УДК 517.9

СЛАБКОЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
Україна, 69600, Запоріжжя, вул. Жуковського, 66
e-mail: innovatory@rambler.ru

Boundary-value problems for a system of ordinary differential equations with a small parameter ε in the equation and in a boundary-value condition are considered. We obtain conditions for a bifurcation of solutions of a weakly perturbed linear boundary-value problem in a Banach space.

Рассматриваются краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром ε в уравнении и в краевом условии. Получены условия бифуркации решений слабовозмущенной линейной краевой задачи в банаховом пространстве.

1. Постановка задачі та попередній результат. Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon A_1(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1 : f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1}) := \{\mathbf{f}(\cdot) : [\mathbf{a};\mathbf{b}] \to \mathbf{B_1}, |||f||| = \sup_{t\in[a;b]} \|f(t)\|\}$, $C([a;b], \mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій; оператор-функції $A(t)$ і $A_1(t)$, що діють із банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе, сильно неперервні [1, с. 141] з нормами $|||A||| = \sup_{t\in[a;b]} \|A(t)\| < \infty$, $|||A_1||| = \sup_{t\in[a;b]} \|A_1(t)\| < \infty$, $\varepsilon << 1$ — малий параметр.

Разом з операторним рівнянням (1) розглянемо крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot), \tag{2}$$

де оператори ℓ і ℓ_1 є лінійними неперервними на $[a;b]$ операторами, що діють з простору $C([a;b], \mathbf{B_1})$ у банахів простір $\mathbf{B}_2 : \ell : C([a;b], \mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$, $\ell_1 : C([a;b], \mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$, α — елемент простору $\mathbf{B}_2 : \alpha \in \mathbf{B}_2$. Тоді під розв'язком рівняння (1) будемо розуміти розв'язок $x(t) = x(t,\varepsilon)$ інтегрального рівняння

$$x(t,\varepsilon) = x_0 + \int\limits_a^t (A(s)x(s) + \varepsilon A_1(s)x(s) + f(s))ds,$$

який є неперервно диференційовним у кожній точці $t \in [a;b]$ і задовольняє рівняння (1) скрізь на $[a;b]$. Отже, розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (1) будемо шукати у просторі $C^1([a;b],\mathbf{B_1})$ неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

Задача

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

яку отримуємо із (1), (2) при $\varepsilon = 0$, називається породжуючою для крайової задачі (1), (2).

Теорема 1 [2]. *Якщо оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ у банаховий простір $\mathbf{B_2}$, є узагальнено-оборотним, то неоднорідна задача (3), (4) розв'язна для тих і лише тих неоднорідностей $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \cdot \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau\right] = 0, \tag{5}$$

і при цьому загальний розв'язок крайової задачі має вигляд

$$x(t) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t)Q^{-}\alpha + (G[f])(t),$$

де $U(t)$ — еволюційний оператор одорідного диференціального рівняння (3) [1, с. 147], $Q = \ell U(\cdot)$ — оператор, отриманий підстановкою еволюційного оператора в крайову умову (4); Q^- — узагальнено-обернений оператор до оператора Q [3], $\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^-Q$ та $\mathcal{P}_{N(Q^\star)} = I - QQ^-$ — оператори проектування, які проектують банахів простір $\mathbf{B_1}$ на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^\star)$ оператора Q відповідно; $(G[f])(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (3), (4), який діє на вектор-функцію $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ таким чином:

$$(G[f])(t) := \int_a^b K(t,\tau) f(\tau) d\tau - U(t)Q^- \cdot \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Знайдемо умови біфуркації розв'язків та структуру слабкозбуреної неоднорідної крайової задачі (1), (2) при умові, що породжуюча задача (3), (4) не має розв'язку. Вирішенню цієї проблеми у випадку $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ присвячено роботи [3–5]. Крім того, умовам біфуркації множини обмежених на всій осі $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$ розв'язків слабкозбуреного диференціального рівняння у банаховому просторі присвячено роботу [6]. Для зліченновимірних систем у так званому некритичному випадку, коли $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathfrak{M}$, збурені задачі розглядались у монографії [7].

2. Основний результат. Припустимо, що породжуюча крайова задача (3), (4), отримана із (1), (2) при $\varepsilon = 0$, не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ у диференціальній системі і довільних $\alpha \in \mathbf{B}_2$ у крайовій умові (4). Згідно з теоремою 1 це означає, що критерій розв'язності (5) крайової задачі (3), (4) не виконується.

Виникає питання: чи можна за допомогою лінійних збурень зробити задачу (1), (2) розв'язною, і якщо можна, то яким повинен бути доданок $A_1(t)$ у диференціальній системі (1) і функціонал $\ell_1 x(\cdot)$ у крайовій умові (2), щоб крайова задача (1), (2) була скрізь розв'язною? Відповідь на це питання дає оператор B_0,

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right] : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2, \tag{6}$$

побудований з урахуванням збурюючих доданків $A_1(t)$ і ℓ_1. Використавши метод Вішика – Люстерника [8], знайдемо ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язку крайової задачі (1), (2), який будемо шукати у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметра ε і який містить один доданок із від'ємним степенем ε :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(t). \tag{7}$$

Підставимо ряд (7) у крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

При ε^{-1} приходимо до однорідної крайової задачі

$$\dot{x}_{-1}(t) = A(t)x_{-1}(t), \tag{8}$$

$$\ell x_{-1}(\cdot) = 0. \tag{9}$$

Згідно з теоремою 1 задача (8), (9) має розв'язок

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1} \tag{10}$$

для довільного елемента $c_{-1} \in \mathbf{B_1}$, який буде визначено нижче.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, одержуємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $x_0(t)$:

$$\dot{x}_0(t) = A(t)x_0(t) + A_1(t)x_{-1}(t, c_{-1}) + f(t), \tag{11}$$

$$\ell x_0(\cdot) = \alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}). \tag{12}$$

Критерій розв'язності (5) лінійної неоднорідної крайової задачі (11), (12) згідно з теоремою 1 має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha + \ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1} - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\left(A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1} + f(\tau)\right)d\tau\right] = 0,$$

звідки отримуємо рівняння відносно елемента c_{-1} банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_{-1} = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right], \tag{13}$$

де оператор B_0 має вигляд (6).

Припустимо, що оператор $B_0 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [5, с. 39]. Будемо позначати через $B_0^- : \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_1}$ [3] узагальнено-обернений оператор до оператора B_0. Тоді, як показано в [9], він є нормально-розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{B_1} \to N(B_0)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B_2} \to Y$, які індукують розбиття $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ в прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathbf{B_1} = N(B_0) \oplus X,$$

$$\mathbf{B_2} = Y \oplus R(B_0).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 рівняння (13) є розв'язним [10] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right] = 0.$$

Остання умова виконується, якщо буде виконано умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0, \tag{14}$$

а операторне рівняння (13) при цьому буде мати множину розв'язків у вигляді

$$c_{-1} = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right] + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, \tag{15}$$

де c_ρ — довільний елемент банахового простору $\mathrm{B}_1 : c_\rho \in \mathbf{B_1}$.

Розв'язок (15) можна записати у вигляді

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right].$$

Підставляючи c_{-1} у (10), отримуємо множину розв'язків крайової задачі (8), (9):

$$x_{-1}(t, c_\rho) = \overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbf{B_1},$$

$$\overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \overline{c}_{-1},$$

а крайова задача (11), (12) має множину розв'язків

$$x_0(t, c_0) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + U(t)Q^-(\alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_\rho)) + (G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_\rho) + f(\cdot)])(t), \quad (16)$$

де оператор $(G[\cdot])(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (3), (4), визначений у теоремі 1, а $c_0 \in \mathbf{B_1}$ — довільний елемент простору $\mathbf{B_1}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу.

Використавши лінійність узагальненого оператора Гріна, сім'ю розв'язків (16) запишемо у вигляді

$$x_0(t, c_0, c_\rho) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \mathcal{H}_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho + \tilde{x}_0(t), \quad (17)$$

де частинний розв'язок $\tilde{x}_0(t)$ неоднорідної крайової задачі (11), (12) має вигляд

$$\tilde{x}_0(t) = U(t)Q^-(\alpha + \ell_1 \overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1})) + (G[A_1(\cdot)\overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) + f(\cdot)])(t)$$

і

$$\mathcal{H}_0(t) = U(t)Q^-\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} + (G[A_1(\cdot)U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}])(t).$$

При ε^1 для визначення коефіцієнта $x_1(t)$ приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t) + A_1(t)x_0(t, c_0, c_\rho), \quad (18)$$

$$\ell x_1(\cdot) = \ell_1 x_0(\cdot, c_0, c_\rho). \quad (19)$$

Критерій розв'язності крайової задачі (18), (19) має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \ell_1\mathcal{H}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho + \ell_1\tilde{x}_0(\cdot) -$$

$$- \ell\int_a^b K(\cdot, \tau)A_1(\tau)\left\{U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + \mathcal{H}_0(\tau)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho + \tilde{x}_0(\tau)\right\}d\tau\Bigg] = 0,$$

звідки отримуємо наступне рівняння відносно елемента c_0 банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_0 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\left\{\ell_1\mathcal{H}_0(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot, \tau)A_1(\tau)\mathcal{H}_0(\tau)d\tau\right\}\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho +$$

$$+ \ell_1\tilde{x}_0(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot, \tau)A_1(\tau)\tilde{x}_0(\tau)d\tau\Bigg]. \quad (20)$$

При тій же умові (14) операторне рівняння (20) має множину розв'язків у вигляді

$$c_0 = \overline{c}_0 + \mathcal{R}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbf{B_1}, \quad (21)$$

де

$$\mathcal{R}_0 = I - B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left\{ \ell_1 \mathcal{H}_0(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \mathcal{H}_0(\tau) d\tau \right\}$$

і

$$\overline{c}_0 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \tilde{x}_0(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \tilde{x}_0(\tau) d\tau \right].$$

Підставивши (21) у (17), знайдемо розв'язок крайової задачі (11), (12):

$$x_0(t, c_\rho) = \overline{x}_0(t, \overline{c}_0) + \overline{X}_0(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbf{B_1},$$

де

$$\overline{x}_0(t, \overline{c}_0) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \overline{c}_0 + \tilde{x}_0(t),$$

$$\overline{X}_0(t) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \mathcal{R}_0 + \mathcal{H}_0(t).$$

Тоді розв'язок крайової задачі (18), (19) можна записати у вигляді

$$x_1(t, c_1, c_\rho) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \mathcal{H}_1(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \tilde{x}_1(t), \tag{22}$$

де частинний розв'язок $\tilde{x}_1(t)$ неоднорідної крайової задачі (18), (19) є таким:

$$\tilde{x}_1(t) = U(t) Q^- \ell_1 \overline{x}_0(\cdot, \overline{c}_0) + (G[A_1(\cdot) \overline{x}_0(\cdot, \overline{c}_0)])(t)$$

і

$$\mathcal{H}_1(t) = U(t) Q^- \ell_1 \overline{X}_0(\cdot) + (G[A_1(\cdot) \overline{X}_0(\cdot)])(t),$$

$c_1 \in \mathbf{B_1}$ — довільний елемент простору $\mathbf{B_1}$, який буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу.

При ε^2 для визначення коефіцієнта $x_2(t)$ приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_2(t) = A(t) x_2(t) + A_1(t) x_1(t, c_1, c_\rho), \tag{23}$$

$$\ell x_2(\cdot) = \ell_1 x_1(\cdot, c_1, c_\rho). \tag{24}$$

Критерій розв'язності крайової задачі (23), (24) має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \Big[\ell_1 U(\cdot) \mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \ell_1 \mathcal{H}_1(\cdot) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \ell_1 \tilde{x}_1(\cdot) -$$

$$- \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \big\{ U(\tau) \mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + \mathcal{H}_1(\tau) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \tilde{x}_1(\tau) \big\} d\tau \Big] = 0,$$

звідки одержуємо рівняння відносно елемента c_1 банахового простору $\mathbf{B_1}$:

$$B_0 c_1 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\left\{ \ell_1 \mathcal{H}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \mathcal{H}_1(\tau) d\tau \right\} \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \right.$$

$$\left. + \ell_1 \tilde{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau \right]. \tag{25}$$

При тій же умові (14) операторне рівняння (25) має множину розв'язків у вигляді

$$c_1 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\left\{ \ell_1 \mathcal{H}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \mathcal{H}_1(\tau) d\tau \right\} \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \right.$$

$$\left. + \ell_1 \tilde{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau \right] + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, \tag{26}$$

де c_ρ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1 : c_\rho \in \mathbf{B_1}$.

Розв'язок (26) можна записати у вигляді

$$c_1 = \bar{c}_1 + \mathcal{R}_1 \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, \tag{27}$$

де

$$\mathcal{R}_1 = I - B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left\{ \ell_1 \mathcal{H}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \mathcal{H}_1(\tau) d\tau \right\}$$

і

$$\bar{c}_1 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \tilde{x}_1(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau \right].$$

Підставивши (27) у (22), знайдемо розв'язок крайової задачі (18), (19):

$$x_1(t, c_\rho) = \bar{x}_1(t, \bar{c}_1) + \overline{X}_1(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де

$$\bar{x}_1(t, \bar{c}_1) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \bar{c}_1 + \tilde{x}_1(t),$$

$$\overline{X}_1(t) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} \mathcal{R}_1 + \mathcal{H}_1(t).$$

Тоді розв'язок крайової задачі (23), (24) можна записати у вигляді

$$x_2(t, c_2, c_\rho) = U(t) \mathcal{P}_{N(Q)} c_2 + \mathcal{H}_2(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho + \tilde{x}_2(t), \tag{28}$$

де частинний розв’язок $\tilde{x}_2(t)$ неоднорідної крайової задачі (23), (24) є таким:

$$\tilde{x}_2(t) = U(t)Q^{-}\ell_1\overline{x}_1(\cdot,\overline{c}_1) + (G[A_1(\cdot)\overline{x}_1(\cdot,\overline{c}_1)])(t)$$

і

$$\mathcal{H}_2(t) = U(t)Q^{-}\ell_1\overline{X}_1(\cdot) + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_1(\cdot)])(t),$$

$c_2 \in \mathbf{B_1}$ — довільний елемент простору $\mathbf{B_1}$, який буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу.

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $x_i(t)$ при ε^i ряду (7) приходимо до крайової задачі

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + A_1(t)x_{i-1}(t, c_{i-1}, c_\rho), \tag{29}$$

$$\ell x_i(\cdot) = \ell_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}, c_\rho). \tag{30}$$

При тій же умові (14) крайова задача (29), (30) має сім’ю розв’язків

$$x_i(t, c_\rho) = \overline{x}_i(t,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, \tag{31}$$

де

$$\overline{x}_i(t,\overline{c}_i) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t)Q^{-}\ell_1\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1}) + (G[A_1(\cdot)\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1})])(t), \quad i = 1,2,\ldots,$$

$$\overline{c}_i = -B_0^{-}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 U(\cdot)Q^{-}\ell_1\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1}) + \ell_1(G[A_1(\cdot)\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1})])(\cdot) -$$

$$- \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\big\{U(\tau)Q^{-}\ell_1\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1}) +$$

$$+ (G[A_1(\cdot)\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1})])(\tau)\big\}(\tau)d\tau\Bigg], \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^{-}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right],$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\Bigg[I - B_0^{-}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\ell_1 U(\cdot)Q^{-}\ell_1\overline{X}_{i-1}(\cdot) + \ell_1(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot)])(\cdot) -$$

$$- \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\{U(\tau)Q^{-}\ell_1\overline{X}_{i-1}(\cdot) + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot)])(\tau)\}d\tau\}\Bigg] +$$

$$+ U(t)Q^{-}\ell_1\overline{X}_{i-1}(\cdot) + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot)])(t), \quad i = 1,2,\ldots,$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Зауваження 1. Оскільки $\left(\mathcal{P}_{N(Q)}\right)^2 = \mathcal{P}_{N(Q)}$, то множина лінійно незалежних розв'язків вигляду (31) залежить від розмірності підпростору оператора $\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{P}_{N(B_0)}$.

Доведення абсолютної збіжності отриманих рядів при достатньо малому фіксованому параметрі $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ проводиться методом мажорування рядів [3].

Отже, умову біфуркації розв'язків крайової задачі (1), (2) у банаховому просторі можна сформулювати таким чином.

Теорема 2. *Нехай оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ у банаховий простір $\mathbf{B_2}$, є узагальнено-оборотним і породжуюча крайова задача, отримана із (1), (2) при $\varepsilon = 0$, при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$ не має розв'язків. Тоді якщо виконуються умови:*

1) оператор B_0 є узагальнено-оборотним;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$,

то неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$ і має ρ-параметричну сім'ю розв'язків у вигляді ряду

$$x(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \left[\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho\right] \quad \forall c_\rho \in \mathbf{B_1},$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, а оператор B_0 має вигляд (6) і коефіцієнти ряду визначаються таким чином:

$$\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) = \begin{cases} U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1}, & \text{якщо } i = -1, \\ U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0 + U(t)Q^-(\alpha + \ell_1\overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}))+ & \\ \qquad +(G[A_1(\cdot)\overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) + f(\cdot)])(t), & \text{якщо } i = 0, \\ U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t)Q^-\ell_1\overline{x}_{i-i}(\cdot, \overline{c}_{i-1})+ & \\ \qquad +(G[A_1(\cdot)\overline{x}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1})])(t), & \text{якщо } i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\overline{c}_i = \begin{cases} -B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int\limits_a^b K(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau\right], & \text{якщо } i = -1, \\ -B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1\tilde{x}_i(\cdot) - \ell\int\limits_a^b K(\cdot, \tau)A_1(\tau)\tilde{x}_i(\tau)d\tau\right], & \text{якщо } i = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

$$\overline{X}_i(t) = \begin{cases} U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}, & \text{якщо } i = -1, \\ U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{R}_i + U(t)Q^-\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}+ & \\ \qquad +(G[A_1(\cdot)U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}])(t), & \text{якщо } i = 0, \\ U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{R}_i + U(t)Q^-\ell_1\overline{X}_{i-1}(\cdot)+ & \\ \qquad +(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot)])(t), & \text{якщо } i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_i = I - B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left\{\ell_1\mathcal{H}_i(\cdot) - \ell\int\limits_a^b K(\cdot, \tau)A_1(\tau)\mathcal{H}_i(\tau)d\tau\right\}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\mathcal{H}_i(t) = U(t)Q^{-}\ell_1\overline{X}_{i-1}(\cdot) + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot)])(t), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{H}_0(t) = U(t)Q^{-}\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} + (G[A_1(\cdot)U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}])(t).$$

Зауваження 2. Якщо позначити $\rho = \dim R\big(\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\big)$, то потужність множини лінійно незалежних розв'язків крайової задачі (1), (2) не буде перевищувати ρ.

3. Приклад. Розглянемо збурену крайову задачу (1), (2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ та зліченновимірним вектором-стовпчиком $f(t)$:

$$A(t) = \operatorname{diag}\{-\tan t, 0, -\tan t, 0, \ldots, -\tan t, 0, \ldots\}, \tag{32}$$

$$f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots\} \tag{33}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell x(\cdot) := Mx(0) - Nx\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha, \tag{34}$$

де

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{2k} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 3 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 4 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{2k} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 4 & 0 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\ell_1 = 0, \quad \alpha = \operatorname{col}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}\} \in \mathbb{R}^{2k}, \quad \alpha_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 2k}.$$

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді неперервно диференційовної вектор-функції $x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} \in C^1([a;b], \mathfrak{M})$ зі значенням у просторі $\mathfrak{M}$.

Дійсно, оператор $A(t)$ діє у цьому просторі й

$$|||A||| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}], i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}(t)| = \sup_{t\in[0;\frac{\pi}{3}]} |-\tan(t)| \le \sqrt{3} < +\infty.$$

Еволюційний оператор задачі має вигляд

$$U(t) = \operatorname{diag}\{\cos t, 1, \cos t, 1, \ldots, \cos t, 1, \ldots\}.$$

Обернений до $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\cos t}, 1, \frac{1}{\cos t}, 1, \ldots, \frac{1}{\cos t}, 1, \ldots\right\},$$

$$Q = M - NU\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0}}^{2k} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix} \end{array},$$

$$Q^{-} = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0}}^{2k} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Проектори відповідно мають вигляд

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^{-}Q = \operatorname{diag}\left\{\underbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1}_{2k}, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\right\} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^{-} = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0}}^{2k} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}.$$

Породжуюча задача розв’язна тоді і лише тоді, коли

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2 = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_2(\tau)d\tau, \\
&\alpha_4 = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_4(\tau)d\tau, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\alpha_{2k} = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_{2k}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Припустимо, що породжуюча задача нерозв’язна, тобто умова (35) не виконується.

Тепер розглянемо, яким чином потрібно збурити породжуючу задачу, щоб збурена крайова задача (1), (2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ вигляду (32), зліченновимірним вектором $f(t)$ вигляду (33) і крайовою умовою вигляду (34) була завжди розв’язною (навіть для тих $f(t) \in C([a;b],\mathfrak{M})$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2k}$, які не задовольняють умову розв’язності (35)).

Для розв’язання цієї проблеми виберемо оператор $A_1(t)$, наприклад, у вигляді діагональної зліченновимірної матриці $A_1(t) = \operatorname{diag}\{\cos t, \cos t, \dots, \cos t, \dots\}$ та знайдемо оператор B_0, що в даному випадку є зліченновимірною $(2k \times \infty)$-матрицею:

$$
B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell \int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right] =
$$

$$
= \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[-N \int_0^{\frac{\pi}{3}} U\left(\frac{\pi}{3}\right)U^{-1}(\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right] =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\overbrace{0 & 0 & \dots & 0 & 0}^{2k} & \dots & 0 & \dots \\
0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \dots & 0 & \dots
\end{pmatrix}.
$$

Оператор B_0 має узагальнено-обернений оператор (є зліченновимірною $(\infty \times 2k)$-

матрицею) вигляду

$$B_0^- = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{2k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Проектори відповідно мають вигляд

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = I - B_0^- B_0 = \operatorname{diag}\left\{\underbrace{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0}_{2k}, 1, 1, \dots, 1, \dots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} = I - B_0 B_0^- = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{2k}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умову $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$ теореми 2 завжди виконано

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{2k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2 крайова задача (1), (2) із зліченновимірною матрицею $A(t)$ вигляду (32), зліченновимірним вектором-функцією $f(t)$ вигляду (33) і крайовою умовою вигляду (34) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a;b], \mathfrak{M})$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2k}$ має зліченну кількість розв'язків $\big(\rho = \dim R\big(\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\big) = \infty\big)$. Згідно з класифікацією С. Г. Крейна [11] така задача називається d-нормальною.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

2. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 16–19.

3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

4. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
6. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Bounded solution of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mount. Math. Publ. — 2007. — **38**. — P. 29 – 40.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.
9. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.

Одержано 30.09.09