НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.925.52

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.У. Ахметова, К.К. Кенжебаев

Актюбинск. ун-т,
Казахстан, 463019, Актобе, просп. А. Молдагуловой, 34

В.Н. Лаптинский

Ин-т прикл. оптики НАН Белоруссии,
Белоруссия, 212793, Могилев

We consider important problems of the constructive theory of periodic solutions of systems of differential equations. We establish sufficient conditions for the asymptotic stability of liniar periodic differential systems. We present sufficient conditions of stability and construct stabilizing controls of continuous type for a nonlinear periodic system. We also solve the problem of stabilization of the angular velocity of an artificial satellite with partial dynamical symmetry.

Розглядаються актуальні питання конструктивної теорії періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь. Одержано достатні умови асимптотичної стійкості лінійних періодичних диференціальних систем. Наведено достатні умови стабілізованості та побудовано стабілізуючі управління неперервного типу в нелінійній періодичній системі. Розв'язана задача стабілізації кутової швидкості штучного супутника, що має часткову динамічну симетрію.

Введение. Изучение многих задач современной механики, физики и техники связано с исследованием управляемых колебательных систем. Особенно интенсивно проводятся исследования колебательных процессов, возникающих в системах электро- и радиотехники, динамики космических полетов и в других разделах современной науки и техники.

Теории колебаний посвящена обширная литература. Основное внимание уделяется периодическим и почти периодическим решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные колебания.

В последние годы происходит интенсивное развитие конструктивной теории колебаний. Но некоторые вопросы конструктивной теории периодических решений дифференциальных систем в общей постановке не получили в современной математической науке своего решения. Прежде всего это вопросы существования, отыскания периодических решений, вопросы их устойчивости и стабилизации.

Данная работа посвящена исследованию устойчивости и стабилизации периодических дифференциальных систем.

В п. 1 на основе теории Флоке – Ляпунова с помощью метода интегро-функциональных преобразований получены эффективно проверяемые достаточные условия асимптотической устойчивости линейных периодических дифференциальных систем. В п. 2 получены эффективно проверяемые достаточные условия стабилизируемости и стабилизирующие управления непрерывного типа в нелинейной периодической системе, построенные по принципу линейной обратной связи. В п. 3 на основе методики построения стабилизирующих управлений для нелинейных колебательных систем, изложенной в п. 2, рассматривается задача стабилизации угловой скорости искусственного спутника, обладающего частичной динамической симметрией.

1. Об устойчивости линейных периодических систем. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ — вещественная ω-периодическая матрица класса $\mathbb{C}$.

В монографиях [1, 2] изложены методы исследования и многочисленные результаты по теории линейных периодических дифференциальных систем. Задача об устойчивости этих систем вызывает особый интерес для теории и приложений. Ее изучению посвящено много работ (см., например, [1 – 4]). Однако еще мало изучен вопрос получения конструктивных условий устойчивости систем общего вида [4].

В настоящем пункте приведены эффективно проверяемые достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1). Они получены с помощью метода интегро-функциональных преобразований [4] на основе теории Флоке – Ляпунова [1, 2].

Пусть $X(t)$ — нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений (матрицант) системы (1). Тогда $X(0) = E$, где E — единичная матрица.

На основе соотношения

$$X(\omega)\varphi = \rho\varphi, \tag{2}$$

где φ — собственный вектор матрицы монодромии $X(\omega)$, определяются мультипликаторы ρ_j, $j = 1, 2, ..., n$, как корни характеристического уравнения $\det[X(\omega) - \rho E] = 0$.

Выполнив оценку по норме в (2), получим следующую оценку:

$$|\rho| \leq \|X(\omega)\|. \tag{3}$$

Здесь и далее принята норма матриц, для которой $\|E\| = 1$.

На основании теоремы Флоке – Ляпунова (см., например, [5]) из (3) следует, что при выполнении неравенства $\|X(\omega)\| < 1$ система (1) является асимптотически устойчивой.

В дальнейшем будем использовать неравенство (3) при получении условий устойчивости системы (1). Очевидно, качество условий устойчивости зависит от эффективности оценок нормы матрицы $X(\omega)$. Такие условия можно получить на основе результатов исследований, приведенных в [4, 6].

Выведем эффективно проверяемые условия асимптотической устойчивости линейных периодических систем с помощью метода функциональных преобразований, изложенного в работе [6].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

$$\sigma \equiv \|E + B(\omega)\| < 1, \tag{4}$$

$$\int_0^{\omega} \|A(\tau)\| \, d\tau < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{1-\sigma}}}. \tag{5}$$

Тогда система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. В уравнении

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(0) = E, \tag{6}$$

сделаем замену по формуле

$$X = (E + B(t))\, Y, \tag{7}$$

где $B(t) = \int\limits_0^t A(\tau) d\tau$.

Из условия (5) следует, что $\|B(t)\| < 1$, поэтому матрица $E + B(t)$ невырожденная при $t \in \mathbb{R}$. Подставляя (7) в (6), получаем

$$\frac{dY}{dt} = H(t)Y, \tag{8}$$

где $H(t) = (E + B(t))^{-1} A(t) B(t)$.

Из (8) имеем

$$Y(t) = E + \int_0^t H(\tau)Y(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Выполнив оценку по норме в (9), получим

$$\|Y(t)\| \le 1 + \int_0^t \|H(\tau)\| \, \|Y(\tau)\| \, d\tau. \tag{10}$$

Используя лемму Гроноулла – Беллмана, из (10) имеем

$$\|Y(t)\| \le \exp \int_0^t \|H(\tau)\| \, d\tau.$$

Для нормы матрицы $H(\tau)$ справедлива оценка

$$H(\tau)\| \le \frac{\|A(\tau)\| \int\limits_0^{\tau} \|A(s)\| ds}{1 - \varphi}. \tag{11}$$

Отсюда

$$\int_0^\omega \|H(\tau)\|\, d\tau \le \frac{\varphi^2}{2(1-\varphi)}.$$

Используя очевидное неравенство $e^x < \dfrac{1}{1-x}$, $0 < x < 1$, нетрудно получить следующую оценку:

$$\|Y(\omega\| \le \frac{1}{1 - \int\limits_0^\omega \|H(\tau)\|\, d\tau} \le \frac{2(1-\varphi)}{2 - 2\varphi - \varphi^2}, \tag{12}$$

где $\varphi = \int\limits_0^\omega \|A(\tau)\| d\tau$.

Далее из (7) имеем

$$X(\omega) = (E + B(\omega))\, Y(\omega). \tag{13}$$

Используя (12), из (13) получаем

$$\|X(\omega)\| \le \sigma \frac{2(1-\varphi)}{2 - 2\varphi - \varphi^2}.$$

Поскольку из (5) следует неравенство

$$\sigma \frac{2(1-\varphi)}{2 - 2\varphi - \varphi^2} < 1,$$

то $\|X(\omega)\| < 1$. Следовательно, система (1) асимптотически устойчива.

Замечание 1. Очевидно, что условие (5) заведомо будет выполняться, если

$$\alpha\omega < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{1-\sigma}}}, \tag{14}$$

где $\alpha = \max\limits_{0 \le t \le \omega} \|A(t)\|$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = (A_1(t) + A_2(t))\, x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где $A_1(t), A_2(t)$ — непрерывные ω-периодические матрицы.

Наряду с (15) рассмотрим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1(t)\varphi. \tag{16}$$

Пусть нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений $\Phi(t)$ системы (16) ω-периодическая, т. е.

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t). \tag{17}$$

В системе (15) сделаем замену по формуле $x = \Phi(t)z$. Тогда для векторной величины z получим систему

$$\frac{dz}{dt} = P(t)z, \tag{18}$$

где $P = \Phi^{-1}A_2\Phi$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (17) и*

$$\sigma = \|E + \widetilde{P}(\omega)\| < 1, \qquad \int_0^\omega \|P(\tau)\|d\tau < \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{1-\sigma}}},$$

где $\widetilde{P}(\omega) = \int\limits_0^\omega P(\tau)d\tau.$

Тогда система (15) асимптотически устойчива.

Эту теорему нетрудно доказать с помощью леммы 1, примененной к системе (18).

Обратимся к системе (1). В случае, когда

$$\int_0^\omega A(\tau)\,d\tau = 0,$$

удобно использовать замену

$$x = (\exp B(t))\,y. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (1), получаем

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y,$$

где, согласно [7],

$$Q(t) = l^{-B(t)}\left(A(t)l^{B(t)} - \frac{dl^{B(t)}}{dt}\right) \equiv \int_0^1 \mu l^{-\mu B(t)}[A(t),B(t)]\,l^{\mu B(t)}d\mu,$$

$$[A,B] \overset{\text{def}}{=} AB - BA.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия:*

$$B(\omega) = 0, \quad \sigma \equiv \|E + \widetilde{Q}(\omega)\| < 1, \quad \int\limits_0^\omega \|Q(t)\| dt < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{1-\sigma}}},$$

где $\widetilde{Q}(\omega) = \int\limits_0^\omega Q(t)dt.$

Тогда система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = (q + L)x,$$

где

$$q = \int\limits_0^1 l^{\mu B} A l^{-\mu B} d\mu,$$

$$L = \int\limits_0^1 d\mu \int\limits_0^\mu l^{sB} [A, B]\, l^{-sB} ds.$$

Полагая в (15) $A_1 = q, \ A_2 = L$ и используя (19), применим теорему 1. Тогда, очевидно, получим справедливость утверждения следствия 1.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{12}x_1 + \frac{7}{48}(\cos 2\pi t)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{7}{48}(\cos 2\pi t)x_1 - \frac{1}{12}x_2. \end{aligned} \tag{20}$$

В дальнейшем будем использовать следующую норму матриц:

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Для системы (20) имеем

$$\omega = 1, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{12} & \dfrac{7}{48}\cos 2\pi t \\ \dfrac{7}{48}\cos 2\pi t & -\dfrac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$B(1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{12} \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \|E + B(1)\| = \frac{11}{12}, \qquad \alpha = \frac{11}{48}.$$

Легко видеть, что для системы (20) справедливо неравенство (14). Следовательно, согласно лемме 1, эта система асимптотически устойчива.

2. О задаче стабилизации периодических систем управления. Управляемые колебательные системы периодического типа распространены в различных областях механики, техники, радиотехники (см., например, [8 – 10]). Решение задачи стабилизации колебаний является важным этапом исследования таких систем. Актуальным является изучение вопросов стабилизируемости колебаний и построения стабилизирующих управлений для систем со многими степенями свободы.

В настоящем пункте указанные вопросы изучены в случае управляемых колебаний, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \nu), \tag{21}$$

где $(t, y, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $f(t, y, \nu) \in \mathbb{C}^{(0,1,1)}_{t\,y\,\nu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ и $f(t, y, \nu)$ — ω-периодическая по t функция.

Пусть ω-периодическая вектор-функция $y = y_p(t) \in \mathbb{C}^1$ является программным (невозмущенным) движением системы (21), соответствующим некоторому программному управлению $\nu = \nu_p(t)$, где $\nu_p(t)$ — ω-периодическая вектор-функция класса $\mathbb{C}$.

Решим задачу непрерывной стабилизации программного движения системы (21) с помощью управлений, которые построены по принципу линейной обратной связи (см. [4]). Используя величины

$$x = y - y_p(t), \qquad u = \nu - \nu_p(t),$$

запишем для (21) систему в отклонениях

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u), \tag{22}$$

где $g(t, x, u) = f(t, x + y_p(t), u + \nu_p(t)) - f(t, y_p(t), \nu_p(t))$.

Задача состоит в отыскании такого закона автоматического управления объектом, при котором программное движение оказывается асимптотически устойчивым. Иными словами, в системе (22) следует сделать асимптотически устойчивым решение $x = 0$ выбором управления

$$u = C(t)x, \tag{23}$$

где $C(t)$ — непрерывная ω-периодическая $(r \times n)$-матрица.

Выделяя в (22) члены, линейные относительно x, u, получаем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u + G(t, x, u),$$

где $A(t), Q(t)$ — ω-периодические матрицы соответствующих размеров.

Нелинейная часть $G(t,x,u)$ такова, что функция

$$\frac{\|G(t,x,u)\|}{\|x+\|u\|} \to 0$$

равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ при $\|x\| + \|u\| \to 0$.

Решение задачи стабилизации системы (22) согласно [11, с. 83] сводится к решению задачи стабилизации системы линейного приближения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u. \tag{24}$$

Пусть система (24) приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon B)x + Q(t)u, \tag{25}$$

где A_0, B — ω-периодические матрицы, ε — скалярный параметр.

Запишем систему (25), замкнутую управлением (23):

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon B + QC)x. \tag{26}$$

Пусть нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_0(t)\varphi$$

ω-периодическая, т. е. $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)$. По формуле

$$x = \Phi(t)z \tag{27}$$

сделаем замену в системе (26). Тогда для векторной величины z получим систему

$$\frac{dz}{dt} = (\varepsilon P + RC\Phi)z, \tag{28}$$

где $P = \Phi^{-1}B\Phi,\ R = \Phi^{-1}Q$.

Примем следующие обозначения:

$$M = RR^T, \quad a = \max_t \left\|P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\overline{P}\right\|,$$

$$\mu = \max_t \left\|M(t)\overline{M}^{-1}\right\|,$$

где $t \in [0,\omega],\ (\cdot)^T$ — операция транспонирования матриц, черта сверху обозначает усреднение по $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — кубическая либо октаэдрическая норма векторов и матриц [5, с.21]; очевидно, что $a \geq 0,\ \mu \geq 1$.

Лемма 2. *Пусть матрица обратной связи в (28) выбрана так, что выполняются неравенства*

$$\sigma \equiv \left\|E + \omega\overline{N}\right\| < 1, \qquad \max_{0\le t\le\omega} \|N(t)\| < \frac{2}{\omega(1+\sqrt{1+2m})}, \tag{29}$$

где E — единичная матрица, $N = \varepsilon P + RC\Phi$, $m = \dfrac{1}{1-\sigma}$.

Тогда система (25) стабилизируема управлением (23).

Для доказательства леммы 2 достаточно сослаться с учетом (14) на лемму 1, согласно которой выполнение неравенств (29) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (28).

Так как (27) является преобразованием Ляпунова [5, с. 154], то система (26) асимптотически устойчива.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

$$\det \overline{M} \neq 0, \qquad (|\varepsilon|a + \mu\lambda)\,\omega < \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}}, \tag{30}$$

где λ — вещественный параметр, $0 < \lambda < \lambda_0$.

Тогда выбором матрицы C систему (26) можно сделать асимптотически устойчивой.

Доказательство. Матрицу обратной связи C в искомом управлении будем искать в виде

$$C(t) = \left[R^T(t)\alpha + \beta(t)\right]\Phi^{-1}(t), \tag{31}$$

где α — постоянная матрица, подлежащая определению, $\beta(t)$ — ω-периодическая матрица-функция, подчиненная условию

$$\int_0^\omega R(\tau)\beta(\tau)\,d\tau = 0. \tag{32}$$

С учетом (31) система (28) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = N(t)z, \tag{33}$$

где $N = \varepsilon P(t) + M(t)\alpha + R(t)\beta(t)$.

Постоянную α выберем так, чтобы матрица (31) удовлетворяла уравнению

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \left[\varepsilon P(\tau) + R(\tau)C(\tau)\Phi(\tau)\right]d\tau = -\lambda E. \tag{34}$$

Тогда получим $\sigma = 1 - \omega\lambda$. Очевидно, $\sigma < 1$, если $\lambda\omega < 1$.

Подставляя (31) в (34), с учетом (32) получаем

$$\overline{M}\alpha = -(\lambda E + \varepsilon \overline{P}). \tag{35}$$

Поскольку $\det\, \overline{M} \neq 0$, то из (35) имеем

$$\alpha = -\overline{M}^{-1}(\lambda E + \varepsilon \overline{P}). \tag{36}$$

Далее на основании (36) находим

$$\begin{aligned} C(t) &= \left[-R^T(t)\overline{M}^{-1}(\lambda E + \varepsilon \overline{P}) + \beta(t)\right] \Phi^{-1}(t), \\ N(t) &= \varepsilon P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\left(\lambda E + \varepsilon \overline{P}(t)\right) + R(t)\beta(t), \end{aligned} \tag{37}$$

или

$$N(t) = \varepsilon \left[P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\overline{P}\,\right] - \lambda M(t)\overline{M}^{-1} + R(t)\beta(t). \tag{38}$$

Выполнив оценку по норме в (38), получим

$$\|N(t)\| \leq |\varepsilon| a + \lambda\mu + \|R(t)\|\,\|\beta(t)\|.$$

Пусть λ достаточно мало, т. е. $0 < \lambda < \lambda_0$. Тогда выполнение неравенства (30) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (33) при $\beta = 0$.

Пусть $\beta(t)$ $(\beta(t) \not\equiv 0)$ — матрица, удовлетворяющая условию (32). Тогда система (33) также будет асимптотически устойчивой, если матрица $\beta(t)$ по норме достаточно мала: $\|\beta(t)\| < \rho$.

На основе неравенства (30) величину ρ можно выразить через исходные данные системы (26) следующим образом. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dz}{dt} = K(t)z, \tag{39}$$

где $K(t) = \varepsilon \left[P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\overline{P}\,\right] - \lambda M(t)\overline{M}^{-1} + R(t)\beta(t)$.

Вследствие подчиненности матрицы $\beta(t)$ условию (32) имеем

$$\overline{K} = -\lambda E.$$

Поскольку

$$\|K(t)\| \leq |\varepsilon| a + \lambda\mu + r\widetilde{\beta},$$

где $r = \max\limits_{0\leq t\leq\omega} \|R(t)\|$, $\widetilde{\beta} = \max\limits_{0\leq t\leq\omega} \|\beta(t)\|$, то, согласно лемме 2, выполнение неравенства

$$\omega\left(|\varepsilon| a + \lambda\mu + r\widetilde{\beta}\right) < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{\lambda\omega}}} \tag{40}$$

является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (39) при достаточно малых $\lambda,\ |\varepsilon|$.

Из (40) получаем

$$\widetilde{\beta} < \frac{1}{r}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \lambda\mu - |\varepsilon| a\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Из неравенства (30) нетрудно найти оценку области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, в которой система (26) стабилизируема при $\beta(t) \equiv 0$.

Действительно, поскольку неравенство

$$\mu\lambda\omega < \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}}$$

выполняется при

$$0 < \lambda < \frac{2}{\omega\mu(\mu+2)},$$

то при этих значениях λ имеет смысл неравенство

$$a\omega|\varepsilon| < \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \mu\lambda\omega.$$

Отсюда находим

$$|\varepsilon| < \frac{1}{a\omega}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \mu\lambda\omega\right) = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{2}{\lambda\omega+\sqrt{\lambda^2\omega^2+2\lambda\omega}} - \mu\right) \equiv \varepsilon_0(\lambda).$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение $y = y_p(t)$ системы (21) выбором управления (23) можно сделать асимптотически устойчивым.*

Для доказательства следствия достаточно сослаться на лемму 2 и теорему Ляпунова [5, с. 294].

Очевидно, програмное движение $y = y_p(t)$ стабилизируется управлением

$$\nu - \nu_p(t) = \left[-R^T(t)\overline{M}^{-1}(\lambda E + \varepsilon\overline{P}) + \beta(t)\right]\Phi^{-1}(t)(y - y_p(t)).$$

В ходе доказательства теоремы 2 дан конструктивный метод построения управления $\nu - \nu_p(t)$, при этом коэффициенты усиления C_{ij}, $i = 1, ..., r$; $j = 1, ..., n$, определяются в замкнутой форме через элементы матриц A_0, B и Q. С помощью разработанного метода можно строить семейства стабилизирующих управлений для произвольных программных движений. Данный метод ориентирован на ситуацию, которая встречается почти всегда: когда конструктивные параметры объекта управления известны неточно.

Замечание 3. Свобода выбора параметра λ и матрицы $\beta(t)$ может быть использована при решении задач практической реализации полученных законов управления, например при получении оценок нормы управления и нормы фазового вектора замкнутой системы, при вычислении величины длительности переходного процесса, скорости затухания и т. д.

3. О стабилизации вращательных движений динамически симметричного спутника. В настоящее время с помощью искусственных спутников и других космических летательных аппаратов проводится интенсивное исследование космоса. Поэтому понятен интерес к задаче ориентации и стабилизации космических аппаратов в пространстве. Эта задача с различных позиций исследовалась многими авторами (см., например, [4, 10 – 18]).

В данном пункте рассматривается задача стабилизации угловой скорости искусственного спутника, обладающего частичной динамической симметрией. Исследование основано на методике построения стабилизирующих управлений для нелинейных колебательных систем, изложенной в п. 2.

Рассмотрим математическую модель вращательного движения искусственного спутника. При действии управляющего момента относительно главных осей инерции спутника уравнения углового движения его задаются уравнениями Эйлера в виде [19, с. 118]

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{J_3 - J_2}{J_1}\omega_2\omega_3 + \frac{\nu_1}{J_1}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{J_1 - J_3}{J_2}\omega_3\omega_1 + \frac{\nu_2}{J_2}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\frac{J_2 - J_1}{J_3}\omega_1\omega_2 + \frac{\nu_3}{J_3}, \end{aligned} \tag{41}$$

где $J_i, \omega_i, \nu_i,\ i = 1, 2, 3,$ — соответственно составляющие момента инерции, угловой скорости и управляющего момента относительно одной из главных осей спутника.

Пусть управляемый объект имеет частичную динамическую симметрию, так что $J_1 = J_2 = J$. Тогда система (41) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{J - J_3}{J}\omega_2\omega_3 + \frac{\nu_1}{J}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{J - J_3}{J}\omega_3\omega_1 + \frac{\nu_2}{J}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{\nu_3}{J_3}. \end{aligned} \tag{42}$$

Выберем в качестве программного движения решение системы (42) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ и при начальных условиях

$$\omega_1(0) = \omega_{10}, \quad \omega_2(0) = \omega_{20}, \quad \omega_3(0) = \omega_{30} \neq 0.$$

Тогда в свободной системе совершаются гармонические колебания частоты

$$\vartheta = \left| \left(\frac{J_3}{J} - 1 \right) \omega_{30} \right|.$$

Решим задачу непрерывной стабилизации системы (42) управлениями, построенными по принципу линейной обратной связи. Пусть, для определенности, $J > J_3$.

Примем следующие обозначения:

$$a = \frac{J - J_3}{J}\omega_{30}, \quad \varepsilon = \frac{J - J_3}{J}\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}.$$

Для системы (42) относительно решения

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_0 \sin(at + \varphi), \quad \widetilde{\omega}_2 = \omega_0 \cos(at + \varphi), \quad \widetilde{\omega}_3 = \omega_{30}$$

запишем систему линейного приближения

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_2 + \varepsilon \cos(at + \varphi)x_3 + qu_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_1 - \varepsilon \sin(at + \varphi)x_3 + qu_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= q_3 u_3, \end{aligned} \tag{43}$$

где $x_i = \Delta\omega_i \equiv \omega_i - \widetilde{\omega}_i, u_i = \Delta\nu_i \equiv \nu_i,\ i = 1, 2, 3;\ q = \dfrac{1}{J}, q_3 = \dfrac{1}{J_3}$.

Система уравнений (43) является периодической с периодом $\omega = \dfrac{2\pi}{a}$.

Согласно [11, с. 83], решение задачи стабилизации системы в отклонениях для (42) сводится к решению задачи стабилизации системы (43).

Запишем систему (43) в виде векторного дифференциального уравнения (26), в котором полагаем $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2, x_3)$, $u = \operatorname{colon}(u_1, u_2, u_3)$, $Q = \operatorname{diag}(q, q, q_3)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(at + \varphi) \\ 0 & 0 & -\sin(at + \varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизирующее управление будем строить по принципу линейной обратной связи (23), где $C(t)$ — непрерывная $2\pi/a$ -периодическая (3×3)-матрица.

Для отыскания матрицы C воспользуемся методикой, изложенной в п. 2. Применительно к данной задаче имеем

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at & 0 \\ -\sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = Q^2.$$

По формуле (37) получим матрицу коэффициентов усиления

$$C(t) = \left[-\Phi(t)Q^{-1}(\lambda E + \varepsilon P) + \beta(t)\right]\Phi^{-1}(t).$$

Согласно (38) матрица N задается соотношением

$$N(t) = -\lambda E + R(t)\beta(t),$$

где

$$R = \begin{pmatrix} q\cos at & -q\sin at & 0 \\ q\sin at & q\cos at & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Исследуем устойчивость системы

$$\frac{dz}{dt} = N(t)z \tag{44}$$

с помощью леммы 1. Имеем

$$\sigma = \left\| E + \int\limits_0^\omega N(\tau)d\tau \right\| = 1 - \lambda\omega,$$

$$\|N(t)\| = \| -\lambda E + R(t)\beta(t)\| \le \lambda + \gamma\widetilde{\beta},$$

где $\gamma = \max\limits_{0\le t\le\omega}\{2q, q_3\},\ \widetilde{\beta} = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\beta(t)\|$.

Далее запишем неравенство (14) применительно к (44):

$$(\lambda + \gamma\widetilde{\beta})\omega < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{\lambda\omega}}}. \tag{45}$$

Из (45) при $\beta = 0$ (а следовательно, и $\widetilde{\beta} = 0$)

$$\lambda\omega < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{\lambda\omega}}}.$$

Это неравенство выполняется, если $0 < \lambda\omega < \dfrac{2}{3}$.

Следовательно, при достаточно малых $\lambda, \widetilde{\beta}$ справедливо неравенство

$$\gamma\omega\widetilde{\beta} < \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \lambda\omega \right) = \lambda\omega \left(\frac{2}{\lambda\omega + \sqrt{\lambda\omega(\lambda\omega + 2)}} - 1 \right).$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{\beta} < \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{2}{\lambda\omega + \sqrt{\lambda\omega(\lambda\omega + 2)}} - 1 \right) \equiv \widetilde{\beta}_0(\lambda).$$

Таким образом, искусственный спутник стабилизируем на основе линейной обратной связи

$$u = C(t)x,$$

где

$$C(t) = \left[-\Phi(t)Q^{-1}(\lambda E + \varepsilon P) + \beta(t)\right]\Phi^{-1},$$

причем величины $\lambda, \widetilde{\beta}$ достаточно малы.

1. *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963. — 272 с.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
3. *Рубановский В.П.* Устойчивость нулевого решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Итоги науки и техники. Общая механика / ВИНИТИ. — 1971.
4. *Самойленко А.М., Кенжебаев К., Лаптинский В.Н.* Комплексное исследование периодических систем дифференциальных уравнений. — Киев, 1995. — 50 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 95.1).
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
6. *Самойленко А.М., Кенжебаев К., Лаптинский В.Н.* О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 3. — С. 345 – 352.
7. *Самойленко А.М., Кенжебаев К., Лаптинский В.Н.* Некоторые конструктивные методы анализа периодических нелинейных систем дифференциальных уравнений. — Киев, 1994. — 40 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 94.34).
8. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. — М.: Наука, 1970. — 318 с.
9. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
10. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
11. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
12. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974. — 600 с.
13. *Крементуло В.В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. — М.: Наука, 1977. — 264 с.
14. *Зубов В.И., Ермолин В.С., Сергеев С.Л., Смирнов Е.Я.* Управление вращательным движением твердого тела. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. — 200 с.
15. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Исследование космического пространства. — М.: ВИНИТИ, 1978. — 224 с. — (Итоги науки и техники; Т. 11).
16. *Каргу Л.И.* Системы угловой стабилизации космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980.
17. *Попов В.И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1986. — 184 с.
18. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. — М.: Наука, 1988. — 328 с.
19. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 552 с.

Получено 19.04.99