УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

В. Н. Шинкаренко

Одес. эконом. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Преображенская, 8
e-mail: shinkar@te.net.ua

Н. В. Шарай

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: rusnat@i.ua

An asymptotic representations of a certain class of the nonoscillation solutions to a differential equation with an exponential nonlinearity is obtained. Besides, necessary and sufficient conditions for existence of this solutions are stated.

Отримано асимптотичні зображення одного класу правильних неколивних розв'язків диференціального рівняння з експоненціальною нелінійністю. Крім того, встановлено необхідні і достатні умови існування таких розв'язків.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\left(\left|y^{(n-1)}\right|^{\lambda-1} y^{(n-1)}\right)' = \alpha_0\, p(t)\, e^{\sigma y}, \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma, \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

При $n = 2$ частные виды такого уравнения встречаются в астрофизике, газовой динамике, механике жидкостей, теории плазмы продуктов сгорания и других областях естествознания.

Асимптотическое поведение решений уравнения (1) при $n = 2$ исследовали В. М. Евтухов и Н. Г. Дрик в работах [1–5].

Легко видеть, что каждое решение y уравнения (1), определенное в некоторой левой окрестности ω, имеет либо одно из свойств $\mathcal{P}^i_\omega$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = c_i \neq 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \qquad \text{при} \quad k = i+1, \ldots, n-1,$$

либо свойство $\mathcal{P}_\omega$:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Решения со свойством $\mathcal{P}_\omega^i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, исследовались в работе [6]. Там же были исследованы решения со свойством $\mathcal{P}_\omega$, для которых $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = 0$.

Среди этих классов решений наиболее трудными для изучения являются решения со свойством $\mathcal{P}_\omega$, для которых

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = \pm\infty. \tag{2}$$

Для их исследования были предложены два метода. Первый основан на введении дополнительного ограничения на решение со свойством $\mathcal{P}_\omega$, а именно, на существовании конечного или равного $\pm\infty$ предела

$$\mu_0(y) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y''(t)}. \tag{3}$$

Такие решения названы $\mathcal{P}_{\omega,0}$-решениями. В работе [7] получены условия существования и асимптотические представления $\mathcal{P}_{\omega,0}$-решений уравнения (1).

Второй метод основан на рассмотрении так называемых $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решений. Решение y уравнения (1) будем называть $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и для функции $z(t) = e^{y(t)}$ выполняются условия:

1) $z^{(n)}(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, \omega[$;

2) при любом $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ либо $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z^{(k)}(t) = 0$, либо $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z^{(k)}(t) = \pm\infty$;

3) существует конечный или равный $\pm\infty$ предел

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[z^{(n-1)}(t)]^2}{z^{(n)}(t) z^{(n-2)}(t)} = \lambda_{n-1}^0.$$

В работах [8, 9] получены асимптотические представления $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решений уравнения (1) при $\lambda = 1$. Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия их существования.

В данной статье предпринята попытка распространения этих результатов на случай произвольного значения параметра λ.

2. Формулировка основных теорем и некоторые вспомогательные утверждения. Введем обозначения

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \mu_0 = \lim_{\mu \to \lambda_{n-1}^0} \frac{(n-1)\mu - n + 2}{\mu - 1},$$

$$J_A(t) = \int_A^t p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{(n-1)\lambda} \, d\tau, \quad A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{(n-1)\lambda} \, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{(n-1)\lambda} \, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_A(t) = \int_A^t p^{\frac{1}{\lambda}}(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda}} \, d\tau, \quad A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p^{\frac{1}{\lambda}}(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda}} \, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p^{\frac{1}{\lambda}}(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda}} \, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

и сформулируем два основных результата.

Теорема 1. *Для существования $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda^0_{n-1})$-решений уравнения (1), для которых $\lambda^0_{n-1} \notin \notin \left\{1, \dfrac{n-2}{n-1}\right\}$ и при $\lambda^0_{n-1} = 0$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{z^{(n)}(t)\,\pi_\omega(t)}{z^{(n-1)}(t)}$, необходимо, а если алгебраическое (относительно ρ) уравнение*

$$(\rho - \lambda(n-1)) \prod_{k=0}^{n-2} (\rho - k) = (-1)^n \mu_0 \sigma (n-1)! \tag{4}$$

не имеет чисто мнимых корней, то и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)} = -\mu_0\sigma, \tag{5}$$

$$\alpha_0 \sigma (-1)^n \lambda \left[\pi_\omega(t)\right]^{n-1} J_A(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[. \tag{6}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma} \left[\ln|J_A(t)| + \ln\left| \frac{\sigma |\mu_0|^{1-\lambda}}{\lambda\,(n-1)[(n-2)!]^\lambda} \right| \right] + o(1), \tag{7}$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} \mu_0 (k-1)!}{[\pi_\omega(t)]^k} [1 + o(1)], \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) p'(t)}{p(t)}$. Тогда для существования $\tilde{\mathcal{P}}_\omega\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)$-решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_A(t)}{I_A(t)} = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_0 \sigma (-1)^n [\pi_\omega(t)]^{n-1} I_A(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[. \tag{10}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y(t) = -\frac{\lambda}{\sigma} \ln|I_A(t)| + C_2 + o(1), \tag{11}$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{\lambda}{\sigma} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-1}} \frac{I'_A(t)}{I_A(t)} [1 + o(1)], \quad k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где

$$C_2 = \frac{\lambda}{\sigma} \ln\left| \frac{\lambda}{\sigma} |\lambda(1-n)|^{\frac{1}{\lambda}} (n-2)! \right|.$$

При доказательстве сформулированных теорем будут использованы приведенные ниже вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $y(t)$ *является* $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda^0_{n-1})$*-решением уравнения (1) и* $\lambda^0_{n-1} \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1, \pm\infty\right\}$. *Тогда при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$z^{(k-1)}(t) \sim \frac{[(\lambda^0_{n-1}-1)\pi_\omega(t)]^{n-k}}{\prod\limits_{i=k}^{n-1} a_{0i}}\, z^{(n-1)}(t), \quad k=1,\ldots,n-1,$$

где $a_{0i} = (n-i)\lambda^0_{n-1} - (n-i-1)$, $i=1,\ldots,n-1$.

Лемма 2. *Если* $y(t)$ *является* $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(\pm\infty)$*-решением уравнения (1), то при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$z^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!}\, z^{(n-1)}(t), \quad k=1,\ldots,n-1, \quad z^{(n)}(t) = o\left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Лемма 3. *Пусть* $y(t)$ *является* $\tilde{\mathcal{P}}_\omega\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$*-решением уравнения (1), где* $i \in \{1,\ldots,n-2\}$. *Тогда при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$z^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\,\pi_\omega(t)\,]^{i-k}}{(i-k)!}\, z^{(i-1)}(t), \quad k=1,\ldots,i-1,$$

$$z^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i}\frac{(k-i)!}{[\,\pi_\omega(t)\,]^{k-i}}\, z^{(i)}(t), \quad k=i+1,\ldots,n,$$

$$z^{(i)}(t) = o\left(\frac{z^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Лемма 4. *Пусть* $y(t)$ *является* $\tilde{\mathcal{P}}_\omega(0)$*-решением уравнения (1). Тогда имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$z^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\, z^{(n-2)}(t), \quad k=1,\ldots,n-2, \quad z^{(n-1)}(t) = o\left(\frac{z^{(n-2)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right).$$

Более того, если существует $\lim \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z^{(n)}(t)\,\pi_\omega(t)}{z^{(n-1)}(t)}$, *то при* $t \uparrow \omega$ $z^{(n)}(t) \sim -\frac{z^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}$.

Лемма 5. *Пусть* $y(t)$ *является* $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda^0_{n-1})$*-решением уравнения (1). Тогда если* $\lambda^0_{n-1} \notin \notin \{0,1\}$ *либо* $\lambda^0_{n-1} = 0$ *и существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел* $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{z^{(n)}(t)\pi_\omega(t)}{z^{(n-1)}(t)}$, *то для* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *при* $t \uparrow \omega$ *справедливы асимптотические формулы*

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)} \sim \frac{(-1)^k k!}{\pi_\omega^k(t)} \frac{z'(t)}{z(t)}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} z^{(k+1)}(t) &\sim \left(1 - \frac{k}{\mu_0}\right) \frac{z'(t)}{z(t)}\, z^{(k)}(t), \quad \text{если} \quad \lambda_{n-1}^0 \neq \frac{n-2}{n-1}, \\ z^{(k+1)}(t) &\sim -\frac{k}{\pi_\omega(t)} z^{(k)}(t), \quad \text{если} \quad \lambda_{n-1}^0 = \frac{n-2}{n-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Леммы 1 – 4 доказаны в работе [10]. Справедливость леммы 5 непосредственно следует из лемм 1 – 4 и формулы нахождения k-й производной $(k \geq 2)$ частного двух функций (см. [11, с. 49], гл. 1, § 3).

3. Доказательство основных теорем. ***Доказательство теоремы 1.*** *Необходимость.* Предположим, что $y : [t_0, \omega) \to \mathbf{R}$ является $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением уравнения (1) таким, что $\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{1; \dfrac{n-2}{n-1}\right\}$. Тогда функция $z(t) = e^{y(t)}$ является решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{z'}{z}\right)^{(n-1)} = \frac{\alpha_0}{\lambda}\, p(t)\, z^\sigma \left|\left(\frac{z'}{z}\right)^{(n-2)}\right|^{1-\lambda}. \tag{15}$$

В силу леммы 5 из (15) получаем

$$\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{[\pi_\omega(t)]^{n-1}} \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\alpha_0}{\lambda}\, p(t)\, z^\sigma(t) \left|\frac{\mu_0 (n-2)!}{[\pi_\omega(t)]^{n-1}}\right|^{1-\lambda} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{16}$$

или

$$\frac{z'(t)}{z^{\sigma+1}(t)} = \frac{\alpha_0\, (-1)^{n-1} \mathrm{sign}[\pi_\omega^{n-1}(t)]\, (|\mu_0|\, (n-2)!)^{1-\lambda}}{\lambda\, (n-1)!}\, p(t)\, |\pi_\omega(t)|^{(n-1)\lambda}\, [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, интегрируя и учитывая, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases}$ имеем

$$\frac{-1}{\sigma\, z^\sigma(t)} = \frac{\alpha_0\, (-1)^{n-1} \mathrm{sign}[\pi_\omega^{n-1}(t)]\, (|\mu_0|\, (n-2)!)^{1-\lambda}}{\lambda\, (n-1)!}\, J_A(t)\, [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этого следует, что выполняется условие (6) и для $z(t)$ при $t \uparrow \omega$ имеет место асимптотическое представление

$$z(t) = \left(\frac{\sigma\, |\mu_0|^{1-\lambda}}{\lambda\, (n-1)[(n-2)!]^\lambda}\, J_A(t)\right)^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + o(1)]. \tag{17}$$

В силу лемм 1 – 4 для функции $z(t)$ справедливо свойство

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\,z'(t)}{z(t)}=\mu_0\quad\text{при}\quad\lambda_{n-1}^0\neq 1.$$

Из асимптотических представлений (16), (17) и указанного свойства функции $z(t)$ следует справедливость условия (5). Применяя формулы (17) для нахождения k-й производной частного двух функций, при $t\uparrow\omega$ получаем

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}=(-1)^k\,\frac{\mu_0 k!}{[\pi_\omega(t)]^{k+1}}\,[1+o(1)],\quad k=0,\ldots,n-2.$$

Вследствие замены $y(t)=\ln z(t)$ из этих асимптотических соотношений и (17) непосредственно следуют представления (7), (8).

Достаточность. Предположим, что выполнены условия (5), (6) и алгебраическое уравнение (4) не имеет корней с нулевой действительной частью. Докажем, что (1) имеет $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решение y такое, что $\lambda_{n-1}^0\notin\left\{1;\dfrac{n-2}{n-1}\right\}$, допускающее асимптотические представления (7), (8). Для этого с помощью преобразования $z(t)=e^{y(t)}$ переходим к уравнению (15), которое с помощью замен

$$x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,\quad\text{где}\quad\beta=\begin{cases}-1, & \text{если}\quad\omega=+\infty,\\ 1, & \text{если}\quad\omega<+\infty,\end{cases}$$

$$z(t)=\left(\frac{\sigma\,|\mu_0|^{1-\lambda}}{\lambda\,(n-1)\,[(n-2)!]^\lambda}\,J_A(t)\right)^{-\frac{1}{\sigma}}[1+u_1(x)],\tag{18}$$

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)}=(-1)^k\,\frac{\mu_0 k!}{[\pi_\omega(t)]^{k+1}}\,[1+u_{k+2}(x)],\quad k=0,\ldots,n-2,$$

сводим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
u_1'&=\beta\,\left(f_1(x)+p_{11}(x)u_1+\mu_0u_2+\mu_0U_1(u_1,u_2)\right),\\
u_k'&=\beta\,(k-1)\,(u_k-u_{k+1}),\quad k=2,3,\ldots,n-1,\\
u_n'&=\beta\,(n-1)\,\left(f_n(x)+p_{n1}(x)u_1+p_{nn}(x)\,u_n+U_n(x,u_1,u_n)\right),
\end{aligned}\tag{19}$$

где

$$f_1(x)=f_1(x(t))=\frac{J_A'(t)\pi_\omega(t)}{\sigma\,J_A(t)}+\mu_0,\quad f_n(x)=\frac{f_1(x)}{\mu_0},$$

$$p_{11}(x)=f_1(x),\ p_{n1}(x)=p_{n1}(x(t))=\frac{J_A'(t)\pi_\omega(t)}{\mu_0\,J_A(t)},\ p_{nn}(x)=p_{nn}(x(t))=1+(1-\lambda)\frac{J_A'(t)\pi_\omega(t)}{\mu_0\,\sigma\,J_A(t)},$$

$$U_1(u_1,u_2)=u_1\,u_2,\ U_n(x(t),u_1,u_2)=\frac{J_A'(t)\pi_\omega(t)}{\mu_0\sigma\,J_A(t)}\Big((1+u_1)^\sigma(1+u_n)^{1-\lambda}-\sigma\,u_1-(1-\lambda)\,u_n\Big).$$

В силу условия (5)

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{t\uparrow\omega} f_1(x(t)) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{t\uparrow\omega} f_n(x(t)) = \lim_{x\to+\infty} p_{11}(x) = \lim_{t\uparrow\omega} p_{11}(x(t)) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} p_{n1}(x) = \lim_{t\uparrow\omega} p_{n1}(x(t)) = -\sigma, \quad \lim_{x\to+\infty} p_{nn}(x) = \lim_{t\uparrow\omega} p_{nn}(x(t)) = \lambda. \tag{20}$$

Функции U_1, U_n имеют на множестве $[x_0,+\infty[\times D_0$, где $D_0\,:\,\{(u_1,u_2,u_n)\,:\,|u_i|<1,\, i = = 1,2,n\}$, непрерывные частные производные по переменным u_1, u_2, u_n и таковы, что

$$\frac{\partial U_1}{\partial u_i}(0,0) = 0,\ i=1,2,\ \frac{\partial U_n(x,u_1,u_n)}{\partial u_1} \longrightarrow 0,\ \frac{\partial U_n(x,u_1,u_n)}{\partial u_n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |u_1|+|u_n| \longrightarrow 0$$

равномерно по $x\in[x_0,+\infty[$, где x_0 — любое число из промежутка $[\beta\ln|\pi_\omega(a)|,+\infty\,[$.

В силу условий (20) предельная матрица коэффициентов линейной части полученной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$A=\beta\begin{pmatrix} 0 & \mu_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2) & -(n-2) \\ \sigma\,(1-n) & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda\,(n-1) \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы алгебраическое уравнение $\det[A-\beta\rho I]=0$, где I — единичная матрица, равносильно уравнению (4), которое не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для полученной системы уравнений выполнены все условия теоремы 2.1 из работы [12]. На основании этой теоремы данная система уравнений имеет хотя бы одно решение $(u_k)_{k=1}^n\,:\,[x_1,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n$, $x_1\ge x_0$, стремящееся к нулю при $x\longrightarrow+\infty$. Этому решению вследствие замен (18) и $y(t)=\ln z(t)$ соответствует решение уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (7), (8). Принимая во внимание эти представления и асимптотические формулы (14), убеждаемся в том, что это решение является $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением таким, что $\lambda_{n-1}^0\notin\left\{1;\dfrac{n-2}{n-1}\right\}$.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* Предположим, что $y\,:\,[t_0,\omega)\to\mathbf{R}$ является $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)$-решением уравнения (1). Тогда $z(t)=e^{y(t)}$ — решение дифференциального уравнения (15). Из (15) в силу леммы 5 получаем асимптотическое представление

$$\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{[\pi_\omega(t)]^{n-1}}\,\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\alpha_0}{\lambda}\,p(t)\,z^\sigma(t)\left|\frac{(n-2)!}{[\pi_\omega(t)]^{n-2}}\right|^{1-\lambda}\left|\frac{z'(t)}{z(t)}\right|^{1-\lambda}[1+o(1)] \ \text{ при } \ t\uparrow\omega \tag{21}$$

или

$$\frac{z'(t)}{z^{\frac{\sigma}{\lambda}+1}(t)} = \frac{\alpha_0\,(-1)^{n-1}\mathrm{sign}[\pi_\omega^{n-1}(t)\,\lambda]}{(n-2)!}\left|\frac{p(t)}{\lambda\,(n-1)}\right|^{\frac{1}{\lambda}}|\pi_\omega(t)|^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda}}[1+o(1)] \ \text{ при } \ t\uparrow\omega. \tag{22}$$

Отсюда, интегрируя и учитывая, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases}$ имеем

$$\frac{-\lambda}{\sigma\, z^{\frac{\sigma}{\lambda}}(t)} = \frac{\alpha_0\,(-1)^{n-1}\mathrm{sign}[\pi_\omega^{n-1}(t)\lambda]}{(n-2)!}\left|\frac{1}{\lambda\,(n-1)}\right|^{\frac{1}{\lambda}} I_A(t)\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Из этого следует, что выполняется условие (10) и для $z(t)$ при $t\uparrow\omega$ имеет место асимптотическое представление

$$z(t) = \left(\frac{\sigma}{\lambda(n-2)!}\left|\frac{1}{\lambda\,(n-1)}\right|^{\frac{1}{\lambda}} I_A(t)\right)^{-\frac{\lambda}{\sigma}}[1+o(1)]. \tag{23}$$

Поскольку $\lambda_{n-1}^0 = \dfrac{n-2}{n-1}$, в силу леммы 3 для функции $z(t)$ справедливо свойство

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\,z'(t)}{z(t)} = 0.$$

Из асимптотических представлений (22), (23) и указанного свойства функции $z(t)$ следует справедливость условия (9). Применяя формулы (13) для нахождения k-й производной частного двух функций, при $t\uparrow\omega$ получаем

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)} = (-1)^{k+1}\frac{\lambda\, k!}{\sigma[\pi_\omega(t)]^k}\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}[1+o(1)], \quad k = 0,\ldots,n-2.$$

Вследствие замены $y(t) = \ln\, z(t)$ из этих асимптотических соотношений и (23) непосредственно следуют представления (11), (12).

Достаточность. Пусть выполнены условия (9) и (10). В этом случае, применяя преобразование $z(t) = \exp y(t)$, переходим к уравнению (15), которое с помощью замен

$$x = \beta\,\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \text{где} \quad \beta = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ \ \ 1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$z(t) = \left(\frac{\sigma}{\lambda\,(n-2)!}\left|\frac{1}{\lambda\,(n-1)}\right|^{\frac{1}{\lambda}} I_A(t)\right)^{-\frac{\lambda}{\sigma}}[1+u_1(x)], \tag{24}$$

$$\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}\lambda k! I_A'(t)}{\sigma[\pi_\omega(t)]^k I_A(t)}[1+u_{k+2}(x)], \quad k = 0,\ldots,n-2,$$

сводим к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\beta\,\lambda}{\sigma}\,\varphi(x)[u_2+u_1\,u_2], \\ u_k' &= \beta\left\{f(x)+(k-1)[h_k(x)u_k-u_{k+1}]\right\}, \quad k = 2,3,\ldots,n-1, \\ u_n' &= \beta\left\{f(x)-(n-1)(\sigma u_1-h_n(x)u_n+U_n(u_1,u_n))\right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$f(x) = f(x(t)) = -1 - \psi(t),$$

$$h_k(x) = \frac{k-1+f(x)}{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

$$h_n(x) = \frac{\lambda\,(n-1)+f(x)}{n-1},$$

$$\psi(t) = \frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I_A'(t)}{I_A(t)}\right)'}{\dfrac{I_A'(t)}{I_A(t)}}, \quad \varphi(x) = \varphi(x(t)) = \frac{\pi_\omega(t)\, I_A'(t)}{I_A(t)},$$

$$U_n(u_1, u_n) = [1+u_1]^\sigma\,[1+u_n]^{1-\lambda} - 1 - \sigma\, u_1 - (1-\lambda)\, u_n.$$

Поскольку

$$\frac{\pi_\omega(t)\, I_A''(t)}{I_A'(t)} = \frac{\pi_\omega(t)\, p'(t)}{p(t)} + n - 1$$

и в силу условия теоремы существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) p'(t)}{p(t)}$, для функции $\dfrac{\pi_\omega(t)\, I_A''(t)}{I_A'(t)}$ также существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t\uparrow\omega$.

Поэтому, учитывая (9) и применяя обобщенное правило Лопиталя, получаем

$$0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, I_A'(t)}{I_A(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(\pi_\omega(t)\, I_A'(t))'}{I_A'(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, I_A''(t)}{I_A'(t)},$$

откуда находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, I_A''(t)}{I_A'(t)} = -1.$$

В силу этого предельного соотношения и (9) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \psi(t) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}\right)'}{\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left[\frac{I_A''(t)}{I_A(t)} - \left(\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}\right)^2\right]}{\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\pi_\omega(t) I_A''(t)}{I_A'(t)} - \frac{\pi_\omega(t) I_A'(t)}{I_A(t)}\right] = -1.$$

На основании этого условия и (9) функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $h_k(x)$, $k = 2, \ldots, n$, обладают свойствами

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{t\uparrow\omega} \varphi(x(t)) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\uparrow\omega} f(x(t)) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} h_k(x) = \lim_{t\uparrow\omega} h_k(x(t)) = 1, \quad k = 2, \ldots, n-1, \quad \lim_{x\to+\infty} h_n(x) = \lim_{t\uparrow\omega} h_n(x(t)) = \lambda.$$

Далее, выбирая произвольным образом постоянную $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\left|\dfrac{\sigma\delta}{\lambda}\right| < 1$, систему (25) с помощью дополнительного преобразования

$$
\begin{aligned}
&u_1(x) = \delta\, v_1 - \frac{\lambda\varphi(x)}{\sigma}\left[\sum_{k=2}^{n-1}\frac{v_k(x)}{k-1} + \frac{v_n(x)}{\lambda(n-1)}\right],\\
&u_k(x) = v_k(x), \quad k = 2,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

приводим к системе уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&v_1' = -\frac{\beta\lambda\varphi(x)}{\sigma}\left[q_1(x) + \sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x)v_k + V_1(x,v_1,\ldots,v_n)\right],\\
&v_k' = \beta\left[q_k(x) + (p_{kk}(x)v_k - p_{kk+1}(x)v_{k+1})\right], \quad k = 2,3,\ldots,n-1,\\
&v_n' = \beta\left[q_n(x) + \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x)v_k + V_n(x,v_1,\ldots,v_n)\right],
\end{aligned}
\tag{27}
$$

где

$$V_n(x,v_1,\ldots,v_n) = U_n\left(\delta\, v_1 - \frac{\lambda\varphi(x)}{\sigma}\left[\sum_{k=2}^{n-1}\frac{v_k(x)}{k-1} + \frac{v_n(x)}{\lambda(n-1)}\right], v_n\right),$$

$$V_1(x,v_1,\ldots,v_n) = \left(\delta\, v_1 - \frac{\lambda\varphi(x)}{\sigma}\left[\sum_{k=2}^{n-1}\frac{v_k(x)}{k-1} + \frac{v_n(x)}{\lambda(n-1)}\right]\right) v_2 + \frac{V_n(x,v_1,\ldots,v_n)}{\lambda\delta\,(n-1)},$$

$$q_1(x) = \frac{1+\psi(x)}{\delta}\left[\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k-1} + \frac{1}{\lambda(n-1)}\right], \quad q_k(x(t)) = -1-\psi(x), \quad k = 2,\ldots,n,$$

$$p_{11}(x) \equiv \frac{\sigma}{\lambda}, \quad p_{1n}(x) = -\frac{\varphi(x)}{\lambda\,\delta\,(n-1)}, \quad p_{1k}(x) = -\frac{\varphi(x)}{\delta\,(k-1)}, \quad k = 2,\ldots,n-1,$$

$$p_{kk+1}(x) \equiv k-1, \quad p_{kk}(x) = k-2-\psi(x), \quad p_{nk}(x) = \frac{\lambda\,(n-1)}{k-1}\,\varphi(x), \quad k = 2,\ldots,n-1,$$

$$p_{n1}(x) \equiv -\sigma\,\delta(n-1), \quad p_{nn}(x) = \varphi(x) + \lambda(n-1) - 1 - \psi(x).$$

Покажем, что для этой системы выполняются все условия следствия 1.3 из работы [12]. Прежде всего заметим, что функции V_1, V_n таковы, что при $x \in [x_0,+\infty[$ $(x_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|,\ t_0 \in]a,\omega[)$

$$V_1(x,0,\ldots,0) \equiv 0, \quad V_n(x,0,\ldots,0) \equiv 0.$$

Функции V_1, V_n имеют непрерывные частные производные по переменным $v_1,\ldots,v_n$, для которых

$$\frac{\partial V_k(x,v_1,\ldots,v_n)}{\partial v_i} \longrightarrow 0, \quad i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,n, \quad \text{при} \quad |v_1| + \ldots + |v_n| \longrightarrow 0$$

равномерно по $x \in [x_0, +\infty[$. Кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s)ds = \beta \lim_{t\uparrow\omega} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{J'_A(s)}{J_A(s)} ds = \beta \lim_{t\uparrow\omega} \ln |J_A(s)|_{t_0}^{t} = \pm\infty.$$

В силу (9)

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} p_{kk}(s)ds = \int\limits_{x_0}^{+\infty} [1 + o(1)]ds = +\infty \quad \text{для всех} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0, \lim\limits_{t\uparrow\omega} \psi(t) = -1$, имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q_k(x)}{p_{kk}(x)} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$P^0_{n1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p_{n1}(x)}{p_{nn}(x)} = -\frac{\sigma\delta}{\lambda}, \quad P^0_{1k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p_{1k}(x)}{p_{11}(x)} = 0, \quad k = 2, \ldots, n,$$

$$P^0_{kk+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p_{kk+1}(x)}{p_{kk}(x)} = 1, \quad P^0_{nk} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p_{nk}(x)}{p_{nn}(x)} = 0, \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Постоянные B^0_k, $k = 1, \ldots, n$, определяемые рекуррентными соотношениями

$$B^0_n = \sum_{j=1}^{n-1} |P^0_{nj}|, \quad B^0_k = B^0_{k+1} |P^0_{kk+1}|, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 2, \quad B^0_1 = \sum_{j=2}^{n} B^0_j |P^0_{1j}|,$$

имеют с учетом выбора δ следующие значения: $B^0_1 = 0$, $B^0_k = \left|\frac{\sigma\delta}{\lambda}\right| < 1$, $k = 2, \ldots, n$.

Таким образом, для системы (27) все условия следствия 1.3 из работы [12] выполнены. Поэтому полученная система уравнений имеет хотя бы одно решение $(v_k)_{k=1}^n$: $[x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n$, $x_1 \geq x_0$, стремящееся к нулю при $x \longrightarrow +\infty$. Этому решению в силу замен (24), (26) и $y(t) = \ln z(t)$ соответствует решение уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (11), (12). Принимая во внимание эти представления и асимптотические формулы (14), убеждаемся в том, что это решение является $\widetilde{\mathcal{P}}_\omega \left(\frac{n-2}{n-1}\right)$-решением уравнения (1).

4. Пример. Рассмотрим при $t > 0$ уравнение

$$\left(|y^{(n-1)}|^{\lambda-1} y^{(n-1)}\right)' = a t^\gamma e^{\sigma y}, \tag{28}$$

где $\sigma, \lambda, a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbf{R}$.

Исследуем асимптотику решений уравнения (28) при $t \to +\infty$. Поскольку уравнение (28) является уравнением вида (1) с коэффициентом $p(t) = |a|t^{\gamma}$ и исследуется случай $\omega = +\infty$, то $\pi_{\omega}(t) = t$ и при $\gamma \neq \lambda\,(1-n)-1$ функция $J_A(t)$ из теоремы 1 имеет вид

$$J_A(t) = \int\limits_A^t |a|\tau^{\gamma+\lambda(n-1)}d\tau \sim \frac{|a|}{\gamma+1+\lambda(n-1)}\, t^{\gamma+\lambda(n-1)+1},$$

а также справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\,J_A'(t)}{J_A(t)} = \gamma+\lambda(n-1)+1.$

При $\gamma = \lambda\,(1-n)-1$ функция $I_A(t)$ из теоремы 2 имеет вид

$$J_1(t) = \int\limits_1^t p^{\frac{1}{\lambda}}(\tau)\tau^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda}}d\tau = |a|^{\frac{1}{\lambda}}\ln t,$$

и предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\,I_A'(t)}{I_A(t)} = 0$. Вследствие этого из теорем 1, 2 вытекают два следующих утверждения.

Следствие 1. *Для существования $\tilde{\mathcal{P}}_{+\infty}(\lambda^0_{n-1})$-решений уравнения (28), для которых $\lambda^0_{n-1} \notin \left\{1,\dfrac{n-2}{n-1}\right\}$ и при $\lambda^0_{n-1} = 0$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\,z^{(n)}(t)}{z^{(n-1)}(t)}$, необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$(\rho-\lambda(n-1))\prod_{k=0}^{n-2}(\rho-k) = (-1)^{n+1}(\gamma+\lambda(n-1)+1)(n-1)!$$

не имеет чисто мнимых корней, то и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(-1)^n a\,\sigma\,[1+\gamma+\lambda(n-1)] > 0,$$

$$\lambda^0_{n-1} = \frac{\gamma+\lambda(n-1)+1+\sigma(n-2)}{\gamma+\lambda(n-1)+1+\sigma(n-1)}.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \to +\infty$ имеют место асимптотические представления

$$y(t) = -\frac{1+\gamma+\lambda(n-1)}{\sigma}\ln t + C_1 + o(1),$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{\lambda(1-n)-\gamma-1}{\sigma}\,\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}[1+o(1)], \quad k = 1,\ldots,n,$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\sigma}\ln\left[\left|\frac{[1+\gamma+\lambda(n-1)](n-2)!}{\sigma}\right|^{\lambda}\frac{|\lambda|(n-1)}{|a|}\right].$$

Следствие 2. *Для существования* $\tilde{\mathcal{P}}_{+\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$*-решений уравнения (28) необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma = \lambda(1-n) - 1$ *и выполнялось неравенство*

$$(-1)^n \sigma a > 0.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = -\frac{\lambda}{\sigma}\ \ln\,\ln\, t + C_2 + o(1),$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{\lambda}{\sigma}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k \ln t}[1+o(1)], \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

где

$$C_2 = \frac{\lambda}{\sigma}\ln\left|\frac{\lambda}{\sigma}\left|\frac{\lambda(1-n)}{a}\right|^{\frac{1}{\lambda}}(n-2)!\right|.$$

1. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1989. — **133**, № 1. — P. 29 – 32.
2. *Дрик Н. Г.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 1. — С. 1071 – 1072.
3. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Repts Enlarget Session Sem. I.N. Vekua Inst. Appl. Math. — 1992. — **7**, № 3. — P. 39 – 42.
4. *Дрик Н. Г.* Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Одесса, 1992.
5. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georg. Math. J. — 1996. — **3**, № 3. — P. 101 – 120.
6. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* О решениях со степенной асимптотикой дифференциальных уравнений с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 3. — С. 306 – 325.
7. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. — 2008. — **44**, № 2. — С. 1832 – 1846.
8. *Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 4. — С. 562 – 573.
9. *Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2008. — **12**, вип. 7. — С. 145 – 155.
10. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998.
11. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.
12. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 441 – 452.

Получено 14.11.08