Физика низких температур, 1995, т. 21, № 7, с. 735–737 УДК 538.941

Четвертый звук в релятивистской теории сверхтекучести

С. И. Вильчинский

Киевский университет им. Тараса Шевченко, Украина, 252022, г. Киев, пр. Ак. Глушкова,6

П. И. Фомин

Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Украина, 252143, г. Киев, ул. Метрологическая, 14-б

Статья поступила в редакцию 30 мая 1994 г., после переработки 14 февраля 1995 г.

Рассмотрен вопрос о распространении волн четвертого звука в релятивистских сверхтекучих системах. Получены в лоренц-ковариантной форме уравнения, описывающие распространение четвертого звука и найдена его скорость. Определен характер колебаний в найденной звуковой моде.

Розглянуто питання про розповсюдження хвиль четвертого звуку в релятивістських надплинних системах. Отримано в лоренц-коваріантній формі рівняння, що описують розповсюдження хвиль четвертого звуку і знайдено їх швидкість. Визначено характер коливань в знайденій звуковій моді.

Нерелятивистская теория сверхтекучести существует и развивается более пятидесяти лет. Ее основания были заложены в работах Ландау [1], Боголюбова [2], свое дальнейшее развитие она получила в работах Халатникова [3] и других (см. ссылки в [4]). В последнее десятилетие для решения некоторых вопросов квантовой теории поля со спонтанно нарушенной симметрией, а также космологии и релятивистской астрофизики, стало актуальным развитие релятивистской теории сверхтекучести. Основы феноменологической релятивистской теории сверхтекучести заложены в [5,6], а микроскопический подход разработан в [7]. При этом методы и принципы физики низких температур естественным образом обобщаются на релятивистскую область, что сводится главным образом к замене группы Галилея группой Лоренца. Отметим, что такое обобщение облегчает рассмотрение вопроса о законах преобразования термодинамических величин при преобразованиях Лоренца (и Галилея в пределе $c \to \infty$), что обусловлено преимуществом четырехмерного релятивистского формализма.

Главной целью данной работы является исследование вопроса о распространении четвертого звука в релятивистских сверхтекучих системах в бездиссипативном приближении. Аналогичное исследование в теории сверхтекучего гелия проведено в [3]. Основные уравнения сверхтекучей релятивистской термодинамики и гидродинамики в бездиссипативном приближении имеют вид [6]

$$T^{\mu\nu} = \left(TS_n + \mu\rho_n\right) u^\mu u^\nu + \mu\gamma^{-1}\rho_s v^\nu v^\mu - Pg^{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad j^\nu = \rho_n u^\nu + \rho_s v^\nu; \tag{2}$$

$$\partial_\nu S^\nu = 0, \quad S^\nu = S_n u^\nu, \tag{3}$$

$$\mu\gamma^{-1} v^\nu \partial_\nu v^\lambda = \Delta_s^{\lambda\nu}\partial_\nu(\mu\gamma^{-1}), \tag{4}$$

$$\Delta_s^{\mu\nu}\partial_\nu v^\sigma - \Delta_s^{\sigma\nu}\partial_\nu v^\mu = 0, \quad \Delta_s^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu, \tag{5}$$

$$dP = S_n dT + \rho_n d\mu + \rho_s d(\mu\gamma^{-1}), \tag{6}$$

$$d\varepsilon = TdS_n + \mu\gamma^{-1} d\left(\rho_s + \gamma\rho_n\right) - \mu\gamma^{-1}\rho_n d\gamma, \tag{7}$$

$$v^\nu v_\nu = 1, \quad u^\nu u_\nu = 1, \quad \gamma = u^\nu v_\nu. \tag{8}$$

Здесь u^ν, v^μ — четырехмерные скорости нормальной и сверхтекучей компонент соответственно; μ — инвариантный химический потенциал; T — инвариантная температура; P — давление; S_n — плотность энтропии нормальной компоненты; ρ_n и ρ_s — плотности нормальной и сверхтекучей компонент; $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии–импульса. Уравнения (4), (5) описывают движение сверхтекучей компоненты, (7) определяет двухскоростную термодинамику в лоренц-ковариантной форме; S^μ — вектор плотности энтропии. Уравнения (1), (2)

© С. И. Вильчинский, П. И. Фомин, 1995

представляют собой законы сохранения энергии–импульса и тока соответственно, уравнение (3) — закон сохранения энтропии в бездиссипативных системах; ε — инвариантная плотность энергии ($\varepsilon = u_\nu v_\mu T^{\nu\mu}$). Сверхтекучая компонента (конденсат) описывается комплексным скалярным параметром порядка (эффективной волновой функцией)

$$\Phi(x) = \eta(x) \exp\left[\theta(x)\hbar^{-1}\right],$$

причем

$$\rho_s \simeq \eta^2 .$$

Одной из особенностей квантовых сверхтекучих систем является свойство протекать сквозь узкие каналы (сверхщель), не испытывая при этом никакого сопротивления [3]. При этих условиях сверхтекучая компонента движется свободно, а нормальная компонента удерживается в состоянии покоя вследствие вязкого взаимодействия со стенками. Четвертый звук, по определению [3], соответствует колебаниям, возникающим в системе, когда нормальная компонента заторможена. При исследовании четвертого звука учтем, что вследствие заторможенности нормальной компоненты имеет место следующее соотношение:

$$u^\nu(x) = u_0^\nu(x), \quad u_1^\nu(x) = 0 . \tag{9}$$

Линеаризацию уравнений будем производить при следующих упрощающих условиях:

$$u_0^\nu = v_0^\nu , \quad \gamma = u^\nu v_\nu \simeq 1 . \tag{10}$$

Индексом «0» будем обозначать равновесные значения величин, считая их независимыми от координат и времени, а индексом «1» — малые отклонения величин от равновесных значений.

Линеаризованная система имеет вид

$$\partial_u \rho_1 + \rho_{s0}\partial_\nu v_1^\nu = 0 , \quad \sigma_0\partial_u\rho_1 + \rho_0\partial_u\sigma_1 = 0 ,$$

$$\mu_0 v_0^\nu \partial_\nu v_1^\lambda = \Delta_0^{\lambda\nu}\partial_\nu\mu_1 , \quad \partial_\nu P_1 = \sigma_0\rho_0\partial_\nu T_1 + \rho_0\partial_\nu\mu_1 , \tag{11}$$

$$\partial_\nu\varepsilon_1 = \left(T_0\sigma_0 + \mu_0\right)\partial_\nu\rho_1 + T_0\rho_0\partial_\nu\sigma_1 .$$

Здесь

$$\partial_v = v_0^\nu\partial_\nu ; \quad \sigma = S/(\rho_s + \rho_n) ;$$

$$\Delta_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - v_0^\mu v_0^\nu ; \quad \rho_1 = \rho_{s1} + \rho_{n1} .$$

Независимыми переменными обычно выбирают T и P. Но из второго уравнения системы (11) следует, что в данном случае только одна переменная независима. Действительно,

$$\sigma_0(\partial\rho/\partial T)_P\partial_u T_1 + \sigma_0(\partial\rho/\partial P)_T\partial_u P_1 +$$

$$+ \rho_0(\partial\sigma/\partial T)_P\partial_u T_1 + \rho_0(\partial\sigma/\partial P)_T\partial_u P_1 = 0 ,$$

откуда

$$\partial_u T_1 = -\alpha\partial_u P_1 , \tag{12}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_0(\partial\rho/\partial P)_T + \rho_0(\partial\sigma/\partial P)_T}{\sigma_0(\partial\rho/\partial T)_P + \rho_0(\partial\sigma/\partial T)_P} .$$

Далее, исключая из системы уравнений (11) производные от v_1^ν, μ_1, ρ_1, T_1, σ_1, ε_1, получаем уравнение, описывающее распространение четвертого звука в релятивистских сверхтекучих системах:

$$\left[(\partial\rho/\partial P)_T - \alpha(\partial\rho/\partial T)_P\right]\partial_u^2 P_1 +$$

$$+ \rho_{s0}\mu_0^{-1}\left(1 + \rho_0\sigma_0\alpha\right)\Delta_0^{\lambda\nu}\partial_\lambda\partial_\nu P_1 = 0 . \tag{13}$$

Рассматривая решение этого уравнения в виде плоских волн

$$P_1 = P_{10}\exp\left(ik_\nu x^\nu\right)$$

(k_ν — четырехмерный волновой вектор), получаем

$$\left\{\left[(\partial\rho/\partial P)_T - \alpha(\partial\rho/\partial T)_P\right]k_u^2 +\right.$$

$$\left. + \left[\rho_{s0}\mu_0^{-1}\rho_0\left(1 + \rho_0\sigma_0\alpha\right)\right]k_l^2\right\}P_{10} = 0 ,$$

где $k_u = v_0^\nu k_\nu$, $k_l^2 = k_u^2 - k_\nu k^\nu$. Так как $P_{10} \neq 0$, то

$$\left[(\partial\rho/\partial P)_T - \alpha(\partial\rho/\partial T)_P\right]k_u^2 +$$

$$+ \left[\rho_{s0}\mu_0^{-1}\rho_0\left(1 + \rho_0\sigma_0\alpha\right)\right]k_l^2 = 0 .$$

Отсюда получим выражение для скорости четвертого звука $\kappa^2 = k_v^2/k_l^2$:

$$\kappa^2 = \frac{\rho_{s0}\left(1 + \rho_0\sigma_0\alpha\right)}{\mu_0\rho_0\left[(\partial\rho/\partial P)_T - \alpha(\partial\rho/\partial T)_P\right]} . \tag{14}$$

Для определения характера колебаний в полученной звуковой моде необходимо рассмотреть в ней зависимость между термодинамическими переменными. Эту зависимость получим из линеаризованной системы (11) подстановкой переменных в виде плоских волн. Она имеет следующий вид:

$$T_{10} = \alpha\frac{\rho_0\mu_0\kappa^2}{1 + \alpha\rho_0\sigma_0}\frac{kv_{10}}{k_u} , \tag{15}$$

где α определяется выражением (12). Из (15) и (12) следует, что волны четвертого звука пред-

ставляют собой осцилляции температуры, энтропии и плотностей в ситуации, когда нормальная компонента заторможена.

Сделав термодинамические допущения

$$\rho_0^{-1}(\partial\rho/\partial T)_P \ll 1\,, \quad T\mu^{-1} \ll 1\,, \tag{16}$$

можно представить (14) следующим образом:

$$\kappa^2 = \rho^{-1}\left(\rho_s \kappa_1^2 + \rho_n \kappa_2^2\right)\,, \tag{17}$$

где

$$\kappa_1^2 = (\partial P/\partial\varepsilon)_\sigma\,, \tag{18}$$

$$\kappa_2^2 = \sigma^2\rho_s(\varepsilon + P)/\left[\mu\rho\omega_n(\partial\sigma/\partial T)_\varepsilon\right] \tag{19}$$

(κ_1^2, κ_2^2 — квадраты скоростей первого и второго звуков соответственно).

В заключение заметим, что в [8] показано, что в нерелятивистском пределе ($\mu \cong \mu_{nrl} + mc^2$, $c \to \infty$) выражения для скоростей первого и второго звуков (18), (19) совпадают с соответствующими выражениями в теории сверхтекучего гелия [3,9]. Таким образом, в нерелятивистском пределе выражение (17) согласуется с выражением для скорости четвертого звука в сверхтекучем гелии [9].

Авторы благодарят Государственный комитет Украины по вопросам науки и технологий за поддержку работы.

1. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
2. Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР*, сер. Физ., **11**, 77 (1947).
3. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
4. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
5. В. В. Лебедев, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **83**, 1601 (1982).
6. П. И. Фомин, В. Н. Шадура, *ДАН УССР*, сер. А, №6, 58 (1985).
7. Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1989).
8. П. И. Фомин, В. Н. Шадура, *Препринт ИТФ-84-56Р*, Киев (1984).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

Fourth sound in relativistic superfluidity theory

S. I. Vilchinsky and P. I. Fomin

The Lorentz-covariant equations describing propagation of the fourth sound in the relativistic theory of superfluidity are derived. The expressions for the velocity of the fourth sound are obtained. The character of oscillation in sound is determined.