УДК 517.977.1

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

В. П. Яковець

Ун-т менеджменту освіти
Україна, 01601, Київ, вул. Артема, 52-а

О. В. Тарасенко

Ніжин. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We construct an asymptotic solution to singularly perturbed optimal control problem in the case where the boundary-value matrices make a regular bundle.

Построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в случае регулярного пучка граничных матриц.

Нехай задано процес, який описується системою диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + B(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, $B(t,\varepsilon)$ — $(n \times m)$-матриця, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ — m-вимірний вектор керування, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Розглянемо задачу про знаходження керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система (1) переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{2}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{3}$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (C(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u. \tag{4}$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ є дійсними або комплекснозначними і допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k A_k(t), \quad B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k B_k(t); \tag{5}$$

2) коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, розвинень (5) нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$;

3) матриця $C(t, \varepsilon)$ є симетричною, додатно визначеною і допускає на $[0; T]$ рівномірне асимптотичне розвинення

$$C(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k C_k(t), \tag{6}$$

коефіцієнти якого нескінченно диференційовні на $[0; T]$;

4) область допустимих значень для керування $u(t, \varepsilon)$ збігається з усім заданим m-вимірним простором.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, розглядалася в [1, 2], де припускалось, що всі власні значення матриці $A_0(t)$ є уявними.

У даній статті вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку цієї задачі у більш загальному випадку з використанням результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), виконаного в роботах [3, 4].

Застосувавши до даної задачі принцип максимуму Л. С. Понтрягіна [5], побудуємо функцію Гамільтона

$$H(t, x, p, u) = \varepsilon^{-h}(A(t, \varepsilon)x, p) + \varepsilon^{-h}(B(t, \varepsilon)u, p) - \frac{1}{2\varepsilon^h}\,(C(t, \varepsilon)u, u),$$

де p — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Для мінімізації критерію (4) необхідно, щоб

$$\operatorname{grad}_u H = \varepsilon^{-h} B^*(t, \varepsilon)p - \varepsilon^{-h} C(t, \varepsilon)u = 0,$$

$$\frac{dp}{dt} = -\operatorname{grad}_x H = -\varepsilon^{-h} A^*(t, \varepsilon)p.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + B(t, \varepsilon)u,$$

$$\varepsilon^h\, \frac{dp}{dt} = -A^*(t, \varepsilon)p, \tag{7}$$

$$0 = B^*(t, \varepsilon)p - C(t, \varepsilon)u.$$

Введемо в розгляд $(2n + m)$-вимірний вектор

$$y = \operatorname{col}(x, p, u). \tag{8}$$

Тоді співвідношення (7) можна записати у вигляді

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t)\dot{y} = \tilde{A}(t, \varepsilon)y, \tag{9}$$

де

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{A}_k(t), \tag{10}$$

$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & B_k(t) \\ 0 & -A_k^*(t) & 0 \\ 0 & B_k^*(t) & -C_k(t) \end{pmatrix}$, $k = 0,1,2,\ldots,$ — блочні матриці, в яких E — одинична матриця n-го порядку, а символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів.

Як відомо [3, 4], побудова асимптотичних розв'язків цієї системи залежить від структури спектра граничної в'язки матриць

$$\tilde{A}_0(t) - \lambda \tilde{B}(t). \tag{11}$$

Будемо припускати, що

$$\det C_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T]. \tag{12}$$

Оскільки $\det(\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}(t)) = (-1)^{n+m}\det(A_0(t)-\lambda E)\det(A_0^*(t)+\lambda E)\det C_0(t)$, то в'язка матриць (11) буде регулярною на $[0;T]$, а її скінченні елементарні дільники збігаються з елементарними дільниками матриць $A_0(t)$ і $A_0^*(t)$.

З умови (12) також випливає, що всі нескінченні елементарні дільники в'язки (11), кількість яких дорівнює m, є простими.

У даній статті розглянемо випадок, коли всі скінченні елементарні дільники $\lambda - \lambda_i(t)$, $\lambda + \bar{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, також є простими, тобто виконуються умови

$$\lambda_i(t) - \lambda_j(t) \neq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad \forall t \in [0;T], \tag{13}$$

$$\lambda_i(t) + \bar{\lambda}_j(t) \neq 0, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad \forall t \in [0;T]. \tag{14}$$

Крім того, будемо вважати, що

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) < 0 \quad \forall t \in [0;T]. \tag{15}$$

Власні вектори матриці $A_0(t)$, що відповідають її власним значенням $\lambda_i(t)$, позначимо через $\varphi_i(t)$, а відповідні базисні вектори нуль-простору матриці $(A_0(t) - \lambda_i B(t))^*$ — через $\psi_i(t)$. Оскільки $A_0(t)$ є нескінченно диференційовною на $[0;T]$, то вектори $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, можна визначити так, щоб їх елементи також були нескінченно диференційовними на заданому відрізку [6]. Крім того, їх можна вибрати так, щоб виконувалися співвідношення

$$(\varphi_i(t), \psi_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера [4, с. 35].

Оскільки $\deg\,\det(\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}(t)) = \operatorname{rank}\tilde{B}(t) = 2n$, то система (9) задовольняє умову „ранг-степінь” [7]. Отже, її загальний розв'язок є лінійною комбінацією $2n$ лінійно незалежних розв'язків, асимптотику яких згідно з [4] можна побудувати у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad i = \overline{1,2n},$$

де $v_i(t,\varepsilon)$ — $(2n+m)$-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями за степенями ε.

Виходячи з цього, розв'язок даної системи, який задовольняє крайові умови (3), (4), будемо шукати у вигляді

$$y_r(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{0}^{t}\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_{t}^{T}\tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad (17)$$

де

$$v_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k v_{ki}(t), \quad \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t), \quad (18)$$

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\tilde{v}_{ki}(t), \quad \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = -\bar{\lambda}_i(t) + \sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t), \quad (19)$$

а $r \geq h$ — довільне натуральне число.

Підставивши (17) у систему (9) і прирівнявши вирази при однакових експонентах, дістанемо

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)v_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t,\varepsilon)\tilde{B}(t)v_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\tilde{B}(t)(v_i(t,\varepsilon))', \quad (20)$$

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)\tilde{B}(t)\tilde{v}_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\tilde{B}(t)(\tilde{v}_i(t,\varepsilon))', \quad i = \overline{1,n}. \quad (21)$$

Зафіксувавши індекс i, розглянемо окремо кожне з рівнянь (20), (21).

Прирівнявши в (20) коефіцієнти при однакових степенях ε, із урахуванням розвинень (5), (6), (18) будемо мати

$$(\tilde{A}_0(t) - \lambda_i(t)\tilde{B}(t))v_{0i}(t) = 0, \quad (22)$$

$$(\tilde{A}_0(t) - \lambda_i(t)\tilde{B}(t))v_{ki}(t) = \tilde{b}_k^{(i)}(t), \quad k = \overline{1,r}, \quad (23)$$

де

$$\tilde{b}_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k}\lambda_s(t)\tilde{B}(t)v_{k-s,i}(t) - \sum_{s=1}^{k}\tilde{A}_k(t)v_{k-s,i}(t) + \tilde{B}(t)(v_{k-h,i}(t))', \quad k = \overline{1,r}. \quad (24)$$

З рівняння (22) знаходимо

$$v_{0i}(t) = c_{0i}^{(1)}\tilde{\varphi}_i(t), \tag{25}$$

де

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \mathrm{col}\,(\varphi_i(t); 0; 0) \tag{26}$$

— власний вектор матриці $\tilde{A}_0(t)$ відносно матриці $\tilde{B}(t)$, що відповідає власному значенню $\lambda_i(t)$, а $c_{0i}^{(1)}$ — сталий множник, який підлягає визначенню.

Із урахуванням (25), (26) вектор $\tilde{b}_1^{(i)}(t)$ можна подати у вигляді

$$\tilde{b}_1^{(i)}(t) = c_{0i}^{(1)}\mathrm{col}\,(b_1^{(i)}(t); 0; 0), \tag{27}$$

де

$$\begin{gathered} b_1^{(i)}(t) = \lambda_1^{(i)}(t)\varphi_i(t) - g_1^{(i)}(t), \\ g_1^{(i)}(t) = A_1(t)\varphi_i(t) - \delta_{1,h}\varphi_i'(t). \end{gathered} \tag{28}$$

Рівняння (23) будуть розв'язними відносно векторів $v_k^{(i)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься умова

$$(\tilde{b}_k^{(i)}, \tilde{\psi}_i) = 0, \quad k = \overline{1, r}, \tag{29}$$

де $\tilde{\psi}_i(t)$ — елемент нуль-простору матриці $(A_0(t) - \lambda_i(t)E)^*$. Виходячи з структури матриць $\tilde{A}_0(t)$, $\tilde{B}(t)$, неважко переконатися, що

$$\tilde{\psi}_i(t) = \mathrm{col}\,\Big(\psi_i(t); D_0^{(i)}(t)\psi_i(t); (C_0^*(t))^{-1}B_0^*(t)\psi_i(t)\Big), \tag{30}$$

де

$$D_0^{(i)}(t) = (R_0^{(i)}(t))^{-1}B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t), \tag{31}$$

$$R_0^{(i)}(t) = A_0(t) + \bar{\lambda}_i(t)E. \tag{32}$$

Тоді згідно з (27), (28), (30), (16) умову (29) для вектора $\tilde{b}_1^{(i)}(t)$ запишемо у вигляді

$$(\lambda_1^{(i)}(t) - (g_1^{(i)}(t), \psi_i(t)))c_{0i}^{(1)} = 0,$$

звідки

$$\lambda_1^{(i)}(t) = (g_1^{(i)}(t), \psi_i(t)).$$

Тепер рівняння (23) при $k = 1$ є розв'язним, а його розв'язок знайдемо за формулою

$$v_{1i}(t) = \tilde{H}_i(t)\tilde{b}_1^{(i)}(t) + c_{1i}^{(1)}\tilde{\varphi}_i(t), \tag{33}$$

де $\tilde{H}_i(t)$ — узагальнено-обернена матриця до матриці $(\tilde{A}_0(t) - \lambda_i(t)\tilde{B}(t))$, $c_{1i}^{(1)}$ — сталий множник, який буде визначено далі.

Під узагальнено-оберненою матрицею до довільної матриці X тут мається на увазі матриця X^+, яка задовольняє співвідношення $XX^+X = X$ [8]. Виходячи з цього, безпосереднім обчисленням можна переконатися, що однією з узагальнено-обернених матриць до $(\tilde{A}_0(t) - \lambda_i(t)\tilde{B}(t))$ є матриця

$$\tilde{H}_i(t) = \begin{pmatrix} H_i(t) & H_i(t)B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t)((R_0^{(i)}(t))^*)^{-1} & H_i(t)B_0(t)C_0^{-1}(t) \\ 0 & -((R_0^{(i)}(t))^*)^{-1} & 0 \\ 0 & -C_0^{-1}(t)B_0^*(t)((R_0^{(i)}(t))^*)^{-1} & -C_0^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

де $H_i(t) = (A_0(t) - \lambda_i(t)E)^+$.

Враховуючи структуру матриці $\tilde{H}_i(t)$ і векторів $\tilde{b}_1^{(i)}(t)$, $\tilde{\varphi}_i(t)$, з (33) отримуємо

$$v_{1i}(t) = \mathrm{col}\,(v_{1i}^{(1)}(t); 0; 0), \tag{34}$$

де

$$v_{1i}^{(1)}(t) = H_i(t)b_1^{(i)}(t) + c_{1i}^{(1)}\varphi_i(t).$$

Підставивши (34) у (24) при $k = 2$, аналогічно з умови (29) знайдемо функцію $\lambda_2^{(i)}(t)$, а потім — вектор $v_{2i}(t)$ за формулою $v_{2i}(t) = \tilde{H}_i(t)\tilde{b}_2^{(i)}(t) + c_{2i}^{(1)}\tilde{\varphi}_i(t)$. При цьому, як і на попередньому кроці, встановимо, що всі координати вектора $v_{2i}(t)$, починаючи з $(n+1)$-ї, дорівнюють нулю. Застосувавши метод математичної індукції, для визначення векторів $v_{ki}(t)$ отримаємо

$$v_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(1)} H_i(t) b_{k-s,i}^{(1)}(t) + c_{ki}^{(1)}\varphi_i(t), \tag{35}$$

$$b_k^{(i)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t)\varphi_i(t) - g_k^{(i)}(t), \tag{36}$$

$$g_k^{(i)}(t) = A_k(t)\varphi_i(t) + \sum_{s=1}^{k-1} A_s(t)H_i(t)b_{k-s}^{(i)}(t) -$$

$$- \sum_{s=1}^{k-1} \lambda_s^{(i)}(t)H_i(t)b_{k-s}^{(i)}(t) - \delta_{h,k}(\varphi_i(t))' - (H_i(t)b_{k-h}^{(i)}(t))', \tag{37}$$

$$v_{ki}(t) = \mathrm{col}\,(v_{ki}^{(1)}(t); 0; 0), \tag{38}$$

$$\lambda_k^{(i)}(t) = (g_k^{(i)}(t), \psi_i(t)), \tag{39}$$

$$k = \overline{1, r}.$$

Аналогічно, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε у рівнянні (21), дістанемо

$$(\tilde{A}_0(t) + \bar{\lambda}_i(t)\tilde{B}(t))\tilde{v}_{0i}(t) = 0, \tag{40}$$

$$(\tilde{A}_0(t) + \bar{\lambda}_i(t)\tilde{B}(t))\tilde{v}_{ki}(t) = \tilde{d}_k^{(i)}(t), \quad k = \overline{1, r}, \tag{41}$$

де

$$\tilde{d}_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \tilde{\lambda}_s^{(i)}(t)\tilde{B}(t)\tilde{v}_{k-s}^{(i)}(t) - \sum_{s=1}^{k} \tilde{A}_s(t)\tilde{v}_{k-s}^{(i)}(t) + \tilde{B}(t)(\tilde{v}_{k-h}^{(i)}(t))', \quad k = \overline{1, r}. \tag{42}$$

Позначимо

$$\tilde{v}_{ki}(t) = \operatorname{col}\left(\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t); \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t); \tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)\right), \tag{43}$$

$$\tilde{d}_{ki}(t) = \operatorname{col}\left(\tilde{d}_{ki}^{(1)}(t); \tilde{d}_{ki}^{(2)}(t); \tilde{d}_{ki}^{(3)}(t)\right), \tag{44}$$

де $\tilde{v}_{ki}^{(j)}(t)$, $\tilde{d}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, 2}$, — n-вимірні вектори, а $\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)$, $\tilde{d}_{ki}^{(3)}(t)$ — відповідні m-вимірні вектори.

Тоді, врахувавши структуру матриць $\tilde{A}_0(t)$, $\tilde{B}(t)$, з рівняння (40) матимемо

$$R_0^{(i)}(t)\tilde{v}_{0i}^{(1)}(t) + B_0(t)\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = 0,$$

$$(A_0(t) - \lambda_i(t)E)^*\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = 0,$$

$$B_0^*(t)\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) - C_0(t)\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = 0,$$

звідки

$$\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = c_{0i}^{(2)}\psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = c_{0i}^{(2)}C_0^{-1}(t)B_0^*(t)\psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(1)} = -c_{0i}^{(2)}D_0^{(i)}(t)\psi_i(t),$$

тобто

$$\tilde{v}_{0i}(t) = c_{0i}^{(2)}\hat{\varphi}_i(t), \tag{45}$$

де

$$\hat{\varphi}_i(t) = \operatorname{col}\left(-D_0^{(i)}(t)\psi_i(t); \psi_i(t); C_0^{-1}(t)B_0^*(t)\psi_i(t)\right) \tag{46}$$

— власний вектор матриці $\tilde{A}_0(t)$ відносно $\tilde{B}(t)$, що відповідає власному значенню $-\bar{\lambda}_i(t)$, $c_{0i}^{(2)}$ — сталий множник, який підлягає визначенню.

Тепер, у відповідності з (44), (43), (45), для вектора $\tilde{d}_1^{(i)}(t)$ отримаємо вираз

$$\tilde{d}_1^{(i)}(t) = c_{0i}^{(2)} d_1^{(i)}(t),$$

де

$$d_1^{(i)}(t) = \mathrm{col}\left(d_{1i}^{(1)}(t); d_{1i}^{(2)}(t); d_{1i}^{(3)}(t)\right),$$

$$d_{1i}^{(1)}(t) = -\tilde{\lambda}_1^{(i)}(t) D_0^{(i)}(t)\psi_i(t) + A_1(t) D_0^{(i)}(t)\psi_i(t) - B_1(t) C_0^{-1}(t) B_0^*(t)\psi_i(t) - \delta_{1,h}(D_0^{(i)}(t)\psi_i(t))',$$

$$d_{1i}^{(2)}(t) = \tilde{\lambda}_1^{(i)}(t)\psi_i(t) + A_1^*(t)\psi_i(t) + \delta_{1,h}(\psi_i(t))', \tag{47}$$

$$d_{1i}^{(3)}(t) = -B_1^*(t)\psi_i(t) + C_1(t) C_0^{-1}(t) B_0^*(t)\psi_i(t).$$

Позначимо через $\hat{\psi}_i(t)$ елемент нуль-простору матриці $(\tilde{A}_0(t) + \bar{\lambda}_i(t)\tilde{B}(t))^*$. Взявши до уваги структуру цієї матриці, легко переконатися, що

$$\hat{\psi}_i(t) = \mathrm{col}\,(0; \varphi_i(t); 0). \tag{48}$$

Рівняння (41) будуть розв'язними відносно векторів $\tilde{v}_{ki}(t)$, $k = \overline{1, r}$, тоді і тільки тоді, коли їх праві частини ортогональні до вектора $\hat{\psi}_i(t)$:

$$(\tilde{d}_k^{(i)}(t), \hat{\psi}_i(t)) = 0, \quad k = \overline{1, r}. \tag{49}$$

Застосувавши цю умову до вектора $\tilde{d}_1^{(i)}(t)$ і взявши до уваги (47), (46), (48), (16), знайдемо $\tilde{\lambda}_1^{(i)}(t)$:

$$\tilde{\lambda}_1^{(i)}(t) = -(A_1^*(t)\psi_i(t), \varphi_i(t)) - \delta_{1,h}(\psi_i'(t), \varphi_i(t)) =$$

$$= -(\overline{A_1(t)\varphi_i(t), \psi_i(t)}) + \delta_{1,h}(\overline{\varphi_i'(t), \psi_i(t)}) = -\bar{\lambda}_1^{(i)}(t).$$

Тепер рівняння (41) при $k = 1$ є розв'язним і вектор $\tilde{v}_{1i}(t)$ визначається з нього за формулою

$$\tilde{v}_{1i}(t) = \tilde{G}_i(t)\tilde{d}_1^{(i)}(t) + c_{1i}^{(2)}\hat{\varphi}_i(t), \tag{50}$$

$c_{1i}^{(2)}$ — сталий множник, а $\tilde{G}_i(t)$ — узагальнено-обернена матриця до матриці $(\tilde{A}_0(t) + \bar{\lambda}_i(t)\tilde{B}(t))$, яка має наступну структуру:

$$\tilde{G}_i(t) = \begin{pmatrix} \left(R_0^{(i)}(t)\right)^{-1} & D_0^{(i)}(t) H_i^*(t) & \left(R_0^{(i)}(t)\right)^{-1} B_0(t) C_0^{-1}(t) \\ 0 & -H_i^*(t) & 0 \\ 0 & -C_0^{-1}(t) B_0^*(t) H_i^*(t) & -C_0^{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Врахувавши (51), (47), (48), із (50) дістанемо

$$\tilde{v}_{1i}(t) = \operatorname{col}\left(\tilde{v}_{1i}^{(1)}(t); \tilde{v}_{1i}^{(2)}(t); \tilde{v}_{1i}^{(3)}(t)\right),$$

$$\tilde{v}_{1i}^{(1)}(t) = c_{0i}^{(2)}((R_0^{(i)}(t))^{-1} d_{1i}^{(1)}(t) + D_0^{(i)}(t) H_i^*(t) d_{1i}^{(2)}(t) +$$

$$+ (R_0^{(i)}(t))^{-1} B_0(t) C_0^{-1}(t) d_{1i}^{(3)}(t)) - c_{1i}^{(2)} D_0^{(i)}(t) \psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{1i}^{(2)}(t) = -c_{0i}^{(2)} H_i^*(t) d_{1i}^{(2)}(t) + c_{1i}^{(2)} \psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{1i}^{(3)}(t) = -c_{0i}^{(2)} (C_0^{-1}(t) B_0^*(t) H_i^*(t) d_{1i}^{(2)}(t) + C_0^{-1}(t) d_{1i}^{(3)}(t)) + c_{1i}^{(2)} C_0^{-1}(t) B_0^*(t) \psi_i(t).$$

Аналогічно, підставивши (50) у (42), з умови (49) при $k = 2$ знайдемо функцію $\tilde{\lambda}_2^{(i)}(t)$, а тоді й вектор $\tilde{v}_{2i}(t)$ за формулою $\tilde{v}_{2i}(t) = \tilde{G}_i(t) \tilde{d}_2^{(i)}(t) + c_{2i}^{(2)} \hat{\varphi}_i(t)$. Продовжуючи так і далі, отримуємо такі рекурентні формули для визначення коефіцієнтів розвинень (19):

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = (\tilde{g}_k^{(i)}(t), \varphi_i(t)), \tag{52}$$

$$\tilde{g}_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\lambda}_s^{(i)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + \sum_{s=1}^{k-1} A_s^* H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} - A_k^* \psi_i + H_i^* (d_{k-h,i}^{(2)})', \tag{53}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(2)} \left[(R_0^{(i)})^{-1} d_{k-s,i}^{(1)} + D_0^{(i)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + (R_0^{(i)})^{-1} B_0 C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)} \right] - c_{ki}^{(2)} D_0^{(i)} \psi_i, \tag{54}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = -\sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(2)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + c_{ki}^{(2)} \psi_i, \tag{55}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = -\sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(2)} (C_0^{-1} B_0^* H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)}) + c_{ki}^{(2)} C_0^{-1} B_0^* \psi_i, \tag{56}$$

$$k = \overline{1, r},$$

$$\tilde{v}_{ki}(t) = \operatorname{col}\left(\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t); \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t); \tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)\right), \tag{57}$$

$$d_{ki}^{(1)}(t) = -\tilde{\lambda}_k^{(i)} D_0^{(i)} \psi_i + \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\lambda}_s^{(i)}(t) \left[(R_0^{(i)})^{-1} d_{k-s,i}^{(1)} + D_0^{(i)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + (R_0^{(i)})^{-1} B_0 C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)} \right] -$$

$$- \sum_{s=1}^{k-1} A_s \left[(R_0^{(i)})^{-1} d_{k-s,i}^{(1)} + D_0^{(i)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + (R_0^{(i)})^{-1} B_0 C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)} \right] +$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1} B_s \left[C_0^{-1} B_0^* H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} + C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)}\right] + A_k D_0^{(i)} \psi_i - B_k C_0^{-1} B_0^* \psi_i +$$
$$+ ((R_0^{(i)})^{-1} d_{k-h,i}^{(1)} + D_0^{(i)} H_i^* d_{k-h,i}^{(2)} + (R_0^{(i)})^{-1} B_0 C_0^{-1} d_{k-h,i}^{(3)})', \tag{58}$$

$$d_{ki}^{(2)}(t) = \tilde{\lambda}_k^{(i)} \psi_i + A_k^* \psi_i - \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\lambda}_s^{(i)} H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} -$$
$$- \sum_{s=1}^{k-1} A_s^* H_i^* d_{k-s,i}^{(2)} - (H_i^* d_{k-h,i}^{(2)})' - \delta_{h,k} \left(\psi_i(t)\right)', \tag{59}$$

$$d_{ki}^{(3)}(t) = \sum_{s=1}^{k-1} \left(B_s^* H_i^* - C_s C_0^{-1} B_0^* H_i^*\right) d_{k-s,i}^{(2)} - \sum_{s=1}^{k-1} C_s C_0^{-1} d_{k-s,i}^{(3)} - B_k^* \psi_i + C_k C_0^{-1} B_0^* \psi_i. \tag{60}$$

В результаті побудовано формальний розв'язок системи рівнянь (7), який з урахуванням (8), (17), (34) набирає вигляду

$$x_r(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \tag{61}$$

$$p_r(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{n} \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \tag{62}$$

$$u_r(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \tag{63}$$

де

$$\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k v_{ki}^{(1)}(t), \tag{64}$$

$$v_i^{(s)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}^{(s)}(t), \quad s = \overline{1,3}, \tag{65}$$

а функції $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$ зображуються відповідними розвиненнями (18), (19).

Коефіцієнти розвинень (64), (65) містять сталі множники $c_{ki}^{(1)}$, $c_{ki}^{(2)}$, $k = \overline{0,r}$, для знаходження яких використаємо крайові умови (2), (3).

Підставивши r-те наближення (61) у крайові умови (2), (3), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(0,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(0,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_0^T \tilde{\lambda}_r^{(i)}(0,\varepsilon)dt\right) = x_1(\varepsilon), \tag{66}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(T,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda_r^{(i)}(T,\varepsilon)dt\right) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon). \tag{67}$$

Оскільки згідно з (15)

$$\exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_r^{(i)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right) = o\left(\varepsilon^{r+1}\right), \tag{68}$$

$$\exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_r^{(i)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right) = o\left(\varepsilon^{r+1}\right), \tag{69}$$

то, знехтувавши відповідними доданками, замість (66), (67) розглянемо рівності

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon), \tag{70}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(1)}(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon), \tag{71}$$

які з урахуванням (64), (65) запишуться у вигляді

$$\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=1}^{n} v_{ki}^{(1)}(0)\varepsilon^k = x_1(\varepsilon), \tag{72}$$

$$\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_{ki}^{(1)}(T)\varepsilon^k = x_2(\varepsilon). \tag{73}$$

Припустимо, що вектори $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ розкладаються в асимптотичні ряди за степенями ε:

$$x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k x_k^{(1)}, \quad x_2(\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k x_k^{(2)}.$$

Прирівнявши в (72), (73) коефіцієнти при однакових степенях ε і взявши до уваги (35), (54), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(1)} H_i b_{k-s}^{(i)}(0) + c_{ki}^{(1)}\varphi_i(0)\right) = x_k^{(1)}, \tag{74}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{k-1} c_{si}^{(2)}\left[(R_0^{(i)}(T))^{-1} d_{k-s,i}^{(1)}(T) + D_0^{(i)}(T)H_i^*(T)d_{k-s,i}^{(2)}(T) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (R_0^{(i)}(T))^{-1}B_0(T)C_0^{-1}(T)d_{k-s,i}^{(3)}(T)\right] - c_{ki}^{(2)}D_0^{(i)}(T)\psi_i(T)\right) = x_k^{(2)}, \quad k=\overline{0,r}. \tag{75}$$

Введемо позначення

$$C_k^{(1)} = \mathrm{col}\left[c_{k1}^{(1)}, c_{k2}^{(1)}, \ldots, c_{kn}^{(1)}\right], \quad C_k^{(2)} = \mathrm{col}\left[c_{k1}^{(2)}, c_{k2}^{(2)}, \ldots, c_{kn}^{(2)}\right],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)],$$

$$\Phi_0^{(1)}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)],$$

$$\Phi_0^{(2)}(t) = [D_0^{(1)}B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t)\Psi_1(t); \ldots; D_0^{(n)}B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t)\Psi_n(t)],$$

$$\Phi_j^{(1)}(t) = \left[H_j^{(1)}(t)b_j^{(1)}(t), H_j^{(2)}(t)b_j^{(2)}(t), \ldots, H_j^{(n)}(t)b_j^{(n)}(t)\right],$$

$$\Phi_j^{(2)}(t) = \left[d_{j1}^{(1)}(t) + B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t)H_1^*(t)d_{j1}^{(2)}(t) + B_0(t)C_0^{-1}(t)d_{j1}^{(3)}(t), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, d_{jn}^{(1)}(t) + B_0(t)C_0^{-1}(t)B_0^*(t)H_n^*(t)d_{jn}^{(2)}(t) + B_0(t)C_0^{-1}(t)d_{jn}^{(3)}(t)\right], \quad j=1,2,\ldots.$$

Тоді при $k=0$ рівності (74), (75) наберуть вигляду

$$\Phi_0^{(1)}(0)C_0^{(1)} = x_0^{(1)}, \quad \Phi_0^{(2)}(T)C_0^{(2)} = -x_0^{(2)}. \tag{76}$$

Оскільки вектори $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, і $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, лінійно незалежні при всіх $t\in[0;T]$, то $\det\,\Phi_0^{(1)}(t)\neq 0$, $\det\,\Psi(t)\neq 0\;\forall t\in[0;T]$.

Припустивши, що

$$\det\,\Phi_0^{(2)}(T)\neq 0, \tag{77}$$

з рівностей (76) знайдемо

$$C_0^{(1)} = (\Phi_0^{(1)}(0))^{-1}x_0^{(1)}, \quad C_0^{(2)} = -(\Phi_0^{(2)}(T))^{-1}x_0^{(2)}. \tag{78}$$

На k-му кроці одержимо рекурентні формули

$$
\begin{aligned}
C_k^{(1)} &= -(\Phi_0^{(1)}(0))^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\Phi_j^{(1)}C_{k-j}^{(1)} + x_k^{(1)}\right),\\
C_k^{(2)} &= (\Phi_0^{(2)}(T))^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\Phi_j^{(2)}C_{k-j}^{(2)} - x_k^{(2)}\right), \quad k = \overline{1,r}.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Покажемо тепер, що побудовані описаним способом векторні функції (61), (63) є асимптотичним зображенням точного розв’язку даної задачі керування. Підставивши r-те наближення (17) у диференціальний вираз $L(y) = \varepsilon^h \tilde{B}(t)\dfrac{dy}{dt} - \tilde{A}(t,\varepsilon)\, y$ і взявши до уваги (68), (69), дістанемо

$$
L(y_r(t,\varepsilon)) = O\left(\varepsilon^{r+1}\right). \tag{80}
$$

Нехай $y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon))$ — точний розв’язок системи (9), тобто

$$
L(y(t,\varepsilon)) = 0. \tag{81}
$$

Тоді, віднявши (81) від (80) і позначивши

$$
y_r(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon) = z_r(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z_r^{(1)}(t,\varepsilon); z_r^{(2)}(t,\varepsilon); z_r^{(3)}(t,\varepsilon)\right),
$$

отримаємо $L(z_r(t,\varepsilon)) = 0$ або

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^h\,\frac{dz_r^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} &= A(t,\varepsilon)z_r^{(1)}(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)z_r^{(3)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{r+1}),\\
\varepsilon^h\,\frac{dz_r^{(2)}(t,\varepsilon)}{dt} &= -A^*(t,\varepsilon)z_r^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{r+1}),\\
0 &= B^*(t,\varepsilon)z_r^{(2)}(t,\varepsilon) - C(t,\varepsilon)z_r^{(3)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{r+1}),
\end{aligned}
\tag{82}
$$

де

$$
\begin{aligned}
z_r^{(1)}(t,\varepsilon) &= x_r(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon),\\
z_r^{(2)}(t,\varepsilon) &= p_r(t,\varepsilon) - p(t,\varepsilon),\\
z_r^{(3)}(t,\varepsilon) &= u_r(t,\varepsilon) - u(t,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Завдяки умові (12) матриця $C(t,\varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon \geq 0$, а обернена до неї матриця $C^{-1}(t,\varepsilon)$ є рівномірно обмеженою на відрізку $[0;T]$. Тому систему рівнянь (82) можна записати у вигляді

$$\varepsilon^h \frac{dz_r^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)z_r^{(1)}(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)C^{-1}(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)z_r^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{r+1}), \tag{84}$$

$$\varepsilon^h \frac{dz_r^{(2)}(t,\varepsilon)}{dt} = -A^*(t,\varepsilon)z_r^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{r+1}), \tag{85}$$

$$z_r^{(3)}(t,\varepsilon) = C^{-1}(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)z_r^{(2)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1}\right). \tag{86}$$

За побудовою r-те наближення $x_r(t,\varepsilon)$ має вигляд

$$x_r(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{r+1}), \quad x_r(T,\varepsilon) = O(\varepsilon^{r+1}).$$

Отже, згідно з (83)

$$z_r^{(1)}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{r+1}d_1(\varepsilon), \quad z_r^{(2)}(T,\varepsilon) = \varepsilon^{r+1}d_2(\varepsilon), \tag{87}$$

де $d_1(\varepsilon), d_2(\varepsilon)$ — деякі обмежені n-вимірні вектори.

Об'єднавши рівняння (84), (85) з крайовими умовами (87), одержимо таку крайову задачу:

$$\varepsilon^h \frac{d\tilde{z}}{dt} = \hat{A}(t,\varepsilon)\tilde{z} + \varepsilon^{r+1}g(t,\varepsilon), \tag{88}$$

$$M\tilde{z}(0,\varepsilon) + N\tilde{z}(T,\varepsilon) = \varepsilon^{r+1}d(\varepsilon), \tag{89}$$

де

$$\begin{gathered} \tilde{z}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z_r^{(1)}(t,\varepsilon); z_r^{(2)}(t,\varepsilon)\right), \\ \hat{A}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & B(t,\varepsilon)C^{-1}(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \\ d(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(d_1(\varepsilon), d_2(\varepsilon)\right), \\ M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{90}$$

$g(t,\varepsilon)$ — деяка n-вимірна вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0;T]$.

Згідно з [4] фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = \hat{A}(t,\varepsilon)\, y$$

зображається асимптотичною формулою

$$Y(t,\varepsilon) = \left(V_r(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_r^{(1)}(\tau,\varepsilon) d\tau\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \Lambda_r^{(2)}(\tau,\varepsilon) d\tau\right) \end{pmatrix},$$

де

$$\Lambda_r^{(1)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,\left(\lambda_1(t,\varepsilon), \lambda_2(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon)\right),$$

$$\Lambda_r^{(2)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,\left(\tilde{\lambda}_1(t,\varepsilon), \tilde{\lambda}_2(t,\varepsilon), \ldots, \tilde{\lambda}_n(t,\varepsilon)\right),$$

$$V_r(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k V_k(t),$$

а матриці $V_k(t)$, $k = \overline{0,r}$, складаються з вектор-стовпців, визначених за формулами (35), в яких $c_{0i}^{(1)} = 1$, $c_{ki}^{(1)} = 0$, $k = \overline{1,r}$, $i = \overline{1,n}$. Подібну структуру має і фундаментальна матриця спряженої системи $\varepsilon^h \dfrac{dz}{dt} = -A^*(t,\varepsilon) z$:

$$Z(t,\varepsilon) = \left(\hat{V}_r(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_r^{(1)*}(\tau,\varepsilon) d\tau\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \Lambda_r^{(2)*}(\tau,\varepsilon) d\tau\right) \end{pmatrix},$$

де $\Lambda_r^{(1)*}(t,\varepsilon)$, $\Lambda_r^{(2)*}(t,\varepsilon)$ — матриці, комплексно спряжені з $\Lambda_r^{(1)}(t,\varepsilon)$, $\Lambda_r^{(2)}(t,\varepsilon)$ відповідно.

Позначивши

$$Y_r^{(1)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_r^{(1)}(\tau,\varepsilon) d\tau\right); 0\right\},$$

$$Y_r^{(2)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,\left\{0; \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \Lambda_r^{(2)}(\tau,\varepsilon) d\tau\right)\right\},$$

будемо мати

$$Y(t,\varepsilon) = Y_1(t,\varepsilon) + Y_2(t,\varepsilon),$$

де

$$Y_i(t,\varepsilon) = \left[V_r(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right] Y_r^{(i)}(t,\varepsilon), \quad i = 1,2.$$

Тоді загальний розв'язок системи (88) можна подати у вигляді

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = [Y_1(t,\varepsilon) + Y_2(t,\varepsilon)]\, c + \int\limits_0^t Y_1(t,\varepsilon) Z^*(\tau,\varepsilon) q(\tau,\varepsilon)\, d\tau - \int\limits_t^T Y_2(t,\varepsilon) Z^*(\tau,\varepsilon) q(\tau,\varepsilon)\, d\tau,$$

де c — довільний сталий вектор, а

$$q(t,\varepsilon) = \varepsilon^{r+1-h} g(t,\varepsilon). \tag{91}$$

Визначаючи вектор c з крайової умови (89), отримуємо розв'язок задачі (88), (89):

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = (Gq)(t,\varepsilon) + \varepsilon^{r+1} Y(t,\varepsilon) \left(\left[MV_r^{(1)}(0,\varepsilon); NV_r^{(2)}(T,\varepsilon)\right] + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)^{-1} d(\varepsilon), \tag{92}$$

де $(Gq)(t,\varepsilon)$ — відповідний оператор Гріна, а $V_r^{(1)}(t,\varepsilon)$, $V_r^{(2)}(t,\varepsilon)$ — прямокутні матриці розмірності $2n \times n$, які складаються відповідно з n перших і n останніх стовпців матриці $V_r(t,\varepsilon)$. Оператор Гріна

$$(Gq)(t,\varepsilon) = \int\limits_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon) q(\tau,\varepsilon)\, d\tau,$$

де $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна відповідної однорідної задачі, яка має вигляд

$$G_0(t,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \left(V_r^{(1)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_\tau^t \Lambda_r^{(1)}(s,\varepsilon) ds\right) \left(\hat{V}_r^{(1)*}(\tau,\varepsilon) + \right. \\ \left. + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) K_r(t,\tau,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad 0 \le \tau \le t \le T, \\ -\left(V_r^{(2)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_t^\tau \Lambda_r^{(2)}(s,\varepsilon) ds\right) \left(\hat{V}_r^{(2)*}(\tau,\varepsilon) + \right. \\ \left. + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) + K_r(t,\tau,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad 0 \le t \le \tau \le T, \end{cases} \tag{93}$$

$$K_r(t,\tau,\varepsilon) = Y(t,\varepsilon)\left(\left[MV_r^{(1)}(0,\varepsilon); NV_r^{(2)}(T,\varepsilon)\right] + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)^{-1}\left[M\Big(V_r^{(2)}(0,\varepsilon)+\right.$$

$$+ O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\Big)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_0^{\tau}\Lambda_r^{(2)}(s,\varepsilon)ds\right)\left(\hat{V}_r^{(2)*}(\tau,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) -$$

$$- N\left(V_r^{(1)}(T,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{\tau}^{T}\Lambda_r^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right)\times$$

$$\left.\times\left(\hat{V}_r^{(1)*}(\tau,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)\right].$$

Переходячи в (92) до оцінок за нормою і беручи до уваги (91), маємо

$$\|\tilde{z}(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^{r+1-h}\int\limits_0^T \|G_0(t,\tau,\varepsilon)\|\,\|g(\tau,\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon^{r+1}\,\|Y(t,\varepsilon)\|\times$$

$$\times\left\|\left[MV_r^{(1)}(0,\varepsilon); NV_r^{(2)}(T,\varepsilon)\right]^{-1} + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right\|\,\|d(\varepsilon)\|. \qquad (94)$$

Враховуючи умову (15) та структуру матриць M, N, неважко переконатися, що всі матричні і векторні функції, які містяться в (94), рівномірно обмежені на $[0;T]$, звідки випливає, що

$$\|\tilde{z}(t,\varepsilon)\| \le c\,\varepsilon^{r+1-h},$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε. Тоді, взявши до уваги (83), (86), дістанемо такі оцінки для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon) - x_r(t,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{r+1-h},$$

$$\|u(t,\varepsilon) - u_r(t,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{r+1-h},$$

де c_1, c_2 не залежать від ε.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *Якщо виконуються умови 1 – 4, (12) – (15), (77), то при досить малих ε задача оптимального керування (1) – (4) має єдиний розв'язок, який задається асимптотичними формулами*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + O(\varepsilon^{r+1-h}),$$

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau \right) + O(\varepsilon^{r+1-h}),$$

де $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, *— n-вимірні вектор-функції,* $\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)$ *— m-вимірний вектор,* $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, *— скалярні функції, що зображуються у вигляді розвинень (64), (65), (18), (19), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (25), (26), (35) – (37), (54), (45), (46), (56), (58) – (60), (39), (52), (78), (79).*

1. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленно меняющимися коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 7. — С. 604 – 608.
2. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленно меняющимися коэффициентами в случае кратных корней // Вычислит. и прикл. математика: межвед. респ. сб. — 1977. — Вып. 31. — С. 81 – 92.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
6. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — **161**, № 1. — P. 67 – 77.
7. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1989. — 223 с.
8. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1980. — 222 с.

Одержано 15.10.08