УДК 517.9

ПРО СТРУКТУРУ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ*

Г. П. Пелюх, О. А. Сівак

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

The structure of the sets of continuous solutions of linear functional-difference equations with linearly transformed argument has been investigated.

Исследована структура множеств непрерывных решений линейных функционально-разностных уравнений с линейно преобразованным аргументом.

Основи теорії лінійних різницевих і q-різницевих рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a(t)x(t), \\ x(qt) &= b(t)x(t), \end{aligned} \tag{1}$$

де всі елементи $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, матриць $a(t) = (a_{ij}(t))$, $b(t) = (b_{ij}(t))$ є аналітичними функціями в деякому околі точки $t = \infty$, було розроблено у працях Біркгофа та його учнів. Більш того, в [1–5] побудовано зображення загального розв'язку таких систем рівнянь і досліджено його структуру. В подальшому ці системи розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [6–10] і наведену там бібліографію) і на даний час багато питань їх теорії досить добре вивчені при більш загальних припущеннях відносно матриць $a(t)$, $b(t)$. У зв'язку з цим природно виникло ряд питань про одержання аналогічних результатів для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)x(qt), \tag{2}$$

де $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $a(t)$, $b(t)$ — деякі дійсні матриці розмірності $n \times n$ і q — деяка дійсна стала. Особливо важливим серед них є питання побудови загального неперервного розв'язку (при певних припущеннях відносно матриць $a(t)$, $b(t)$) системи рівнянь вигляду (2) і дослідження його структури. Саме це питання і є основною метою даного дослідження.

1. Розглянемо спочатку рівняння

$$x(t+1) = ax(t) + bx(qt), \tag{3}$$

де $t \in R^+ = [0, +\infty)$, a, b, q — дійсні сталі, і дослідимо структуру його загального неперервного розв'язку у випадку, коли виконуються такі умови:

* Частково підтримано проектом Ф 25.1/021.

1) $0 < a < 1, q > 1$;

2) $\triangle = \dfrac{|b|}{a - a^q} < 1$.

Має місце наступна лема.

Лема 1. *Якщо виконуються умови 1, 2, то рівняння (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.*

Доведення. Покажемо, що рівняння (3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4}$$

де $x_i(t), i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (4) в (3), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + b \sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння

$$x_0(t+1) = a x_0(t), \tag{5_0}$$

$$x_i(t+1) = a x_i(t) + b x_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5_i}$$

то ряд (4) буде формальним розв'язком рівняння (3).

Рівняння (5_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = a^t \omega(t), \tag{6}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція. Розглядаючи послідовно рівняння (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\, b\, x_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{6_i}$$

Покажемо, що ряди (6_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M \Delta^i a^{qt}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Дійсно, оскільки $|\, x_0(t)| \leq Ma^t$, де $M = \max\limits_t |\omega(t)|$, то на підставі (6_1) отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}|b||x_0(q(t+j))| \leq |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\, M\, a^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq M|b|a^{qt-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq Ma^{qt} \frac{|b|}{a-a^q} \leq M\Delta a^{qt},$$

тобто оцінка (7) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (7) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Дійсно, враховуючи (6_{i+1}) та (7), знаходимо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}|b||x_i(q(t+j))| \leq |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} M\Delta^i a^{q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq |b|M\Delta^i a^{q^2 t-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q^2-1)j} \leq |b|M\Delta^i a^{qt-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq M\Delta^{i+1}a^{qt}.$$

Цим самим ми довели, що ряди (6_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq$ ≥ 0 до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (7). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4) рівномірно збігається при всіх $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо $\gamma(t)$ — довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок рівняння (3) і виконуються умови 1, 2 леми 1, то при всіх $t \geq 0$ має місце оцінка*

$$|\gamma(t)| \leq \widetilde{M} a^t, \tag{8}$$

де $\widetilde{M}$ — деяка додатна стала.

Доведення. Дійсно, оскільки

$$\gamma(t+1) = a\gamma(t) + b\gamma(qt), \tag{9}$$

то, виконуючи в (9) взаємно однозначну заміну змінних

$$\gamma(t) = a^t v(t), \tag{10}$$

отримуємо

$$v(t+1) = v(t) + a^{-1}ba^{(q-1)t}v(qt). \tag{11}$$

Оскільки довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок рівняння (11) задовольняє рівняння

$$v(t) = \widetilde{\omega}(t) - a^{-1}b\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)}v(q(t+j)), \tag{12}$$

де $\widetilde{\omega}(t)$ — деяка неперервна 1-періодична функція, то для доведення леми достатньо довести, що рівняння (12) має єдиний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $v(t)$. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які побудуємо за допомогою співвідношень

$$v_0(t) = \widetilde{\omega}(t),$$

$$v_m(t) = \widetilde{\omega}(t) - a^{-1}b\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)}v_{m-1}(q(t+j)), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Покажемо, що так визначені функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \geq 0$. Справді, $|v_0(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| \leq \widetilde{M}'$, де $\widetilde{M}'$ — деяка додатна стала. Тоді згідно з (13) і умовами леми отримуємо

$$|v_1(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| + a^{-1}|b|\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)}|\widetilde{\omega}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{M}' + a^{-1}|b|\,\widetilde{M}'\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq \widetilde{M}'\left(1 + \frac{|b|}{a - a^q}\right) \leq \frac{\widetilde{M}'}{1-\Delta} = \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку

$$|v_m(t)| \leq \widetilde{\widetilde{M}} \tag{14}$$

доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, згідно з співвідношеннями (13), умовами леми та оцінкою (14) знаходимо

$$|v_{m+1}(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| + a^{-1}|b|\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)}|v_m(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{M}' + a^{-1}|b|\,\widetilde{\widetilde{M}}\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq \widetilde{\widetilde{M}}\left(\frac{\widetilde{M}'}{\widetilde{\widetilde{M}}} + \frac{a^{-1}|b|}{1 - a^{q-1}}\right) = \widetilde{\widetilde{M}}(1 - \Delta + \Delta) = \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Отже, всі функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \geq 0$.

Доведемо тепер, що послідовність функцій $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігається до деякої неперервної й обмеженої при $t \geq 0$ функції $v(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $t \geq 0$ і $m \geq 1$ виконується оцінка

$$|v_m(t) - v_{m-1}(t)| \leq \widetilde{M}'\Delta^m. \tag{15}$$

Справді, згідно з (13) при $m = 1$ маємо

$$|v_1(t) - v_0(t)| \leq a^{-1}|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} |\widetilde{\omega}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq a^{-1}|b| \widetilde{M}' a^{(q-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq \widetilde{M}' \frac{|b|}{a(1-a^{q-1})} = \widetilde{M}' \Delta,$$

тобто в цьому випадку оцінка (15) має місце. Припустимо, що цю оцінку доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$. Дійсно, беручи до уваги (13), (15) і умови леми, знаходимо

$$|v_{m+1}(t) - v_m(t)| \leq a^{-1}|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} |v_m(q(t+j)) - v_{m-1}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq a^{-1}|b| \; \widetilde{M}' \; \Delta^m \; a^{(q-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq \widetilde{M}' \Delta^m \frac{|b|}{a(1-a^{q-1})} = \widetilde{M}' \Delta^{m+1}.$$

Таким чином, оцінка (15) має місце при всіх $t \geq 0$, $m \geq 1$.

Безпосередньо із (15) випливає, що послідовність $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \geq 0$ функції $v(t) = \lim\limits_{m \to +\infty} v_m(t)$, яка (внаслідок (14)) задовольняє умову

$$|v(t)| \leq \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Переходячи в (13) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що функція $v(t) = \lim\limits_{m \to +\infty} v_m(t)$ є розв'язком рівняння (12).

Припустимо тепер, що існує ще один неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $\widetilde{v}(t)$ рівняння (12) такий, що $\widetilde{v}(t) \neq v(t)$. Тоді згідно з співвідношеннями

$$v(t) = \widetilde{\omega}(t) - a^{-1} b \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} v(q(t+j)),$$

$$\widetilde{v}(t) = \widetilde{\omega}(t) - a^{-1} b \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} \widetilde{v}(q(t+j))$$

і умовами 1, 2 отримуємо

$$|v(t) - \widetilde{v}(t)| \leq a^{-1}|b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} |v(q(t+j)) - \widetilde{v}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq a^{-1}|b| \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \right) ||v(t) - \widetilde{v}(t)|| \leq \Delta \, \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|,$$

де $\|v(t) - \widetilde{v}(t)\| = \sup\limits_t |v(t) - \widetilde{v}(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|v(t) - \widetilde{v}(t)\| \leq \Delta \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|,$$

яке може мати місце лише у випадку, коли $v(t) \equiv \widetilde{v}(t)$. Отримана суперечність завершує доведення леми 2.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1) $0 < a < 1$, $q > 1$;
2) $\triangle = \dfrac{|b|}{a - a^q} < \dfrac{1}{2}$.
Тоді довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *рівняння (3) можна зобразити у вигляді ряду (4), в якому функції* $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються співвідношеннями* (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, *а* $\omega(t)$ *— деяка неперервна 1-періодична функція.*

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що для довільного неперервного й обмеженого при всіх $t \geq 0$ розв'язку $\gamma(t)$ рівняння (3) існує неперервна 1-періодична функція $\omega(t)$ така, що виконується рівність

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t, \omega(t)),$$

яку з урахуванням (6_0) можна записати у вигляді

$$\omega(t) = a^{-t}\gamma(t) - a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)). \tag{16}$$

Розглядаючи (16) як рівняння відносно функції $\omega(t)$, покажемо, що воно має неперервний 1-періодичний розв'язок. Для цього застосуємо метод послідовних наближень, які визначимо за допомогою формул

$$\omega_0(t) = a^{-t}\gamma(t), \tag{17}$$

$$\omega_m(t) = a^{-t}\gamma(t) - a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega_{m-1}(t)), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Покажемо, що таким чином побудовані функції $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є обмеженими при всіх $t \geq 0$. Справді, на підставі леми 2 маємо

$$|\omega_0(t)| \leq \widetilde{M}.$$

Тоді, беручи до уваги (18) і умови теореми, знаходимо

$$|\omega_1(t)| \leq |a^{-t}\gamma(t)| + a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t, \omega_0(t))| \leq \widetilde{M} + \widetilde{M} a^{(q-1)t} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq$$

$$\leq \widetilde{M} + \frac{\widetilde{M}\Delta}{1 - \Delta} \leq \frac{\widetilde{M}}{1 - \theta},$$

де $\theta = \dfrac{\Delta}{1-\Delta} < 1$.

За індукцією можна показати, що оцінка

$$|\omega_m(t)| \le \frac{\widetilde{M}}{1-\theta} \tag{19}$$

має місце при всіх $m \ge 1$ і $t \ge 0$. Справді, нехай (19) доведено для деякого $m \ge 1$. Тоді згідно з (18), (19) і умовами теореми отримуємо

$$|\omega_{m+1}(t)| \le |a^{-t}\gamma(t)| + a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t,\omega_m(t))| \le \widetilde{M} + \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}\, a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^i\right)a^{qt} \le$$

$$\le \widetilde{M} + \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}\frac{\Delta}{1-\Delta} \le \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}(1-\theta+\theta) = \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}.$$

Отже, оцінка (19) має місце при всіх $t \ge 0$ і $m \ge 1$.

Доведемо тепер, що послідовність функцій $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \ge 0$ функції $\omega(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $m \ge 1$ і $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|\omega_m(t) - \omega_{m-1}(t)| \le \widetilde{M}\theta^m a^{(q-1)t}. \tag{20}$$

Покажемо спочатку, що якщо $\widetilde{v}(t)$, $v(t)$ — неперервні й обмежені при $t \ge 0$ функції, то при всіх $i \ge 1$, $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|x_i(t,\widetilde{v}(t)) - x_i(t,v(t))| \le \Delta^i a^{qt}\|\widetilde{v}(t) - v(t)\|, \tag{21}$$

де $\|\widetilde{v}(t) - v(t)\| = \sup\limits_t |\widetilde{v}(t) - v(t)|$. Дійсно, використовуючи (6_0), (6_1), маємо

$$|x_1(t,\widetilde{v}(t)) - x_1(t,v(t))| \le \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}|b|\,|x_0(q(t+j),\widetilde{v}(q(t+j)))-$$

$$- x_0(q(t+j), v(q(t+j)))| \le$$

$$\le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}|\, a^{q(t+j)}\widetilde{v}(q(t+j)) - a^{q(t+j)}v(q(t+j))| \le$$

$$\le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)+qj}a^{qt}|\,\widetilde{v}(q(t+j)) - v(q(t+j))| \le$$

$$\le \frac{|b|}{a(1-a^{q-1})}\, a^{qt}\|\widetilde{v}(t)) - v(t)\| \ \le \Delta\, a^{qt}\|\widetilde{v}(t) - v(t)\|.$$

Припустимо, що оцінку (21) доведено для деякого $i = m$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, згідно з (6_{m+1}), (21) маємо

$$|x_{m+1}(t,\widetilde{v}(t)) - x_{m+1}(t,v(t))| \le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} |x_m(q(t+j),\widetilde{v}(q(t+j)) -$$

$$- x_m(q(t+j),v(q(t+j))| \le$$

$$\le |b| \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \Delta^m a^{q(q(t+j))} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \le$$

$$\le \frac{|b|}{a} \Delta^m \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q^2-1)j} a^{q^2 t} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \le$$

$$\le \frac{|b|}{a} \Delta^m \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} a^{qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \le$$

$$\le \frac{|b|}{a} \Delta^m \frac{1}{1-a^{q-1}}\, a^{qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \le \Delta^{m+1} a^{qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\|.$$

Отже, оцінка (21) виконується при всіх $i \ge 1$, $t \ge 0$.

Покажемо тепер, що має місце оцінка (20). Дійсно, оскільки безпосередньо з (6_i) випливає, що при всіх $i \ge 0$ виконується співвідношення

$$x_i(t,0) \equiv 0,$$

то, беручи до уваги (7), (17)–(19), при $m = 1$ отримуємо

$$|\omega_1(t) - \omega_0(t)| \le a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t,\omega_0(t))| \le a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{M} \Delta^i a^{qt} \le$$

$$\le \widetilde{M} \frac{\Delta}{1-\Delta}\, a^{(q-1)t} \le \widetilde{M} \theta a^{(q-1)t}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (20) доведено для деякого $k \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Враховуючи (18), (21) і $\|\omega_k - \omega_{k-1}\| \le \widetilde{M}\theta^k$, маємо

$$|\omega_{k+1}(t) - \omega_k(t)| \le a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t,\omega_k(t)) - x_i(t,\omega_{k-1}(t))| \le$$

$$\le a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i a^{qt} \|\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t)\| \le a^{(q-1)t} \frac{\Delta}{1-\Delta} \widetilde{M}\theta^k \le \widetilde{M}\theta^{k+1} a^{(q-1)t}.$$

Цим самим ми довели, що оцінка (20) виконується при всіх $m \ge 1$. Звідси безпосередньо випливає, що послідовність функцій $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, які визначаються формулами (17), (18), рівномірно збігається при $t \ge 0$ до деякої неперервної функції $\omega(t) =$

$= \lim\limits_{m\to+\infty} \omega_m(t)$. Переходячи в (18) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що функція $\omega(t)$ є розв'язком рівняння (16).

Доведемо тепер, що функція $\omega(t)$ є 1-періодичною. З огляду на (16) маємо

$$\omega(t+1) = a^{-(t+1)}\gamma(t+1) - a^{-(t+1)} \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t+1, \omega(t+1)).$$

Оскільки $\gamma(t+1) \equiv a\gamma(t) + b\gamma(qt)$, то

$$\omega(t+1) = a^{-t}\gamma(t) + a^{-(t+1)}b\gamma(qt) - a^{-(t+1)} \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t+1, \omega(t+1)) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\left(a^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t+1, \omega(t+1)) - a^{-1}b\gamma(qt)\right) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)) + a^{-1}b\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt, \omega(qt)) - a^{-1}b\gamma(qt)\right) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)) + a^{-1}b\gamma(qt) - a^{-1}b\gamma(qt)\right) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)) = \omega(t),$$

що й завершує доведення теореми 1.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(t+1) = ay(t) + by(qt) + f(t), \tag{22}$$

де сталі a, b, q і функція $f(t)$ задовольняють умови:

1) $0 < a < 1$, $q > 1$;

2) $\dfrac{|b|}{1-a} = \widetilde{\theta} < 1$;

3) функція $f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in R$ і такою, що $\sup\limits_t |f(t)| = \overline{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то рівняння (22) має неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t), \tag{23}$$

де $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Підставляючи (23) в (22), знаходимо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t+1) = a\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t) + b\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(qt) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\overline{y}_0(t+1) = a\overline{y}_0(t) + f(t), \tag{24_0}$$

$$\overline{y}_i(t+1) = a\overline{y}_i(t) + b\overline{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{24_i}$$

то ряд (23) є формальним розв'язком рівняння (22).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$\overline{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} f(t-j) \tag{25_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє рівняння (24_0) і виконується оцінка

$$|\overline{y}_0(t)| \le \frac{\overline{M}}{1-a} = \overline{M}'. \tag{26_0}$$

З огляду на (25_0), (26_0) можна послідовно показати, що ряди

$$\overline{y}_i(t) = b\sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} \overline{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{25_i}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють відповідні рівняння (24_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються співвідношення

$$|\overline{y}_i(t)| \le \overline{M}'\widetilde{\theta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{26_i}$$

Таким чином, оскільки функції $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, що визначаються за допомогою співвідношень (25_i), $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють умови (26_i), $i = 0, 1, \ldots$, то ряд (23) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\overline{y}(t)$, яка є розв'язком рівняння (22) і при всіх $t \in R$ задовольняє умову

$$|\overline{y}(t)| \le \frac{\overline{M}'}{1-\widetilde{\theta}}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Виконуючи в (22) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \overline{y}(t), \tag{27}$$

отримуємо рівняння (3) для функції $x(t)$. Оскільки для цього рівняння має місце теорема 1, то, беручи до уваги заміну змінних (27) і припускаючи виконаними умови 1, 3 теореми 2 і умову

$$\max\left\{\frac{|b|}{1-a}, \frac{|b|}{a-a^q}\right\} < \frac{1}{2},$$

можна описати структуру множини неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків рівняння (22).

Зауваження 2. Теорема 2 має місце також у випадку, коли замість умови 1 виконується умова $0 < a < 1, q > 0$.

У зв'язку з доведеними вище теоремами 1, 2 природно виникає питання про опис структури множини неперервних розв'язків рівняння (22) у випадку, коли b є деякою дійсною функцією дійсної змінної t. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y(t+1) = ay(t) + \widetilde{b}(t)y(qt) + \widetilde{f}(t), \tag{28}$$

де a, q — деякі сталі, $\widetilde{b}(t) : R \to R$, $\widetilde{f}(t) : R \to R$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < a < 1, q > 1$;

2) функції $\widetilde{b}(t)$, $\widetilde{f}(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in R$ *і такими, що* $\sup\limits_t |\widetilde{b}(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |\widetilde{f}(t)| = f^*$;

3) $\dfrac{b^*}{1-a} = \widetilde{\Delta} < 1$.

Тоді рівняння (28) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t), \tag{29}$$

де $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні й обмежені при* $t \in R$ *функції.*

Доведення. Дійсно, підставляючи (29) в (28), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t+1) = a\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{b}(t)\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(qt) + \widetilde{f}(t).$$

Звідси випливає, що якщо функції $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності рівнянь

$$\widetilde{y}_0(t+1) = a\widetilde{y}_0(t) + \widetilde{f}(t), \tag{30_0}$$

$$\widetilde{y}_i(t+1) = a\widetilde{y}_i(t) + \widetilde{b}(t)\widetilde{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{30_i}$$

то ряд (29) є формальним розв'язком рівняння (28).

На підставі умов теореми ряд

$$\widetilde{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} \widetilde{f}(t-j) \tag{31_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до деякого неперервного розв'язку рівняння (30_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (31_0) в (30_0)), який задовольняє умову

$$|\widetilde{y}_0(t)| \leq \frac{f^*}{1-a} = \widetilde{f}^*. \tag{32_0}$$

Беручи до уваги (30_i), $i = 1, 2, \ldots$, умови теореми і співвідношення (31_0), (32_0), можна послідовно показати, що ряди

$$\widetilde{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}\, \widetilde{b}(t-j) \widetilde{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{31_i}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$ до деяких неперервних функцій $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які є розв'язками відповідних рівнянь (30_i), $i = 1, 2, \ldots$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (31_i) в (30_i)) і задовольняють умови

$$|\widetilde{y}_i(t)| \leq \widetilde{f^*} \widetilde{\Delta^i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{32_i}$$

Враховуючи співвідношення (32_i), $i = 0, 1, \ldots$, і умови теореми, приходимо до висновку, що ряд (29) рівномірно збігається до деякої неперервної при всіх $t \in R$ функції $\widetilde{y}(t)$, яка є розв'язком рівняння (28) і задовольняє умову

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \frac{\widetilde{f}^*}{1 - \widetilde{\Delta}}. \tag{33}$$

Теорему 3 доведено.

Виконуючи в (28) взаємно однозначну заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \widetilde{y}(t), \tag{34}$$

отримуємо рівняння

$$x(t+1) = ax(t) + \widetilde{b}(t)x(qt), \tag{35}$$

для якого припустимо виконаними умови 1, 2 теореми 3 і умову

3) $\dfrac{b^*}{a - a^q} = \Delta^* < \dfrac{1}{2}$.

Тоді, як і при доведенні теореми 1, можна показати, що довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок рівняння (35) можна подати у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{36}$$

в якому функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються за допомогою співвідношень

$$x_0(t) = a^t \omega(t), \tag{37}$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \widetilde{b}(t+j) x_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{37_i}$$

де $\omega(t)$– деяка неперервна 1-періодична функція. Отже, беручи до уваги (29), (34), (36), можна описати структуру множини неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків рівняння (28).

Зауваження 3. Теорема 3 має місце також у випадку, коли замість умови 1 виконується умова $0 < a < 1$, $q > 0$.

2. Дослідимо тепер структуру множини неперервних розв'язків різницевого рівняння (3) у випадку, коли $t \leq 0$ і виконуються умови:

1) $a > 1$, $q > 1$;

2) $\widehat{\Delta} = \dfrac{|b|}{a^q - a} < 1$.

Має місце наступна лема.

Лема 3. *Якщо виконуються умови 1, 2, то рівняння (3) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \leq 0$ *розв'язків* $x(t) = x(t, \omega(t))$, *які залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що рівняння (3) має сім'ю розв'язків у вигляді ряду (4). Для цього достатньо, очевидно, показати, що функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$. Безпосередньою підстановкою в (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, можна переконатися, що функції

$$x_0(t) = a^t \omega(t), \tag{38_0}$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}\, b x_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{38_i}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція, є формальними розв'язками відповідних рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$.

Покажемо тепер, що ряди (38_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$ виконується оцінка

$$|x_i(t)| \leq M \widehat{\Delta}^i a^{qt}, \tag{39}$$

де $M = \max\limits_t |\omega(t)|$. Враховуючи, що $|x_0(t)| \leq M a^t$, та (38_1), отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} |b|\, |x_0(q(t-j))| \leq |b| \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} M a^{q(t-j)} \leq$$

$$\leq M\, |b|\, a^{qt-1} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q)j} \leq M\, \frac{|b| a^{1-q}}{a(1-a^{1-q})}\, a^{qt} \leq M \frac{|b|}{a^q - a}\, a^{qt} \leq M \widehat{\Delta} a^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (39) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Справді, згідно з (38_{i+1}) та (39) маємо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}|b|\,|x_i(q(t-j))| \leq |b|\sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}M\widehat{\Delta}^i a^{q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq M|b|\widehat{\Delta}^i a^{q^2t-1}\sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q^2)j} \leq M|b|\widehat{\Delta}^i a^{qt-1}\sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q)j} \leq$$

$$\leq M\widehat{\Delta}^i \frac{|b|\,a^{1-q}}{a(1-a^{1-q})}\,a^{qt} \leq M\widehat{\Delta}^{i+1}\,a^{qt}.$$

Отже, ми показали, що оцінка (39) має місце при всіх $t \leq 0, i \geq 1$. Цим самим ми довели, що ряди (38_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \leq 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ які задовольняють співвідношення (39). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4), в якому функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ визначаються співвідношеннями (38_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігається до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\widehat{\Delta}}$$

і є розв'язком рівняння (3).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми 3 і $\widehat{\gamma}(t)$ — довільний неперервний і обмежений при всіх $t \leq 0$ розв'язок рівняння (3), то при всіх $t \leq 0$ виконується умова*

$$|\widehat{\gamma}(t)| \leq \widehat{M}a^t,$$

де $\widehat{M} = \text{const} > 0$.

Доведення леми 4 проводиться за тією ж схемою, що і доведення леми 2.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $a > 1, q > 1$;

2) $\widehat{\Delta} = \dfrac{|b|}{a^q - a} < \dfrac{1}{2}$.

Тоді довільний неперервний і обмежений при всіх $t \leq 0$ розв'язок $\widehat{\gamma}(t)$ рівняння (3) можна подати у вигляді ряду (4), в якому функції $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots,$ визначаються співвідношеннями (38_i), $i = 0, 1, \ldots,$ а $\omega(t)$ — деяка неперервна 1-періодична функція.

Для доведення теореми 4 достатньо показати, що для довільного неперервного й обмеженого при всіх $t \leq 0$ розв'язку $\widehat{\gamma}(t)$ рівняння (3) існує неперервний 1-періодичний розв'язок $\omega(t)$ рівняння

$$\omega(t) = a^{-t}\widehat{\gamma}(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)), \tag{40}$$

де функції $x_i(t, \omega(t))$, $i = 1, 2, \ldots$, визначаються співвідношеннями (38_i), $i = 1, 2, \ldots$. Це можна зробити аналогічно тому, як було доведено існування та єдиність неперервного 1-періодичного розв'язку рівняння (16).

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(t+1) = ay(t) + by(qt) + \widehat{f}(t) \tag{41}$$

у випадку, коли виконуються умови:

1) $a > 1$, $q > 1$;

2) $\dfrac{|b|}{a-1} = \widehat{\theta} < 1$;

3) функція $\widehat{f}(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in R$ і такою, що $\sup\limits_t |\widehat{f}(t)| = M_1 < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Якщо виконуються умови 1–3, то рівняння (41) має неперервний і обмежений при всіх $t \in R$ розв'язок $\widehat{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t), \tag{42}$$

де $\widehat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервні й обмежені при всіх $t \in R$ функції.

Доведення. Підставляючи (42) в (41), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t+1) = a\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t) + b\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(qt) + \widehat{f}(t).$$

Звідси випливає, що якщо функції $\widehat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\widehat{y}_0(t+1) = a\widehat{y}_0(t) + \widehat{f}(t), \tag{43_0}$$

$$\widehat{y}_i(t+1) = a\widehat{y}_i(t) + b\widehat{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{43_i}$$

то ряд (42) є формальним розв'язком рівняння (41).

За умовами теореми ряд

$$\widehat{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \widehat{f}(t+j) \tag{44_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє рівняння (43_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою в (43_0)) і виконується оцінка

$$|\widehat{y}_0(t)| \le \frac{a^{-1}M_1}{1-a^{-1}} = \frac{M_1}{a-1} = \widehat{M}_1. \tag{45_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (43_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна за індукцією довести, що ряди

$$\widehat{y}_i(t) = -b \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} \widehat{y}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{44_i}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють рівняння (43_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються оцінки

$$|\widehat{y}_i(t)| \leq \widehat{M_1} \widehat{\theta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{45_i}$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (42) рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до деякої неперервної функції $\widehat{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\widehat{y}(t)| \leq \frac{\widehat{M_1}}{1 - \widehat{\theta}}$$

і є розв'язком рівняння (41).

Зауваження 4. За допомогою заміни змінних

$$y(t) = x(t) + \widehat{y}(t)$$

дослідження структури множини неперервних і обмежених розв'язків рівняння (41) можна звести до дослідження структури множини неперервних і обмежених розв'язків рівняння (3), для якого має місце теорема 4.

Зауваження 5. Теорема 5 має місце також у випадку, коли $a > 1$, $q > 0$.

Розглянемо тепер рівняння (28), яке є природним узагальненням рівняння (41) на випадок, коли b є деякою дійсною функцією змінної t.

Має місце наступна теорема.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови:*

1) $a > 1, q > 1$;

2) функції $\widetilde{b}(t)$, $\widetilde{f}(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in R$ *і такими, що* $\sup\limits_t |\widetilde{b}(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |\widetilde{f}(t)| = \widetilde{f}^*$;

3) $\dfrac{b^*}{a-1} = \overline{\Delta} < 1$,

то рівняння (28) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\overline{\overline{y}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_i(t), \tag{46}$$

де $\overline{\overline{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні й обмежені при* $t \in R$ *функції.*

Для доведення теореми достатньо, очевидно, спочатку показати, що послідовність рівнянь

$$\overline{\overline{y}}_0(t+1) = a\overline{\overline{y}}_0(t) + \widetilde{f}(t), \tag{47_0}$$

$$\overline{\overline{y}}_i(t+1) = a\overline{\overline{y}}_i(t) + \widetilde{b}(t)\overline{\overline{y}}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{47_i}$$

має неперервні й обмежені при $t \in R$ розв'язки $\overline{\overline{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

Безпосередньою підстановкою в (47_i), $i = 0, 1, \ldots$, можна переконатися, що ряди

$$\overline{\overline{y}}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\widetilde{f}(t+j), \tag{48_0}$$

$$\overline{\overline{y}}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)}\widetilde{b}(t+j)\overline{\overline{y}}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{48_i}$$

є формальними розв'язками рівнянь (47_i), $i = 0, 1, \ldots$. Беручи до уваги умови теореми, легко показати, що вони рівномірно збігаються при всіх $t \in R$ до деяких неперервних функцій, які задовольняють умови

$$|\,\overline{\overline{y}}_i(t)\,| \leq \overline{f}^{\,*}\,\overline{\Delta}^{\,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{49}$$

де $\overline{f}^* = \dfrac{\widetilde{f}^*}{a-1}$. Отже, внаслідок (49) ряд (46) рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до деякої неперервної функції $\overline{\overline{y}}(t)$, яка є розв'язком рівняння (28) і задовольняє умову

$$|\overline{\overline{y}}(t)| \leq \frac{\overline{f}^*}{1-\overline{\Delta}}.$$

Теорему 6 доведено.

Виконуючи в (28) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \overline{\overline{y}}(t),$$

дослідження рівняння (28) можна звести до дослідження рівняння (35). В розглядуваному випадку для цього рівняння має місце наступна теорема.

Теорема 7. *Якщо виконуються умови 1, 2 теореми 6 і* $\dfrac{b^*}{a^q - a} = \overline{\overline{\Delta}} < \dfrac{1}{2}$, *то довільний неперервний і обмежений при* $t \leq 0$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *рівняння (35) можна подати у вигляді ряду*

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються за допомогою співвідношень*

$$x_0(t) = a^t\omega(t),$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1}\widetilde{b}(t-j)x_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$\omega(t)$ — *деяка неперервна 1-періодична функція.*

Доведення теореми 7 проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

Зауваження 6. Теорема 6 має місце також у випадку, коли $a > 1$, $q > 0$.

3. Дослідимо тепер питання про існування неперервних розв'язків різницевого рівняння (3) у випадку, коли $a > 1$, $0 < q < 1$, $t \geq 0$. Для цього виконаємо в (3) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = a^t y(t). \tag{50}$$

В результаті отримаємо рівняння

$$y(t+1) = y(t) + ba^{-1}a^{(q-1)t}y(qt), \tag{51}$$

для якого має місце наступна лема.

Лема 5. *Нехай виконуються умови:*
1) $a > 1, 0 < q < 1$;
2) $\triangle_* = \dfrac{|b|}{a - a^q} < 1$.
Тоді рівняння (51) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Доведення. Розв'язки рівняння (51) шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{52}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Підставляючи (52) в рівняння (51), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + ba^{-1}a^{(q-1)t}\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності рівнянь

$$y_0(t+1) = y_0(t), \tag{53_0}$$

$$y_i(t+1) = y_i(t) + ba^{-1}a^{(q-1)t}y_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{53_i}$$

то ряд (52) буде формальним розв'язком рівняння (51).

Оскільки рівняння (53_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \omega(t), \tag{54_0}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція, то, розглядаючи послідовно рівняння (53_i), $i = 1, 2, \dots$, можна переконатися, що вони також мають неперервні при $t \geq 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$y_i(t) = -ba^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{54_i}$$

є формальними розв'язками послідовності рівнянь (53_i), $i = 1, 2, \dots$, то для цього достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$. Для цього, в свою чергу, достатньо показати, що при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_i(t)| \leq M \Delta_*^i a^{(q-1)t}, \tag{55}$$

де $M = \max_t |\omega(t)|$. Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq M$, то на підставі (54_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \leq |b| a^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} |y_0(q(t+j))| \leq M|b| a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq$$

$$\leq M \frac{|b|}{a(1 - a^{q-1})} a^{(q-1)t} \leq M \frac{|b|}{a - a^q} a^{(q-1)t} \leq M \Delta_* a^{(q-1)t}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (55) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (54_{i+1}) і (55) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq |b| a^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)(t+j)} |y_i(q(t+j))| \leq |b| a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} M \Delta_*^i a^{(q-1)q(t+j)} \leq$$

$$\leq M \Delta_*^i |b| \, a^{-1} a^{(q^2-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q^2-1)j} \leq M \Delta_*^i |b| a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(q-1)j} \leq$$

$$\leq M \Delta_*^i \frac{|b|}{a(1 - a^{q-1})} a^{(q-1)t} \leq M \Delta_*^{i+1} a^{(q-1)t}.$$

Отже, ми показали, що оцінка (55) має місце при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Цим самим ми довели, що ряди (54_i), $i = 1, 2, \dots$, рівномірно збігаються при всіх $i = 1, 2, \dots$, $t \geq 0$ до деяких неперервних при $t \geq 0$ функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, що задовольняють оцінку (55). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (52) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta_*}.$$

Лему 5 доведено.

Беручи до уваги заміну змінних (50), на підставі леми 5 отримуємо наступну теорему.

Теорема 8. *Якщо виконуються умови 1, 2 леми 5, то рівняння (3) має сім'ю неперервних при* $t \geq 0$ *розв'язків* $x(t) = x(t, \omega(t))$, *які залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

4. Розглянемо тепер різницеве рівняння (3) у випадку, коли $0 < a < 1$, $0 < q < 1$, $t \leq 0$. Виконуючи в (3), як і у попередньому випадку, заміну змінних (50), дослідження цього рівняння зводимо до дослідження рівняння (51), для якого справедлива наступна лема.

Лема 6. *Нехай виконуються умови:*
1) $0 < a < 1, 0 < q < 1$;
2) $\tilde{\tilde{\triangle}} = \dfrac{|b|}{a^q - a} < 1$.
Тоді рівняння (51) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що рівняння (51) має неперервні розв'язки у вигляді ряду (52). Для цього достатньо спочатку показати, що послідовність рівнянь (53_i), $i = 0, 1, \ldots$, має неперервні розв'язки $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

Рівняння (53_0) має сім'ю неперервних при $t \leq 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \omega(t), \tag{56_0}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція. Послідовно можна переконатися, що ряди

$$y_i(t) = ba^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(q-1)(t-j)} y_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{56_i}$$

є формальними розв'язками рівнянь (53_i), $i = 1, 2, \ldots$. Покажемо, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, і при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$ виконується оцінка

$$|y_i(t)| \leq M \tilde{\tilde{\triangle}}^i a^{(q-1)t}, \tag{57}$$

де $M = \max\limits_t |\omega(t)|$. Оскільки $|y_0(t)| \leq M$, то, беручи до уваги (56_1), одержуємо

$$|y_1(t)| \leq |b|a^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(q-1)(t-j)} |y_0(q(t-j))| \leq M|b|a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q)j} \leq$$

$$\leq M \frac{|b|a^{1-q}}{a(1-a^{1-q})} a^{(q-1)t} \leq M \frac{|b|}{a^q - a} a^{(q-1)t} \leq M \tilde{\tilde{\triangle}} a^{(q-1)t}.$$

Припустимо, що оцінку (57) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Дійсно, згідно з (56_{i+1}) і (57) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq |b|a^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(q-1)(t-j)} |y_i(q(t-j))| \leq |b|a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q)j} M \tilde{\tilde{\Delta}}^i a^{(q-1)q(t-j)} \leq$$

$$\leq M \tilde{\tilde{\Delta}}^i |b|a^{-1} a^{(q^2-1)t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q^2)j} \leq M \tilde{\tilde{\Delta}}^i |b|a^{-1} a^{(q-1)t} \sum_{j=1}^{\infty} a^{(1-q)j} \leq$$

$$\leq M \tilde{\tilde{\Delta}}^i \frac{|b|a^{1-q}}{a(1-a^{1-q})} a^{(q-1)t} \leq M \tilde{\tilde{\Delta}}^{i+1} a^{(q-1)t}.$$

Цим самим, ми показали, що ряди (56_i), $i = 0, 1, \ldots$, при всіх $t \leq 0$ рівномірно збігаються до деяких неперервних при $t \leq 0$ функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють умову (57). Отже, ряд (52) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, що задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \tilde{\tilde{\Delta}}}.$$

Лему 6 доведено.

Беручи до уваги заміну змінних (50), на підставі леми 6 отримуємо наступну теорему.

Теорема 9. *Якщо виконуються умови 1, 2 леми 6, то рівняння (3) має сім'ю неперервних при $t \leq 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, які залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.*

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243–284.
2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations // Acta math. — 1930. — **54**. — P. 205–246.
3. *Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear *q*-difference equations // Ibid. — 1933. — **61**. — P. 1–38.
4. *Adams C. R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**, № 3. — P. 507–541.
5. *Carmichael R. D.* linear difference equations and their analytic solutions // Ibid. — 1911. — **12**. — P. 99–134.
6. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. — Warsawa, 1968.
7. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
8. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
9. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **407**, № 5. — С. 600–603.
10. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем линейных разностных уравнений в критическом случае // Дифференц. уравнения. — 2008. — № 3. — С. 421–423.

Одержано 24.04.08