \|x(\tau,p)\|\Delta\tau.$$

Поскольку матрица $C(t,p)$ регрессивна и удовлетворяет предположению H_3, существует $r \le \min\{\rho_1, \rho_2\}$, для которого функция $\|C(t,p)\|\|(I + \mu(t)C(t,p))^{-1}\|$ является ограниченной в области $\|p\| < r$, т. е. существует положительная постоянная $\widetilde{K}_1$ такая, что $\|C(t,p)\|\, \|(I + \mu(t)C(t,p))^{-1}\| \le \widetilde{K}_1$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и любых $\|p\| < r$.

Таким образом,

$$\|x(t,p)\| \le \|x_0\| + \int_s^t \widetilde{K}_1 \|x(\tau,p)\|\Delta\tau.$$

Воспользовавшись далее обобщенным неравенством Гронуолла [12], получим оценку

$$\|x(t,p)\| \le \|x_0\| e_{\widetilde{K}_1}(t,s) \quad \text{при всех} \quad t \ge s. \tag{11}$$

Поскольку $\widetilde{K}_1 > 0$ и $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, при $\tau_k \le s \le t$, исходя из определения экспоненциальной функции, имеем

$$\begin{aligned} e_{\widetilde{K}_1}(t,s) &= \exp\left\{\int\limits_s^t \lim_{\xi\searrow\mu(\tau)} \frac{Ln(1+\xi\widetilde{K}_1)}{\xi}\Delta\tau\right\} \le \\ &\le \exp\left\{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lim_{\xi\searrow\mu(\tau)} \frac{Ln(1+\xi\widetilde{K}_1)}{\xi}\Delta\tau\right\} \le \\ &\le \exp\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1}-\tau_k)\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{\tau\in[\tau_k,\tau_{k+1})}\frac{Ln(1+\mu(\tau)\widetilde{K}_1)}{\mu(\tau)}\right\} =: \widetilde{K}_2 > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Последнее выражение действительно является конечным числом, так как необходимая для этого конечность супремума разности $\tau_{k+1}-\tau_k$ по $k \in \mathbb{T}$ является свойством последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из (11), (12) и свойств экспоненциальной функции получаем оценку нормы $e_C^{-1}(t,s,p)$

$$\|e_C^{-1}(t,s,p)\| = \|e_{\ominus C}(t,s,p)\| = \sup_{\|x_0\|\neq 0}\frac{\|e_{\ominus C}(t,s,p)x_0\|}{\|x_0\|} = \sup_{\|x_0\|\neq 0}\frac{\|x(t,p)\|}{\|x_0\|} \le \widetilde{K}_2 \tag{13}$$

при всех $\|p\| < r$, $\tau_k \le s \le t$ и $t \in [\tau_k,\tau_{k+1})$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$.

Можно показать, что оператор $\Phi(t,t_0,p)$ представляется в виде

$$\Phi(t,t_0,p)X = (e_C^{-1}(t,t_0,p))^T X e_C^{-1}(t,t_0,p) \tag{14}$$

при любых $t_0, t \in \mathbb{T}$. Используя формулу (14) и свойства экспоненциальной функции, получаем представление

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma(t),\sigma(s),p)X &= (e_C^{-1}(\sigma(t),\sigma(s),p))^T X e_C^{-1}(\sigma(t),\sigma(s),p) = \\ &= \left((I+\mu(s)C(s,p))e_C^{-1}(t,s,p)(I+\mu(t)C(t,p))^{-1}\right)^T X\times \\ &\times (I+\mu(s)C(s,p))e_C^{-1}(t,s,p)(I+\mu(t)C(t,p))^{-1}, \end{aligned}$$

которое в силу предположения H_3 и последней полученной оценки доказывает справедливость оценки (9).

Приведем теперь теорему [10], которая является одной из основных, на которых базируется исследование устойчивости решений динамических уравнений с помощью функций из класса разрывных относительно $t \in \mathbb{T}$ функций [10].

Теорема 1. *Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая неограниченная последовательность точек из шкалы $\mathbb{T}$. Предположим, что уравнение*

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x(t)), \quad f(t,0) = 0, \tag{15}$$

такое, что существуют функция $v(t,x)$, принадлежащая классу разрывных относительно t функций (с разрывами в точках τ_k), и функции $a(.)$, $b(.)$ и $c(.)$ класса Хана, для которых выполняются условия:

1) $0 \le v(t,x) \le c(\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in \mathbb{T} \times \Omega$,

2) $v(\tau_k, x) \ge a(\|x\|)$ *при всех* $(k,x) \in \mathbb{N} \times \Omega$,

3) $v^{\Delta}\Big|_{(11)}(t,x) \le 0$ *при всех* $(t,x) \in Q \times \Omega$,

4) $v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) \le -b(\|x(\tau_k - 0)\|)$ *при всех* $(k, x(\tau_k - 0)) \in \mathbb{N} \times \Omega$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— открытая связная окрестность точки* $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения (15) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Напомним [10], что функция $v(t,x)$ принадлежит классу разрывных относительно t функций, если:

1) $v(t,x)$ — Δ-дифференцируема в $Q = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$, $Q_k = \{t : t \in \langle \tau_k, \tau_{k+1})\}$ и локально липшицева по x в каждом Q_k (здесь $\langle t_1, t_2)$ обозначает $[t_1, t_2)$, если $t_1 < \sigma(t_1)$, и (t_1, t_2), если $t_1 = \sigma(t_1)$);

2) для любой точки (τ_k, x), для которой $\rho(\tau_k) = \tau_k$, существует конечный предел $v(\tau_k - 0, x) = \lim_{(t,y)\to(\tau_k - 0, x)} v(t,y)$.

Для t, рассеянных слева, дополнительно определим $v(t-0,x) = v(\rho(t),x)$. При этом под выражением $v(t-0, x(t-0))$ для произвольной rd-непрерывной функции $x(t)$ следует понимать предел $\lim_{s \to t-0} v(s, x(s))$, если $\rho(t) = t$, и выражение $v(\rho(t), x(\rho(t)))$, если $\rho(t) < t$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть для динамического уравнения (7) существуют:*

i) возрастающая неограниченная последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ *точек шкалы* $\mathbb{T}$, *имеющая свойство* $\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1} - \tau_k) < \infty$;

ii) симметричная положительно определенная матрица X *такая, что в некоторой* ρ*-окрестности точки* $x = 0$ *равномерно по* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$x^T\big((I + \mu(\rho(\tau_k))C^T(\rho(\tau_k), x))X(I + \mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k), x)) -$$
$$- (e_C^{-1}(\rho(\tau_k), \tau_{k-1}, x))^T X e_C^{-1}(\rho(\tau_k), \tau_{k-1}, x)\big)x < -\delta(\|x\|)\|x\|^2,$$

где $\delta(r)$ *— дифференцируемая в* ρ*-окрестности нуля функция класса Хана, удовлетворяющая условиям:*

а) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}} = \infty$;

б) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\delta(r)}{\delta'(r) r^{\nu_1+1}} = \infty$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения (7) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $v(t,x) = x^T P(t,x)x$, где функция $P : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется равенством

$$P(t,p) = \Phi(t, \tau_k, p)X - \int\limits_{\tau_k}^{t} \Phi(t, \sigma(s), p)Q(p)\Delta s, \tag{16}$$

где $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $p \in \mathbb{R}^n$, X, $Q(p)$ — положительно определенные $(n\times n)$-матрицы, причем $Q(p)$ является функцией, дифференцируемой по компонентам p_i вектора p.

Нетрудно видеть, что $v(t,x)$ принадлежит классу разрывных относительно t функций (с разрывами в точках τ_k).

Покажем, что матрицы X и $Q(p)$ можно выбрать так, чтобы определенная посредством формулы (16) функция $v(t,x)$ удовлетворяла при выполнении условий данной теоремы всем требованиям теоремы 1. Для этого вычислим разность $\Delta v = v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0))$. Находим

$$\Delta v = x^T(\tau_k)P(\tau_k, x(\tau_k))x(\tau_k) - x^T(\tau_k - 0)P(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0))x(\tau_k - 0) =$$

$$= x^T(\tau_k)\left(\Phi(\tau_k, \tau_k, x(\tau_k))X - \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k} \Phi(\tau_k, \sigma(s), x(\tau_k))Q(x(\tau_k))\Delta s\right)x(\tau_k) -$$

$$- x^T(\tau_k - 0)\Bigg(\Phi(\tau_k - 0, \tau_{k-1}, x(\tau_k - 0))X -$$

$$- \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k - 0} \Phi(\tau_k - 0, \sigma(s), x(\tau_k - 0))Q(x(\tau_k - 0))\Delta s\Bigg)x(\tau_k - 0) =$$

$$= x^T(\tau_k)Xx(\tau_k) - x^T(\tau_k - 0)\Bigg(\Phi(\tau_k - 0, \tau_{k-1}, x(\tau_k - 0))X -$$

$$- \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k - 0} \Phi(\tau_k - 0, \sigma(s), x(\tau_k - 0))Q(x(\tau_k - 0))\Delta s\Bigg)x(\tau_k - 0).$$

Использовав свойства решений динамических уравнений, выразим $x(\tau_k)$ через $x(\tau_k - 0)$. Для точки τ_k возможны два случая: или она разрывна слева или плотная слева. Покажем, что выражение для Δv, получающееся в первом случае, является таким же и во втором. Действительно, пусть точка τ_k разрывная слева, т. е. $\rho(\tau_k) < \tau_k$, тогда, по определению, $v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) = v(\rho(\tau_k), x(\rho(\tau_k)))$. Поскольку $x(t)$ — решение уравнения (7), справедливо равенство

$$x^\Delta(\rho(\tau_k)) = \frac{x(\tau_k) - x(\rho(\tau_k))}{\mu(\rho(\tau_k))} = C(\rho(\tau_k), x(\rho(\tau_k)))x(\rho(\tau_k)),$$

откуда

$$x(\tau_k) = (I + \mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k), x(\rho(\tau_k))))\,x(\rho(\tau_k)). \tag{17}$$

Подставив в выражение для Δv вместо $x(\tau_k)$ правую часть из (17), получим

$$\Delta v = x^T(\tau_k - 0)\left((I + \mu(\rho(\tau_k))C^T(\rho(\tau_k), x(\tau_k - 0)))\, X\times\right.$$
$$\times\,(I + \mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k), x(\tau_k - 0))) - \Phi(\rho(\tau_k), \tau_{k-1}, x(\tau_k - 0))X)\, x(\tau_k - 0)+$$
$$+\, x^T(\tau_k - 0)\left(\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} \Phi(\rho(\tau_k), \sigma(s), x(\tau_k - 0))Q(x(\tau_k - 0))\Delta s\right) x(\tau_k - 0). \qquad (18)$$

Если τ_k — плотная слева точка ($\rho(\tau_k) = \tau_k$), то, по определению, $v(\tau_k - 0, x(\tau_k - -0)) = \lim_{s\to\tau_k-0} v(s, x(s))$. Покажем, что в данном случае имеет место предельное равенство $\lim_{s\to\tau_k-0} x(s) = x(\tau_k)$. Исходя из уравнения (7), при некотором начальном условии $x(t_0) = x_0$, $x(\tau_k)$ вычисляем по формуле $x(\tau_k) = x_0 + \int_{t_0}^{t} C(\tau, x(\tau))x(\tau)\Delta\tau$. Оценим норму разности $x(\tau_k) - x(s)$ при любом $s \in \mathbb{T}$ таком, что $t_0 \le s \le \tau_k$:

$$\|x(\tau_k) - x(s)\| = \left\|\int\limits_{t_0}^{\tau_k} C(\tau, x(\tau))x(\tau)\Delta\tau - \int\limits_{t_0}^{s} C(\tau, x(\tau))x(\tau)\Delta\tau\right\| =$$
$$= \left\|\int\limits_{s}^{\tau_k} C(\tau, x(\tau))x(\tau)\Delta\tau\right\| \le$$
$$\le \int\limits_{s}^{\tau_k} \|C(\tau, x(\tau))x(\tau)\|\Delta\tau \le$$
$$\le (\tau_k - s) \max_{\tau\in[t_0,\tau_k]} \|C(\tau, x(\tau))x(\tau)\|,$$

т. е. функция $x(t)$ действительно непрерывна слева в плотных слева точках шкалы. Этот факт совместно с равенством $\mu(\rho(\tau_k)) = 0$ доказывает, что формула (18) правильна и в случае плотной слева точки τ_k.

Согласно условию ii) теоремы первая в (18) псевдоквадратичная форма мажорируется функцией $-\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2$, где $\delta(r)$ — дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая условиям а) и б) теоремы. Таким образом, имеет место оценка

$$\Delta v \le -\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2+$$
$$+\, x^T(\tau_k - 0)\left(\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} \Phi(\rho(\tau_k), \sigma(s), x(\tau_k - 0))Q(x(\tau_k - 0))\Delta s\right) x(\tau_k - 0),$$

если $\|x\| < \min\{\rho, \rho_1\}$. Воспользовавшись далее (9), получим также оценку

$$\Delta v < -\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2 +$$

$$+ \|x(\tau_k - 0)\|^2 \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} \|\Phi(\rho(\tau_k), \sigma(s), x(\tau_k - 0))\| \|Q(x(\tau_k - 0))\| \Delta s \leq$$

$$\leq -\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2 + \|x(\tau_k - 0)\|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} K_1 \|Q(x(\tau_k - 0))\| \Delta s \leq -\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2 +$$

$$+ \|x(\tau_k - 0)\|^2 K_1 \sup_{k \in \mathbb{N}} (\tau_k - \tau_{k-1}) \|Q(x(\tau_k - 0))\| \Delta s,$$

справедливую при всех $\|x\| < \min\{\rho, r\}$. Положив $Q(x) = \Gamma\delta(\|x\|)I$, где $\Gamma = (2K_1 \sup_{k \in \mathbb{N}}(\tau_k - \tau_{k-1}))^{-1}$, окончательно получим

$$\Delta v \leq -\frac{1}{2}\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2, \tag{19}$$

если только $\|x(\tau_k - 0)\| < \min\{\rho, r\}$.

Вычислим теперь дельта-производную функции $v(t, x)$ в силу уравнения (7) на промежутке времени $[\tau_k, \tau_{k+1})$:

$$v^\Delta(t, x)\Big|_{(7)} = x^T(t)P(t, x)x^\Delta(t) + (x^T(t)P(t, x))^\Delta x(\sigma(t))\Big|_{(7)} =$$

$$= x^T(t)P(t, x)x^\Delta(t) +$$

$$+ (x^T(\sigma(t))P^\Delta(t, x) + (x^\Delta(t))^T P(t, x))(x(t) + \mu(t)x^\Delta(t))\Big|_{(7)} =$$

$$= x^T(P(t, x)C(t, x) + C^T(t, x)P(t, x) + \mu(t)C^T(t, x)P(t, x)C(t, x) +$$

$$+ (I + \mu(t)C(t, x))^T P^\Delta(t, x)(I + \mu(t)C(t, x)))x\Big|_{(7)}.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$P^\Delta(t, x)\Big|_{(7)} = P_t^\Delta(t, x) + \left\{ \int\limits_0^1 P'_x(\sigma(t), x(t) + h\mu(t)x^\Delta(t))dh \right\} x^\Delta(t)\Big|_{(7)} =$$

$$= P_t^\Delta(t, x) + \left\{ \int\limits_0^1 P'_x(\sigma(t), x(t) + h\mu(t)C(t, x)x)dh \right\} C(t, x)x =$$

$$= P_t^\Delta(t, x) + Y(t, x)C(t, x)x,$$

где $Y(t,x)$ обозначает выражение в скобках. Тогда производная $v^{\Delta}(t,x(t))$ при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$ будет равна

$$v^{\Delta}(t,x(t))\Big|_{(7)} = x^T(P(t,x)C(t,x)+C^T(t,x)P(t,x)+ \\ +\mu(t)C^T(t,x)P(t,x)C(t,x)+(I+\mu(t)C(t,x))^T P_t^{\Delta}(t,x)(I+\mu(t)C(t,x)))x+ \\ +x^T(I+\mu(t)C(t,x))^T Y(t,x)C(t,x)xx.$$

Поскольку решение уравнения (8) находится по формуле $P(t,p)=\Phi(t,t_0,p)P_0$, решение на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$ неоднородного уравнения, образующегося из (8) прибавлением в правую часть матрицы $-Q(p)$, находится, как нетрудно в этом убедиться, по формуле (16). Следовательно, на промежутке $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$

$$v^{\Delta}(t,x(t))\Big|_{(7)} = -x^TQ(x)x+x^T(I+\mu(t)C^T(t,x))Y(t,x)C(t,x)xx. \tag{20}$$

Продифференцировав далее обе части уравнения

$$(I+\mu(t)C^T(t,x))P_t^{\Delta}(t,x)(I+\mu(t)C(t,x))+P(t,x)C(t,x)+ \\ +C^T(t,x)P(t,x)+\mu(t)C^T(t,x)P(t,x)C(t,x)=-Q(x) \tag{21}$$

по x_i, $i=1,2,\ldots,n$, получим n уравнений

$$(I+\mu(t)C^T(t,x))\frac{\partial P_t^{\Delta}(t,x)}{\partial x_i}(I+\mu(t)C(t,x))+\frac{\partial P(t,x)}{\partial x_i}C(t,x)+ \\ +C^T(t,x)\frac{\partial P(t,x)}{\partial x_i}+\mu(t)C^T(t,x)\frac{\partial P(t,x)}{\partial x_i}C(t,x)=-M_i(t,x), \\ i=1,2,\ldots,n,$$

где $M_i(t,x)$ обозначает сумму

$$\mu(t)\left(\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}\right)^T P_t^{\Delta}(t,x)(I+\mu(t)C(t,x))+\mu(t)(I+\mu(t)C^T(t,x))P_t^{\Delta}(t,x)\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}+ \\ +P(t,x)\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}\right)^T P(t,x)+\mu(t)\left(\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}\right)^T P(t,x)C(t,x)+ \\ +\mu(t)C^T(t,x)P(t,x)\left(\frac{\partial C(t,x)}{\partial x_i}\right)^T+\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{22}$$

Однородные уравнения, порожденные уравнениями (22), имеют тот же вид, что и уравнение (8), поэтому решения (22) на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$ находятся по формулам

$$\frac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}=\Phi(\sigma(t),\tau_k,x)\frac{\partial P(\tau_k,x)}{\partial x_i}-\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\Phi(\sigma(t),\sigma(s),x)M_i(s,x)\Delta s$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $P(\tau_k, x) = X$, то $\dfrac{\partial P(\tau_k, x)}{\partial x_i} = 0$ в силу постоянности матрицы X. Следовательно,

$$\frac{\partial P(\sigma(t), x)}{\partial x_i} = -\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \Phi(\sigma(t), \sigma(s), x) M_i(s, x) \Delta s, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из оценки (9) следует существование положительных постоянных K_2 и K_3 таких, что

$$\|P(t, x)\| \le K_2, \quad \|P_t^{\Delta}(t, x)\| \le K_3 \tag{23}$$

при всех $\|x\| < r$ и $t \in \mathbb{T}$. Действительно, из формулы (16) имеем

$$\|P(t, x)\| \le \|\Phi(t, \tau_k, x) X\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} \|\Phi(t, \sigma(s), x) Q(x)\| \Delta s \le$$

$$\le \|\Phi(t, \tau_k, x)\| \, \|X\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} \|\Phi(t, \sigma(s), x)\| \, \|Q(x)\| \Delta s.$$

Отсюда в силу оценок (9) и (13) получаем

$$\|P(t, x)\| \le \widetilde{K}_2^2 \|X\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} K_1 \|Q(x)\| \Delta s \le \widetilde{K}_2^2 \|X\| + (\tau_{k+1} - \tau_k) K_1 \times$$

$$\times \sup_{\|x\| < r} \|Q(x)\| \le \widetilde{K}_2^2 \|X\| + K_1 \sup_{k \in \mathbb{N}} (\tau_{k+1} - \tau_k) \sup_{\|x\| < r} \|Q(x)\| =: K_2, \tag{24}$$

если $\|x\| < r$. Как уже упоминалось, функция $P(t, x)$ является решением динамического уравнения (21) на промежутке $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, которое можно записать в сокращенном виде

$$P_t^{\Delta}(t, x) = \mathcal{A} P(t, x) + Q_1(t, x), \tag{25}$$

где оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A} P(t, x) = -(I + \mu(t) C^T(t, x))^{-1} \big(P(t, x) C(t, x) + C^T(t, x) P(t, x) +$$

$$+ \mu(t) C^T(t, x) P(t, x) C(t, x) \big) (I + \mu(t) C(t, x))^{-1}$$

и является ограниченным в r-окрестности точки $x = 0$ вследствие того, что матрица $C(t, x)$ удовлетворяет предположению H_3. По той же причине, а также в силу выбора $Q(x)$ функция $Q_1(t, x) = -(I + \mu(t) C^T(t, x))^{-1} Q(x) (I + \mu(t) C(t, x))^{-1}$ ограничена в области $\|x\| < r$. Отсюда, используя оценку (24) и уравнение (25), легко получить вторую в (23) оценку, что доказывает справедливость (23) при всех $\|x\| < r$ и $t \in \mathbb{T}$.

Используя оценки (9), (23), а также выражение (22) для $M_i(t,x)$, находим оценку нормы $\dfrac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}$ на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$:

$$\left\|\frac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}\right\| \le \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} \|\Phi(\sigma(t),\sigma(s),x)\|\,\|M_i(s,x)\|\Delta s \le \int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)} K_1\|M_i(s,x)\|\Delta s \le$$

$$\le K_1\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\left(2\mu(s)\left\|\frac{\partial C(s,x)}{\partial x_i}\right\|\,\|P_s^{\Delta}(s,x)\|(1+\mu(s)\|C(s,x)\|)+2\|P(s,x)\|\left\|\frac{\partial C(s,x)}{\partial x_i}\right\|+\right.$$

$$\left.+\,2\mu(s)\left\|\frac{\partial C(s,x)}{\partial x_i}\right\|\,\|P(s,x)\|\,\|C(s,x)\|+\left\|\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right\|\right)\Delta s\le$$

$$\le K_1\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\left(2\left\|\frac{\partial C(s,x)}{\partial x_i}\right\|(K_3\mu(s)(1+\mu(s)\|C(s,x)\|)+K_2+\right.$$

$$\left.+\,K_2\mu(s)\|C(s,x)\|)+\left\|\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right\|\right)\Delta s\le$$

$$\le K_1\int\limits_{\tau_k}^{\sigma(t)}\left(2C_2\|x\|^{\nu_2}(K_2+K_3\mu_0)(1+C_1\mu_0\|x\|^{\nu_1})+\left\|\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right\|\right)\Delta s\le$$

$$\le K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\,(2(C_2K_2+C_2K_3\mu_0)\|x\|^{\nu_2}+2(C_2K_2C_1\mu_0+$$

$$+\,C_2K_3C_1\mu_0^2)\|x\|^{\nu_1+\nu_2}+\left\|\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right\|\Big) =: h(\|x\|)+K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\left\|\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right\|$$

при всех $\|x\|<r$, $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$ и $k\in\mathbb{N}$.

Если x выбрать принадлежащим окрестности нуля радиуса $\widetilde{\rho}$, выбранного меньшим положительного решения γ_+ уравнения $\gamma^{\nu_1+1}C_1\mu_0+\gamma-r=0$, то получим

$$\|x+h\mu(t)C(t,x)x\|\le\|x\|+\mu(t)\|C(t,x)\|\|x\|\le\|x\|+\mu_0C_1\|x\|^{\nu_1+1}<$$

$$<\gamma_++\mu_0C_1\gamma_+^{\nu_1+1}=r,\quad h\in[0,1],$$

т. е. полученная для $\left\|\dfrac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}\right\|$ оценка будет справедлива и в точке $\xi=x+h\mu(t)C(t,x)x$:

$$\left\|\left.\frac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}\right|_{x=\xi}\right\|\le h(\|\xi\|)+K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\left\|\left.\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\xi}\right\|\le$$

$$\le h(\|x\|+C_1\mu_0\|x\|^{\nu_1+1})+K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\left\|\left.\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\xi}\right\|. \tag{26}$$

Используя неравенство (26) и выражение для $Y(t,x)$, получаем оценку

$$\|Y(t,x)\| \leq \left\| \int\limits_0^1 P'_x(\sigma(t),\xi)dh \right\| \leq \int\limits_0^1 \|P'_x(\sigma(t),\xi)\|dh =$$

$$= \widetilde{C} \int\limits_0^1 \max_{1\leq i\leq n} \left\| \frac{\partial P(\sigma(t),x)}{\partial x_i}\Big|_{x=\xi} \right\| dh = \widetilde{C}h(\|x\| + C_1\mu_0\|x\|^{\nu_1+1}) +$$

$$+ \widetilde{C}K_1(\sigma(\tau_{k+1}) - \tau_k) \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=\xi} \right\| dh.$$

Учитывая, что $Q(x) = \Gamma\delta(\|x\|)I$, оцениваем максимум во втором слагаемом:

$$\max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=\xi} \right\| dh = \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial Q(r)}{\partial r}\Big|_{r=\|\xi\|} \right\| \left| \frac{\partial\|\xi\|}{\partial x_i} \right| dh =$$

$$= \Gamma \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \delta'(\|\xi\|) \left| \frac{\partial}{\partial x_i}\|x + h\mu(t)C(t,x)x\| \right| dh \leq$$

$$\leq \Gamma \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \delta'(\|x\| + hC_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1}) \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\| + hC_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1}) \right| dh =$$

$$= \Gamma \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \delta'(\|x\| + hC_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(1 + hC_1\mu(t)(\nu_1+1)\|x\|^{\nu_1}) \left| \frac{\partial\|x\|}{\partial x_i} \right| dh.$$

Поскольку, как нетрудно в этом убедиться, $\left| \dfrac{\partial\|x\|}{\partial x_i} \right| \leq 1$, то

$$\max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial Q(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=\xi} \right\| dh \leq \Gamma \max_{1\leq i\leq n} \int\limits_0^1 \delta'(\|x\| + hC_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(1 + hC_1\mu(t)\times$$

$$\times (\nu_1+1)\|x\|^{\nu_1})dh = \Gamma\delta'(\|x\| + \theta C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(1 + \theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|x\|^{\nu_1}),$$

$$\theta \in [0,1].$$

Таким образом,

$$\|Y(t,x)\| \leq \widetilde{C}h(\|x\| + C_1\mu_0\|x\|^{\nu_1+1}) + \widetilde{C}K_1(\sigma(\tau_{k+1}) - \tau_k)\times$$

$$\times \Gamma\delta'(\|x\| + \theta C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(1 + \theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|x\|^{\nu_1}), \tag{27}$$

где $\|x\| < \widetilde{\rho}, \theta \in [0,1]$.

Используя (27), находим оценку нормы второго слагаемого в выражении (20) для дельта-производной функции $v(t,x)$:

$$\|x^T(I+\mu(t)C^T(t,x))Y(t,x)C(t,x)xx\| \le C_1\|x\|^{\nu_1+3}(1+C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1})\times$$

$$\times\|Y(t,x)\| \le C_1\widetilde{C}h(\|x\|+C_1\mu_0\|x\|^{\nu_1+1})(\|x\|^{\nu_1+3}+C_1\mu(t)\|x\|^{2\nu_1+3})+$$

$$+C_1\widetilde{C}K_1(\sigma(\tau_{k+1})-\tau_k)\Gamma\delta'(\|x\|+\theta C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(\|x\|^{\nu_1+3}+$$

$$+C_1\mu(t)\|x\|^{2\nu_1+3})(1+\theta C_1\mu(t)(\nu_1+1)\|x\|^{\nu_1}) =: \Sigma_1\|x\|^{\nu_1+\nu_2+3}+$$

$$+o(\|x\|^{\nu_1+\nu_2+3})+\delta'(\|x\|+\theta C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(\Sigma_2\|x\|^{\nu_1+3}+o(\|x\|^{\nu_1+3})),$$

где $\|x\| < \widetilde{\rho}$. Здесь Σ_1 и Σ_2 являются ограниченными функциями от μ.

Таким образом, оценка Δ-производной v вдоль решений уравнения (7) принимает вид

$$v^\Delta(t,x(t))\big|_{(7)} \le -\Gamma\delta(\|x\|)\|x\|^2+\Sigma_1\|x\|^{\nu_1+\nu_2+3}+o(\|x\|^{\nu_1+\nu_2+3})+$$

$$+\ \delta'(\|x\|+\theta C_1\mu(t)\|x\|^{\nu_1+1})(\Sigma_2\|x\|^{\nu_1+3}+o(\|x\|^{\nu_1+3})) = W(\|x\|). \qquad (28)$$

Использовав приведенные в условии теоремы свойства функции $\delta(r)$, выясним свойства функции $W(r)$. С этой целью вычислим предел

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+\nu_2+1}+o(r^{\nu_1+\nu_2+1})+\delta'(\overline{r})(\Sigma_2 r^{\nu_1+1}+o(r^{\nu_1+1}))},$$

где $\overline{r} = r+\theta C_1\mu(t)r^{\nu_1+1}$. Заметим, что взаимоотношение функций $\delta'(r)$ и r^{ν_2} исчерпывается двумя взаимоисключающими случаями, а именно, $\delta'(r) = O(r^{\nu_2})$ или $r^{\nu_2} = o(\delta'(r))$. В первом случае предел $\mathcal{L}$ равен

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+\nu_2+1}+o(r^{\nu_1+\nu_2+1})+\Sigma_2 O(1)r^{\nu_1+\nu_2+1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}}}{\Sigma_1+\Sigma_2 O(1)+o(1)} = \frac{\lim\limits_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}}}{\lim\limits_{r\to 0}(\Sigma_1+\Sigma_2 O(1)+o(1))} = \infty,$$

согласно условию а) теоремы. То же самое имеем во втором случае

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\Sigma_1 r^{\nu_1+1}o(\delta'(r))+o(r^{\nu_1+1}o(\delta'(r)))+\delta'(\overline{r})(\Sigma_2 r^{\nu_1+1}+o(r^{\nu_1+1}))} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{(\Sigma_1 o(1)+\Sigma_2)\delta'(r)r^{\nu_1+1}+o(r^{\nu_1+1}\delta'(r))} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{\delta(r)}{\delta'(r)r^{\nu_1+1}}}{(\Sigma_1+1)o(1)+\Sigma_2} = \infty,$$

согласно условию б) теоремы.

Следовательно, $\mathcal{L} = +\infty$, т. е. существует ρ_3-окрестность точки $x = 0$, для всех x из которой слагаемое $-\Gamma\delta(\|x\|)\|x\|^2$ является по модулю большим остальных слагаемых в правой части неравенства (28). Это означает, что поведение функции $W(\|x\|)$ в указанной окрестности полностью определяется поведением функции $-\Gamma\delta(\|x\|)\|x\|^2$, т. е. имеет место представление $W(\|x\|) = -\delta_1(\|x\|)$, где $\delta_1(r)$ — функция класса Хана. Таким образом, при всех $\|x\| < \min\{\widetilde{\rho}, \rho_3\}$ выполняется неравенство

$$v^{\Delta}(t, x(t))\big|_{(7)} \le -\delta_1(\|x\|). \tag{29}$$

Далее, очевидна оценка

$$v(\tau_k, x(\tau_k)) = x^T\Phi(\tau_k, \tau_k, x)Xx = x^TXx \ge \lambda_{\min}(X)\|x\|^2,$$

где $\lambda_{\min}(X)$ — наименьшее собственное число матрицы X.

Справедлива также формула

$$v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) = v(t, x(t)) + \int\limits_t^{\tau_k} v^{\Delta}(s, x(s))\Delta s$$

при всех $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, откуда имеем равенство

$$v(\tau_k, x(\tau_k)) = v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) + v(t, x(t)) + \int\limits_t^{\tau_k} v^{\Delta}(s, x(s))\Delta s.$$

Учитывая, что $v(\tau_k, x(\tau_k)) = x^T(\tau_k)Xx(\tau_k)$, из последнего интегрального равенства выразим $v(t, x(t))$:

$$v(t, x(t)) = x^T(\tau_k)Xx(\tau_k) - \Delta v(\tau_k, x(\tau_k)) - \int\limits_t^{\tau_k} v^{\Delta}(s, x(s))\Delta s.$$

Полученное представление посредством неравенств (19) и (29) дает оценку снизу для $v(t, x(t))$:

$$v(t, x(t)) \ge x^T(\tau_k)Xx(\tau_k) + \frac{1}{2}\delta(\|x(\tau_k - 0)\|)\|x(\tau_k - 0)\|^2 + \int\limits_t^{\tau_k} \delta_1(\|x(s)\|)\Delta s \ge 0. \tag{30}$$

Полагая $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \min\{\rho, \widetilde{\rho}, \rho_3\}\}$, из (19), (29), (30) заключаем о выполнении условий 1 – 4 теоремы 1. Таким образом, утверждение указанной теоремы справедливо, т. е. решение $x = 0$ уравнения (7) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Если в условии ii) теоремы 2 экспоненциальную функцию $e_C(\rho(\tau_k), \tau_{k-1}, x)$ заменить некоторой ее аппроксимацией, то при определенных дополнительных условиях, наложенных на функцию $\delta(r)$, получим новые условия устойчивости решения $x = 0$ динамического уравнения (7). Данный результат содержится в следствии 1.

Следствие 1. *Пусть для динамического уравнения (7) существуют:*

i) возрастающая неограниченная последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ *точек шкалы* $\mathbb{T}$, *имеющая свойство* $\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1}-\tau_k) < \infty$;

ii) симметричная положительно определенная матрица X *такая, что в некоторой* θ*-окрестности точки* $x = 0$ *равномерно по* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$x^T\Big((I+\mu(\rho(\tau_k))C^T(\rho(\tau_k),x))X(I+\mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k),x))-$$

$$-\left(e_C^{(m)}(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),x)\right)^T Xe_C^{(m)}(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),x)\Big)x < -\delta(\|x\|)\|x\|^2,$$

где $\delta(r)$ — *дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}} = \infty \quad \textit{и} \quad \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\delta'(r)r^{\nu_1+1}} = \infty,$$

а m *находится из условия*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{(m+1)\nu_1}} = \infty.$$

Тогда решение $x = 0$ *уравнения (7) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $x^{(l)} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$:

$$x^{(l)}(t) = \Bigg(I+\int_{t_0}^{t} C(s_1,p)\Delta s_1 + \int_{t_0}^{t} C(s_1,p)\int_{t_0}^{s_1} C(s_2,p)\Delta s_1\Delta s_2 + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\ldots\int_{t_0}^{s_{l-1}} C(s_1,p)C(s_2,p)\ldots C(s_m,p)\Delta s_1\Delta s_2\ldots\Delta s_l\Bigg)x_0,$$

$$l \in \mathbb{N}, \quad s_0 = t, \quad x^{(0)}(t) \equiv x_0.$$

Функциональная последовательность сумм в правой части данного выражения образует ряд

$$\mathcal{S}(t) = I + \int_{t_0}^{t} C(s_1,p)\Delta s_1 + \sum_{l=2}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\ldots\int_{t_0}^{s_{l-1}}\prod_{i=1}^{l} C(s_i,p)\Delta s_i, \tag{31}$$

абсолютно сходящийся для любого t из шкалы $\mathbb{T}$ и $\|p\| < \rho_1$, причем на каждом конечном отрезке $[s,t]$ шкалы сходимость равномерна. Действительно, оценим, использовав предположение a), норму l-го члена ряда (31):

$$\|a_l\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{l-1}} \prod_{i=1}^{l} C(s_i, p)\Delta s_i \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{l-1}} \prod_{i=1}^{l} \|C(s_i, p)\|\Delta s_i \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{l-1}} \Delta s_1 \Delta s_2 \ldots \Delta s_l \right| C_1^l \|p\|^{l\nu_1} \leq |t - t_0|^l C_1^l \|p\|^{l\nu_1}.$$

Пусть $|t - t_0| \leq h$ ($h > 0$), тогда оценка примет вид

$$\|a_l\| \leq h^l C_1^l \|p\|^{l\nu_1}.$$

Очевидно, что числовой ряд $\sum_{l=0}^{\infty}(hC_1\|p\|^{\nu_1})^l$ сходится, как только выполняется неравенство $\|p\| < (C_1 h)^{-1/\nu_1}$. Тогда на основании обобщенного для произвольной шкалы $\mathbb{T}$ признака Вейерштрасса сходимости функциональных рядов [14] получаем, что при $\|p\| < \min\left\{\rho_1, (C_1 h)^{-1/\nu_1}\right\}$ функциональный ряд (31) сходится равномерно на отрезке $[t_0, t]$ длины, не большей h.

Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\widetilde{x}(t) = \lim\limits_{l\to\infty} x^{(l)}(t)$ является решением динамического уравнения[2] (7) с начальным условием $\widetilde{x}(t_0) = x_0$, следовательно, $\widetilde{x}(t) = e_C(t, t_0, p)x_0$. Поскольку данное равенство справедливо при всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, отсюда заключаем, что экспоненциальная функция $e_C(t, t_0, p)$ является суммой функционального ряда (31). Обозначая через $e_C^{(m)}(t, t_0, p)$ m-ю частную сумму ряда для $e_C(t, t_0, p)$, имеем оценку

$$\left\| e_C(t, s, p) - e_C^{(m)}(t, s, p) \right\| \leq \sum_{l=m+1}^{\infty} (hC_1\|p\|^{\nu_1})^l = \|p\|^{(m+1)\nu_1} \sum_{l=m+1}^{\infty} h^l C_1^l \|p\|^{\nu_1(l-m-1)}, \quad (32)$$

означающую, что

$$e_C^{(m)}(t, s, p) = e_C(t, s, p) + O\left(\|p\|^{(m+1)\nu_1}\right)$$

при всех $|t - s| < h$ и $\|p\| < \min\{\rho_1, (C_1 h)^{-1/\nu_1}\}$. Используя свойства экспоненциальной функции, из (32) получаем равенство

$$e_C^{(m)}(\tau_{k-1}, \rho(\tau_k), x) = e_C^{-1}(\rho(\tau_k), \tau_{k-1}, x) + O\left(\|x\|^{(m+1)\nu_1}\right),$$

справедливое при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\|x\| < \min\{\rho_1, (C_1 \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(\tau_k - \tau_{k-1}))^{-1/\nu_1}\}$, правую часть которого подставим в неравенство условия ii) следствия вместо $e_C^{(m)}(\tau_{k-1}, \rho(\tau_k), x)$. В ре-

[2] При подстановке $\widetilde{x}(t)$ в динамическое уравнение необходимо Δ-дифференцировать почленно ряд (31). Правомерность осуществления такой операции следует из того факта, что равномерно сходится ряд $\{\mathcal{S}_l^{\Delta}(t)\}_{l=0}^{\infty}$, где $\mathcal{S}_l(t)$ — частные суммы ряда (31), и тогда, согласно теореме о Δ-дифференцировании функциональных рядов на шкале [14], имеет место равенство $\mathcal{S}^{\Delta}(t) = \lim\limits_{l\to\infty} \mathcal{S}_l^{\Delta}(t)$.

зультате получим

$$
\begin{gathered}
x^T\Big((I+\mu(\rho(\tau_k))C^T(\rho(\tau_k),x))X(I+\mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k),x))- \\
-\Big(e_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x)+O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})\Big)^T X\times \\
\times\Big(e_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x)+O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})\Big)\Big)x < -\delta(\|x\|)\|x\|^2, \\
x^T\Big((I+\mu(\rho(\tau_k))C^T(\rho(\tau_k),x))X(I+\mu(\rho(\tau_k))C(\rho(\tau_k),x))- \\
-(e_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x))^T X e_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x)\Big)x < \\
< x^T\Big(O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})Xe_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x)+ \\
+(e_C^{-1}(\rho(\tau_k),\tau_{k-1},x))^T X O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})\Big)x+ \\
+O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})\|x\|^2-\delta(\|x\|)\|x\|^2 \le -\delta(\|x\|)\|x\|^2+O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})\|x\|^2,
\end{gathered}
\tag{33}
$$

как только $\|x\| < \eta_1 := \min\{\theta,\rho_1,(C_1\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(\tau_k-\tau_{k-1}))^{-1/\nu_1}\}$.

В силу третьего свойства функции $\delta(r)$ существует $\eta_2 > 0$ такое, что функция $\delta(\|x\|)+$ $+O(\|x\|^{(m+1)\nu_1})$ равна некоторой функции $\delta_1(\|x\|)$ класса Хана в η_2-окрестности точки $x=0$ и при этом имеет все свойства функции $\delta(r)$ в теореме 2. Положив ρ в условии теоремы 2 равным $\min\{\eta_1,\eta_2\}$, из (33) заключаем о выполнении условий i), ii) данной теоремы, что доказывает следствие.

Рассмотрим функцию

$$B(t,x)=e_A^{-1}(t,\tau_0)(I+\mu(t)A(t))^{-1}\Pi(t,e_A(t,\tau_0)x)e_A(t,\tau_0).$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему об устойчивости решения $x=0$ уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть для динамического уравнения (1), правая часть которого удовлетворяет предположениям H_1-H_4, существуют:*

i) возрастающая неограниченная последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ точек шкалы $\mathbb{T}$, имеющая свойство $\sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1}-\tau_k)<\infty$;

ii) симметричная положительно определенная матрица X такая, что в некоторой θ-окрестности точки $y=0$ равномерно по $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$
\begin{gathered}
y^T\left(e_{B,m}(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),y)\right)^T\left[e_{B,m}^T(\tau_k,\tau_{k-1},y)\,Xe_{B,m}(\tau_k,\tau_{k-1},y)-X\right]\times \\
\times e_{B,m}(\tau_{k-1},\rho(\tau_k),y)y < -\delta(\|y\|)\|y\|^2,
\end{gathered}
$$

где $\delta(r)$ — дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{\nu_1+\nu_2+1}}=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{\delta'(r)r^{\nu_1+1}}=\infty,$$

а m находится из условия

$$\lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{(m+1)\nu_1}} = \infty.$$

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво на множестве $\mathbb{T}_0 = [\tau_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$.

Доказательство. В уравнении (1) выполним замену переменных по формуле

$$x(t) = e_A(t, \tau_0) y(t). \tag{34}$$

Подставив (34) в (1) и воспользовавшись формулой Δ-дифференцирования произведения двух функций [5, 11, 12], получим динамическое уравнение

$$(I + \mu(t)A(t)) e_A(t, \tau_0) y^{\Delta}(t) = f(t, e_A(t, \tau_0) y(t)). \tag{35}$$

Поскольку по предположению H_1 матрица A является регрессивной на $\mathbb{T}$, матрица $I + \mu(t)A(t)$ невырожденна при всех $t \geq \tau_0$, и поэтому уравнение (35) можно решить относительно $y^{\Delta}(t)$ в явном виде

$$y^{\Delta}(t) = e_A^{-1}(t, \tau_0)(I + \mu(t)A(t))^{-1} f(t, e_A(t, \tau_0) y(t)).$$

Учитывая предположение H_3, заменим в данном уравнении $f(t, x)$ на $\Pi(t, x)x$, в результате чего получим

$$y^{\Delta}(t) = B(t, y) y. \tag{36}$$

Поскольку функция $B(t, y)y$ является нелинейной по переменной y, то и регрессивной также, так как отображение $\psi(x) = x + B(t, x)x$ обратимо при всех $t \in \mathbb{T}$, по крайней мере, в некоторой окрестности нуля. Легко также видеть, что $B(t, y)$ удовлетворяет всем предположениям, которые формулировались выше относительно свойств функции $C(t, x)$.

Условия данной теоремы гарантируют выполнение требований следствия 1, согласно которому решение $y = 0$ уравнения (36) асимптотически устойчиво. Соотношение (34) дает возможность доказать, что отсюда следует и асимптотическая устойчивость решения $x = 0$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}_0$. Поскольку решение $y = 0$ устойчиво, существует $\delta = \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{\psi(\tau_0)}, t_0\right)$ такое, что если $\|y_0\| < \delta$, то $\|y(t; t_0, y_0)\| < \dfrac{\varepsilon}{\psi(\tau_0)}$ при всех $t \geq t_0$. Положим $\delta_1 = \dfrac{\delta}{\|e_A(\tau_0, t_0)\|}$, тогда при всех x_0 таких, что $\|x_0\| < \delta_1$, будет

$$\|y_0\| = \|e_A^{-1}(t_0, \tau_0) x_0\| = \|e_A(\tau_0, t_0) x_0\| \leq \|e_A(\tau_0, t_0)\| \, \|x_0\| < \delta,$$

а также

$$\|x(t; t_0, x_0)\| = \|e_A(t, \tau_0) y(t; t_0, y_0)\| \leq \|e_A(t, \tau_0)\| \|y(t; t_0, y_0)\| < \psi(\tau_0) \frac{\varepsilon}{\psi(\tau_0)} = \varepsilon$$

при всех $t \geq t_0$, что доказывает устойчивость нулевого решения уравнения (1) на множестве $\mathbb{T}_0 = [\tau_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$. Асимптотическая устойчивость очевидно следует из соотношения (34) и предположения H_4.

Заключительные замечания. Рассмотренный в настоящей статье случай в исследовании нелинейных динамических уравнений на временной шкале охватывает и так называемый критический случай, когда ограниченной является не только норма экспоненциальной функции линейного приближения, но и норма функции, обратной к экспоненциальной. Поэтому подход, предложенный в данной статье для исследования нелинейных уравнений, может быть использован для решения задачи об устойчивости в указанном критическом случае.

1. *Jones M. A., Song B., Thomas D. M.* Controlling wound healing through debridement // Math. and Comput. Modelling. — 2004. — **40**, issues 9–10. — P. 1057–1064.
2. *Ferhan M. Atici, Daniel C. Biles, Alex Lebedinsky.* An application of time scales to economics // Ibid. — 2006. — **43**, № 7–8. — P. 718–726.
3. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
4. *Pospisil Z.* Dynamic replicator equation and its transformation // Difference Equat. and Appl. — Istanbul, Turkey : Bahcesehir Univ. Press, 2009. — P. 251–258.
5. *Aulbach B., Hilger S.* A unified approach to continuous and discrete dynamics // Qualitative Theory Different. Equat. / Eds Sz.-Nagy, L. Hatvani. — New York: North-Holland, 1990. — P. 37–56.
6. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* О построении матричнозначной функции Ляпунова для линейной периодической системы на временной шкале // Докл. РАН. — 2007. — **417**, № 1. — С. 18–22.
7. *Doan T. S., Kalauch A., Siegmund S.* Exponential stability of linear time-invariant systems on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2009. — **9**, № 1. — P. 37–50.
8. *DaCunha J. J.* Dynamic inequalities, bounds, and stability of systems with linear and nonlinear perturbations // Ibid. — 2009. — **9**, № 3. — P. 239–248.
9. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* К теории устойчивости движения нелинейной системы на временной шкале // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 6. — С. 776 –782.
10. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Об устойчивости решений динамических уравнений на основе функций разрывного типа // Доп. НАН України. — 2009. — № 9. — С. 7–12.
11. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Boston etc.: Birkhäser, 2001. — 358 p.
12. *Бохнер М., Мартынюк А. А.* Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. — 2007. — **43**, № 9. — С. 3–27.
13. *Зубов В. И.* Теория колебаний: Учеб. пос. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
14. *Mozyrska D., Pawluszvicz E.* Funct. series on time scales // Int. J. Math. and Statistics. — 2008. — **2**, № 8. — P. 94–105.

Получено 17.11.09