УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА*

О. Г. Ровенская, О. А. Новиков

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: o.rovenskaya@mail.ru

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of Poisson integrals. These equalities, in corresponding cases, guarantee the solvability of the Kolmogorov — Nikol'skii problem for the repeated de la Vallee Poussin sums on the classes of analytic functions. In certain cases, the repeated de la Vallee Poussin sums make a better approximation then ordinary de la Vallee Poussin sums.

Отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень повторних сум Валле Пуссена на класах інтегралів Пуассона. Ці співвідношення, за певних умов, забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова – Нікольського для повторних сум Валле Пуссена і класів інтегралів Пуассона. Вказано умови, за яких повторні суми Валле Пуссена забезпечують кращий порядок наближення, ніж звичайні.

Следуя [1], обозначим через $C^q_{\beta,\infty}$ класс непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)dt, \quad P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in R,$$

в которой $P^q_\beta(t)$ — ядро Пуассона, а функция $\varphi(x)$ принадлежит S^0_M (S^0_M — множество функций, почти везде ограниченных единицей и имеющих на отрезке $[-\pi;\pi]$ среднее значение, равное нулю). Известно [1], что классы $C^q_{\beta,\infty}$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, являющихся сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\dfrac{1}{q}/2\ln 2$.

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции f, p, p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p < n$, $p_1 + p_2 < n$. Тогда суммы Валле Пуссена функции $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$, обычные $V_{n,p}(f;x)$ и повторные $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ соответственно, задаются соотношениями

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x), \quad V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x).$$

С. М. Никольский [2] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье,

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; № GZ: 436 UKR 13/103/0 – 1).

взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}.$$

В работе [3] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

Более общий результат, чем последняя формула, получен в работе [4]. В данной статье исследуется асимптотическое поведение верхних граней уклонений полиномов $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ от функций из классов $C^q_{\beta,\infty}$. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $q\in(0,1)$, $\beta\in R$. *Тогда при* $n\to\infty$, $n-p_1-p_2\to\infty$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C = \frac{8q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+ O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4} + \frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2(1-q)^3} + \frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right), \quad (1)$$

где

$$\Pi(n;k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1-n\sin^2 u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл третьего рода.

Доказательство. Имеем

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = f(x) - \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x) =$$

$$= \frac{1}{\pi p_1 p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\sum_{k=m}^{\infty} q^m\cos\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

Используя формулы [5, с. 123]

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m\cos mt = \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} q^m\sin mt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}$$

и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi p_1 p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\times$$

$$\times\left(q^{n-p_1-p_2+1}b^{q,\beta}_{n-p_1-p_2+1}(t) - q^{n-p_1+1}b^{q,\beta}_{n-p_1+1}(t) - q^{n-p_2+1}b^{q,\beta}_{n-p_2+1}(t) + q^{n+1}b^{q,\beta}_{n+1}(t)\right)dt,$$

где

$$b^\beta_m(t) = (1-2q\cos t+q^2)^{-\frac{3}{2}}\cos\left(mt + 3\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}+\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Поскольку f принадлежит $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место соотношение

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) \le \frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_{n-p_1-p_2+1}(t)|dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_{n-p_1+1}(t)|dt + \frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_{n-p_2+1}(t)|dt + \frac{q^{n+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_{n+1}(t)|dt\right). \quad (2)$$

Используя рассуждения из работы [5, с. 124], можно показать, что найдется функция $B(t)\in S^0_M$ такая, что условие $\operatorname{sign} b^\beta_{n-p_1-p_2+1}(t) = B(t)$ выполнено на промежутке $[-\pi,\pi]$, за исключением некоторого множества точек, мера которого меньше чем $K(n-p_1-$ $-p_2)^{-1}(1-q)^{-1}$ (K — некоторая константа, не зависящая от n, p_1, p_2, q). Обозначим $(f_0)^q_\beta(t) = B(t)$. Учитывая, что $\int_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_m(t)|dt = O(1)\dfrac{1}{(1-q)^3}$, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0)^q_\beta(0+t)b^\beta_m(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\operatorname{sign} b^\beta_m(t) + \frac{O(1)}{m(1-q)}\right)b^\beta_m(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^\beta_m(t)dt| + \frac{O(1)}{m(1-q)^4}. \quad (3)$$

На основании (2), (3) с учетом неравенства $\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) \ge \delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f_0;x)$ имеем

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|b^\beta_{n-p_1-p_2+1}(t)\right|dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2)(1-q)^4} + \frac{q^{n-p_1+1}+q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right). \quad (4)$$

Используя рассуждения из работы [5, с. 125], показываем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|b^\beta_{n-p_1-p_2+1}(t)\right|dt = \frac{8}{\pi(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) + O(1)\frac{1}{n-p_1-p_2}. \quad (5)$$

Объединяя (4) и (5), приходим к асимптотической формуле (1).

Теорема доказана.

Если кроме условий, указанных в теореме, выполняются условия $p_1 \to \infty$, $p_2 \to \infty$, то соотношение (1) для $q \in (0,1)$ обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова – Никольского.

Сравнивая обычные $V_{n,p}(f;x)$ и повторные $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ суммы Валле Пуссена, в частности, при выполнении условия $p = p_1 + p_2$, видим, что повторные суммы Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ с точностью до постоянного множителя обеспечивают лучший порядок приближения, чем обычные.

1. *Степанец А. И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сб. — 2001. — **192**, № 1. — С. 113 – 138.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207 – 256.
3. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1653 – 1668.
4. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Там же. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97 – 107.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Получено 02.10.09