Физика низких температур, 1995, т. 21, № 7, с. 687–716 УДК 537.622.2

Персистентные токи в одномерных системах сильно коррелированных электронов

(Обзор)

А. А. Звягин, И. В. Криве

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 20 января 1995 г., после переработки 3 марта 1995 г.

Рассматриваются зарядовые персистентные токи в одноканальных баллистических кольцах в различных моделях сильно коррелированных электронов (вигнеровский кристалл, латтинджеровская жидкость, модель Хаббарда, t–J-модель, фермионное представление модели Гейзенберга—Изинга). Основная цель обзора — сравнить свойства осцилляций Ааронова—Бома для слабо и сильно коррелированных электронов и сформулировать тот набор характеристик персистентного тока, который однозначно бы указывал на аномальное (отличающееся от ферми-жидкости) поведение одномерных электронных систем. Для этой цели подробно анализируется проявление эффекта четности (зависимость отклика системы от четности числа частиц в кольце) и различие свойств персистентного тока для модельных бесспиновых фермионов и реальных электронов. Рассмотрено также влияние отдельных примесей на величину и температурную зависимость амплитуды осцилляций Ааронова—Бома. Продемонстрировано, что формирование вигнеровского кристалла (возможное при слабоэкранированном кулоновском взаимодействии) приводит к резко выраженной аномальной (немонотонной) температурной зависимости величины тока в неидеальном кольце. Локальные типы электрон-электронного взаимодействия наиболее существенно изменяют свойства зарядового тока вблизи моттовского перехода металл—диэлектрик.

Розглядаються зарядові персистентні струми в одноканальних балістичних кільцях в різних моделях сильно корельованих електронів (вігнерівський кристал, латтінджерівська рідина, модель Хаббарда, t–J-модель, фермінне уявлення моделі Гейзенберга—Ізінга). Основна мета огляду — порівняння властивостей осциляцій Ааронова—Бома для слабо і сильно корельованих електронів і сформулювати той набір характеристик персистетного струму, який однозначно зазначав би на аномальну (відмінну від фермі-рідини) поведінку одновимірних електронних систем. Для цього докладно аналізується виявлення ефекту парності (залежність відгука системи від парності числа частинок у кільці) та різниця у властивостях персистентного струма для модельних безспінових ферміонів і реальних електронів. Розглянуто також вплив окремих домішок на величину і температурну залежність амплітуди осциляцій Ааронова—Бома. Продемонстровано, що формування вігнерівського кристала (можливе при слабкоекранованій кулонівській взаємодії) приводить до різко виявленої аномальної (немонотонної) температурної залежності величини струму в неідеальному кільці. Локальні типи електрон-електронної взаємодії найбільш істотно змінюють властивості зарядового струму поблизу моттівського переходу метал—діелектрик.

Содержание

Введение 688
1. Осцилляции Ааронова—Бома в идеальном газе электронов 690
2. Влияние кулоновского взаимодействия на персистентный ток в баллистических кольцах 694
3. Персистентный ток пиннингованного вигнеровского кристалла 699
4. Эффект Ааронова—Бома в модели Хаббарда 703
5. Моттовский фазовый переход и персистентный ток в диэлектрической фазе 708
Приложение 1 712
Приложение 2 714
Список литературы 715

© А. А. Звягин, И. В. Криве, 1995

1. Введение

Топологический квантовый эффект, предсказанный в 1959 г. Аароновым и Бомом [1] и вскоре подтвержденный в экспериментах по дифракции когерентного пучка электронов в вакууме на тонком соленоиде [2], вызвал острую полемику и огромное число публикаций, посвященных как принципиальным сторонам эффекта Ааронова—Бома (АБ), так и его многочисленным проявлениям и приложениям в различных областях физики (см., например, труды конференции, посвященной 30-летию эффекта АБ [3]).

Напомним, что сущность эффекта АБ заключается в несиловом и нелокальном (топологическом) влиянии электромагнитного взаимодействия (а в общей формулировке — любого калибровочного взаимодействия) на квантовую динамику заряженных частиц в неодносвязной геометрии. Согласно общим принципам квантовой механики, такое влияние сводится к изменению фазы волновой функции частицы, что и приводит в условиях мысленного (и реального) опыта АБ к периодическому (по потоку магнитного поля в соленоиде) сдвигу интерференционной картины. Для любой замкнутой траектории, охватывающей соленоид, указанное изменение фазы равно

$$\Delta\varphi_{AB} = 2\pi\Phi/\Phi_0 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\,,$$

где Φ — поток магнитного поля соленоида; $\Phi_0 = hc/e$ ($h \equiv 2\pi\hbar$, c — скорость света в вакууме, e — заряд частицы). Согласно приведенной простой формуле, любой поток Φ, кратный кванту потока Φ_0, приводит к сдвигу фазы, кратному 2π, и поэтому не оказывает никакого влияния на квантовую динамику частиц. При классическом описании эффект отсутствует при любой величине потока, так как движение частиц происходит в области вне соленоида, где электрическое и магнитное поля тождественно равны нулю. Подробный обзор экспериментов и теоретической интерпретации эффекта АБ в вакууме приведен в работах [3,4].

В конденсированных средах постановка опыта АБ несколько изменяется. Исследуемые образцы помещаются в постоянное однородное магнитное поле, а поток фиксируется созданием эффективно неодносвязной геометрии орбит заряженных частиц. В этом случае эффект АБ проявляется в форме магнитных осцилляций кинетических и термодинамических характеристик образцов в предельно слабых магнитных полях, когда силовым действием поля можно пренебречь. По существу, такого рода осцилляции в физике твердого тела изучались задолго до появления основополагающей работы Ааронова и Бома [1]. Так, известные в сверхпроводимости осцилляции критической температуры тонкостенных цилиндрических сверхпроводников в магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра (осцилляции Литтла—Паркса, см., например, монографию [5]), есть не что иное, как проявление эффекта АБ в сверхпроводящих средах. В сверхпроводниках эти осцилляции связаны с откликом на поток конденсата куперовских пар: они имеют половинный период $\Phi_s = \Phi_0/2 = hc/2e$ (квант магнитного поля для куперовских пар) и макроскопический характер.

Для нормальных металлов из-за отсутствия макроскопической когерентности волновой функции электронов осцилляции АБ для термодинамических величин (например, индуцированная намагниченность) можно наблюдать только в образцах малых (мезоскопических) размеров и при достаточно низких температурах. Действительно, электрон-фононное взаимодействие, а также неупругое взаимодействие электронов с примесями приводят к неконтролируемому изменению фазы волновой функции частиц и поэтому разрушают фазовую когерентность. Но для образцов достаточно малых размеров L, меньших средней длины свободного пробега между неупругими столкновениями $l_\varphi(T)$, фазовые сдвиги волновых функций детерминированы, и при расчете термодинамических характеристик интерференционные вклады не исчезают и могут быть измерены, например, в форме АБ-осцилляций [6]. При низких температурах длина «сбоя фазы» $l_\varphi(T)$ на порядки превосходит характерный микроскопический масштаб a и поэтому изучаемые эффекты в области длин $a << L \lesssim l_\varphi(T)$ принято называть мезоскопическими.

Простейшими из мезоскопических систем являются квазиодномерные (малоканальные) проводники. Такие устройства, созданные в форме искусственных проводящих каналов в двумерном электронном газе (например, в гетеропереходах AlGaAs/AlAs), получили название «quantum wires» (квантовые проволочки). Замкнутые квантовые каналы естественно называть квантовыми кольцами (quantum rings), и недавно на такого типа устройстве были измерены АБ-осцилляции намагниченности [7].

С теоретической точки зрения, квантовые осцилляционные эффекты в одномерных баллистических кольцах являются одним из наиболее удобных и интересных объектов для изучения. Во-первых, для бесспиновых частиц в $1D$ единственное действие магнитного поля сводится к изменению фазы волновой функции, и при любых полях имеет место чистая АБ-ситуация. (Тот факт, что магнитные осцилляции де Гааза—ван Альфена для кольцевой геометрии в $1D$ вырождаются в осцилляции *строго* периодические по магнитному полю, был замечен еще в работе [8].)

Во-вторых, в низкой размерности квантовые эффекты, в частности эффекты электрон-электронных корреляций, проявляются наиболее ярко. Известно (см., например, [9]), что в $1D$, строго говоря, не существует фермижидкостного описания взаимодействующих электронов. Для широкого класса локальных взаимодействий вместо обычной для $3D$ металлов ферми-жидкости в $1D$ мы имеем так называемую латтинджеровскую жидкость [10], свойства которой во многих случаях качественно отличаются от свойств ферми-газа.

Наконец, одномерный случай дает еще одно важное преимущество. А именно, в $1D$ развиты мощные непертурбативные методы решения проблем сильно коррелированных электронов (например, метод бозонизации) и известен целый набор точно решаемых моделей. Последнее обстоятельство очень важно при изучении влияния взаимодействия на мезоскопические эффекты, которые (численно) оказываются порядка одноэлектронных и поэтому не всегда «выдерживают» различные приближения. Точно решаемые модели позволяют получать ответы для интересующих нас величин во всей области констант взаимодействия, что дает возможность не только установить область справедливости той или иной схемы расчета, но и проследить, как количественно изменяются характеристики системы при переходе от режима слабой к режиму сильной связи.

Настоящий обзор посвящен мезоскопической термодинамике одномерных сильно коррелированных электронов в баллистических кольцах. В различных моделях взаимодействующих электронов (вигнеровский кристалл, латтинджеровская жидкость, модель Хаббарда, фермионное представление модели Гейзенберга—Изинга) мы рассчитываем персистентный ток

$$J(\Phi, T) = -c\left(\partial F(\Phi, T)/\partial\Phi\right)$$

(F — свободная энергия системы) и подробно анализируем его свойства: период и форму осцилляций, характер отклика (диа- или парамагнитный) на внешнее поле, зависимость амплитуды осцилляций от размеров кольца и констант, характеризующих электрон-электронное взаимодействие, а также температурную зависимость величины персистентного тока.

Особое внимание уделяется обсуждению качественных характеристик: эффекту четности (изменение характера отклика системы при изменении четности числа частиц в кольце) и туннельным свойствам примесного тока при наличии примесного потенциала. Одна из главных целей обзора — сравнить свойства персистентного тока для систем сильно коррелированных электронов с аналогичными характеристиками, рассчитанными в модели ферми-газа. Такой анализ позволяет сформулировать набор свойств квантовых колец, обнаружение которых однозначно указывало бы на «неферми-жидкостную» природу одномерных электронных систем.

Обзор построен следующим образом. В разд. 1 для простейшей модели ферми-газа с квадратичным законом дисперсии рассчитан персистентный ток при конечной температуре для двух типов канонических ансамблей: заданное число частиц (изолированное кольцо) и заданный химический потенциал (кольцо с токовыми контактами). Рассматривается также влияние локального примесного потенциала на величину тока и обсуждается эффект АБ в диэлектриках. Подчеркивается различие в предсказаниях для модели бесспиновых фермионов и реальных электронов со спином 1/2. Во втором разделе сформулирована общая теорема (типа известных теорем Кона [11]) об отсутствии перенормировки взаимодействием характеристик персистентного тока для галилеевоинвариантных систем. Эта теорема иллюстрируется на примере АБ-осцилляций в идеальном кольце вигнеровского кристалла и латтинджеровской жидкости. В разд. 3 рассчитывается персистентный ток в кольце вигнеровского кристалла, содержащего примесь. Примесный потенциал пиннингует кристалл, и эффект АБ обеспечивается за счет мезоскопического квантового туннелирования вигнеровской решетки. Характеристики туннельного тока резко отличаются от аналогичной ситуации (отдельная примесь) для модели ферми-газа. Показано, в частности, что температурная зависимость тока вигнеровского кристалла является аномальной. Одной из центральных глав обзора является разд. 4, в котором рассматривается эффект АБ в модели Хаббарда. Одномерная модель Хаббарда, как известно, точно решается с помощью квантового метода обратной задачи рассеяния. Взаимодействие с АБ-потенциалом не нарушает критерии точной разрешимости модели, что позволяет выписать уравнения анзаца Бете для электронов в кольце при ненулевом потоке магнитного поля. Проведен анализ этих уравнений и найдена зависимость энергии основного состояния системы в двух различных пределах: микроскопическом $Nt/U \lesssim 1$ (N — полное число частиц в кольце; t — интеграл перескока; U — энергия отталкивания электронов на узле) и мезоскопическом $Nt/U \gg 1$. В первом случае имеют место почти периодические («микроскопические») осцилляции персистентного тока с дробным периодом Φ_0/N, которые переходят в точные АБ-осцилляции персистентного тока для модели Хаббарда с $U = \infty$. В мезоскопических кольцах фундаментальная периодичность Φ_0 ($\Phi_0/2$ для колец с нечетным числом электронов) восстанавливается. Рассчитана зависимость амплитуды тока от концентрации электронов ν и кон-

станты хаббардовской связи U. Подробно анализируются случаи сильной и слабой связи.

Последняя глава обзора посвящена моттовскому фазовому переходу металл—диэлектрик и эффекту АБ в диэлектрической фазе. Обсуждается критерий Кона моттовского фазового перехода и на примере модели Хаббарда рассчитывается зарядовая жесткость системы как в металлической, так и в диэлектрической (половинное заполнение) фазах. Подчеркивается универсальный характер поведения системы вблизи точки перехода в диэлектрическое состояние по концентрации электронов, что отражает общие черты фазовых переходов типа соизмеримость—несоизмеримость. Моттовский переход по константе связи изучается на примере фермионной версии модели Гейзенберга—Изинга (бесспиновые решеточные электроны со взаимодействием типа плотность—плотность для ближайших соседей). Приведены выражения для зарядовой жесткости системы и проанализированы характеристики персистентного тока вблизи точки перехода металл—диэлектрик. Раздел заканчивается кратким перечислением основных результатов, касающихся проводящих свойств одномерных цепочек, описывающихся t–J-моделью.

1. Осцилляции Ааронова—Бома в идеальном газе электронов

Изучим сначала основные свойства осцилляций АБ в простейшей системе — одномерном кольце невзаимодействующих бесспиновых электронов. Несмотря на очевидную упрощенность модели, в ней содержатся все особенности проявления эффекта АБ в конденсированных средах. Для наших целей представляется нужным сравнить полученные в этой наивной модели предсказания с результатами расчетов для аналогичных систем сильно коррелированных электронов.

Спектр энергий одномерных свободных электронов, гамильтониан которых равен

$$H = -\frac{\hbar^2 d^2}{2m\,dx^2} \qquad (1.1)$$

(m — масса электрона), на кольце длиной L, помещенном в магнитное поле с потоком Φ, имеет вид [12]

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{2\pi}{L}\left(l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right]^2, \qquad (1.2)$$

где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — орбитальное квантовое число; $\Phi_0 = hc/e$ — квант потока магнитного поля.

Используя (1.2), легко найти парциальный ток каждой орбитали $i_l = -c\partial\varepsilon_l/\partial\Phi$ и, суммируя по всем занятым состояниям, рассчитать полный персистентный ток в кольце, индуцированный потоком Φ. Для нулевой температуры соответствующие конечные суммы вычисляются элементарно. Легко видеть, что результат суммирования зависит от четности полного числа электронов N_e в кольце и по порядку величины равен парциальному току фермиевской орбитали $I_0 = ev_F/L$ (v_F — фермиевская скорость). Действительно, хотя формально вклад в персистентный ток вносят токи всех орбиталей, но, так как парциальные токи с противоположным по знаку орбитальным числом l имеют разные знаки, происходит почти полное сокращение парциальных вкладов, и результат суммирования совпадает с вкладом последней заполненной (фермиевской) орбитали. Таким образом, суммарный эффект является численно одноэлектронным (т.е. мезоскопическим) и зависит от четности полного числа электронов N_e в кольце, так как изменение N_e на нечетное число должно менять «знак» эффекта — направление персистентного тока.

Для четного числа электронов в кольце ток имеет парамагнитный характер (при $\Phi \to +0$, $I > 0$, иными словами, связанное с ним магнитное поле параллельно приложенному внешнему полю) [13]:

$$I_{\text{even}} = I_0\left(1 - 2\frac{|\Phi|}{\Phi_0}\right)\operatorname{sgn}\Phi, \quad |\Phi| \le \left(\Phi_0/2\right), \qquad (1.3)$$

где $I_0 = ev_F/L$. Отклик кольца с нечетным числом бесспиновых электронов на приложенное внешнее поле — диамагнитный (при $\Phi \to +0$, $I < 0$)

$$I_{\text{odd}} = -2I_0\frac{|\Phi|}{\Phi_0}, \quad |\Phi| \le \left(\Phi_0/2\right). \qquad (1.4)$$

Это важное свойство персистентных токов в мезоскопических ферми-системах получило название эффекта четности (см., например, [14–16]). Формулы (1.3), (1.4) в силу фундаментальной периодичности эффекта АБ (с периодом Φ_0) должны быть периодически продолжены на всю ось потоков (см. рис. 1). Из рисунка видно, что переход от нечетного к четному числу электронов отвечает

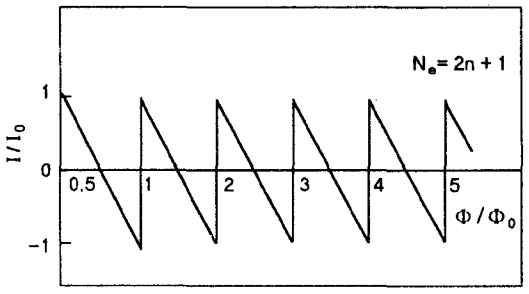

Рис. 1. Зависимость персистентного тока I от величины потока магнитного поля Φ при нулевой температуре.

сдвигу фазы персистентного тока на полпериода. Дополнительный бесспиновый электрон вносит в систему статистический поток $\Phi_0/2$, обусловленный появлением дополнительной фазы $\Delta\varphi = \pi$ в многоэлектронной волновой функции. Заметим, что для свободных частиц одноэлектронные уровни энергии (1.2) являются квадратичными функциями потока Ф, и указанная периодичность термодинамических характеристик обеспечивается пересечением термов и предположением о равновесном заполнении уровней энергии (о неравновесных персистентных токах см. в [17]).

Персистентный ток — периодическую функцию потока Ф — удобно представлять аналитически в виде разложения в ряд Фурье. Соответствующая формула для модели (1.1) имеет вид [13]

$$I(\Phi) = \frac{2}{\pi} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{nN_e} n^{-1} \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (1.5)$$

где $I_0 = ev_F/L$. Эта формула единым образом описывает как пара-, так и диамагнитный отклик одномерного кольца электронов на магнитное поле. Отметим, что форма осцилляций, характерная для систем фермионов с бесщелевым спектром возбуждений, — «зубья пилы» — является следствием кроссовера.

Поскольку в выражение (1.5) вошли только фермиевские характеристики, персистентный ток оказывается нечувствительным к форме энергетического спектра вдали от уровня Ферми. В частности, формула (1.5) справедлива и для линейной зависимости энергии от импульса [13]. Напротив, особенности в поведении плотности состояний вблизи поверхности Ферми резко сказываются на свойствах персистентного тока.

Важным общим случаем являются системы невзаимодействующих электронов с щелью в спектре энергий заряженных возбуждений. Если для бесщелевых систем (мезоскопическая) зависимость персистентного тока от размера образца L степенна́я, $I \propto L^{-1}$, то в диэлектриках персистентный ток экспоненциально мал, $I \propto \exp(-L/l_0)$ [18]. В качестве иллюстрации рассмотрим двухзонную модель диэлектрика со спектром вида

$$\varepsilon_{\pm}(k) = \pm\left[W^2 \cos^2 ka + \Delta^2\right]^{1/2}, \quad (1.6)$$

где W — ширина зоны; 2Δ — щель в спектре; $a = L/N$ — постоянная решетки. Используя формулу суммирования Пуассона, для геометрии кольца легко рассчитать зависящую от потока Ф (осциллирующую) часть энергии основного состояния $E_{osc}(\Phi)$ модели (1.6) [18–20]:

$$E_{osc}(\Phi) = \frac{2}{\pi}\Delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{nN_e} K_1\left(\frac{n\Delta}{\Delta_0}\right) n^{-1} \cos\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (1.7)$$

где $K_1(x)$ — функция Макдональда; $\Delta_0 \equiv \hbar v_F/L$. Персистентный ток, согласно определению (см. введение), находится из (1.7) простым дифференцированием по потоку:

$$I(\Phi, \Delta) = \frac{2}{\pi}\frac{e\Delta}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{nN_e} K_1\left(\frac{n\Delta}{\Delta_0}\right) \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (1.8)$$

Заметим, что множитель, стоящий перед суммой в (1.8), в точности совпадает с критическим током одномерных сверхпроводников [21]. Отметим также, что, в отличие от (1.5), форма осцилляций персистентных токов щелевых фермионных систем гармоническая (тогда как в (1.5) входит ряд гармоник).

Для малых аргументов ($x \to 0$) функция $K_1(x) \sim x^{-1}$, поэтому при $\Delta << \Delta_0$ выражение (1.7) переходит в (1.5) для персистентного тока в системах с бесщелевым спектром. В другом пределе $\Delta >> \Delta_0$, когда щель в спектре превосходит характерную разность энергий квантованных уровней на поверхности Ферми $\sim \hbar v_F/L$, ток имеет экспоненциально малую амплитуду

$$I\left(\Phi, \Delta >> \hbar v_F/L\right) =$$

$$= \left(\frac{2\Delta\Delta_0}{\pi}\right)^{1/2} \frac{e}{\hbar} (-1)^{N_e} \exp\left(-\frac{\Delta}{\Delta_0}\right) \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (1.9)$$

и может быть интерпретирован как эффект Аарона—Бома на туннельных состояниях [20]. Сравнивая (1.9) с (1.5), мы видим, что эффект АБ в диэлектрической фазе характеризуется экспоненциальной малостью амплитуды осцилляций и преобладающим вкладом фундаментальной гармоники.

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает температура на персистентный ток в нормальных системах. При конечных температурах возникают два новых обстоятельства. Во-первых, изменяется заселенность уровней энергии электронов в кольце, и при суммировании орбитальных токов мы должны «взвесить» их с соответствующей функцией распределения. Во-вторых, в реальных твердотельных системах при $T \neq 0$ появляется конечная плотность равновесных фононов, неупругое взаимодействие с которыми приводит к случайному сбою фазы электронов.

Оба эти фактора подавляют АБ-осцилляции, но имеют разную физическую природу. Изменение заселенности уровней можно себе представить и для чистого состояния. Само по себе оно не нарушает фазовую когерентность, в то время как взаимодействие с термически возбужденными фононами переводит систему в смешанное состояние и разрушает фазовую когерентность. Такую же роль играет и неупругое взаимодействие со случайно распределенными примесями. Феноменологически удобно ввести среднюю длину свободного пробега между неупругими столкновениями $l_\varphi(T)$ (она же длина сбоя фазы) и считать размеры системы $L > l_\varphi$. В этом случае эффектами разрушения фазовой когерентности можно пренебречь. В дальнейшем, говоря о температуре, мы будем иметь в виду только термодинамический аспект проблемы.

При $T \neq 0$ формально все уровни имеют ненулевую заселенность. Если $T \ll \hbar v_F/L$, то размытие фермиевской ступеньки пренебрежимо мало и персистентный ток остается таким же, как и при нулевой температуре (1.5). При высоких температурах $T \gg \hbar v_F/L$ заселенность пар уровней с противоположными орбитальными числами $(l, -l)$ практически одинакова, а, поскольку эти уровни вносят противоположный по знаку вклад в полный персистентный ток, суммарный эффект оказывается экспоненциально малым. Таким образом, температура усиливает деструктивную интерференцию вкладов и подавляет осцилляции АБ. Характерная температура кроссовера T^*, при которой происходит переход от режима температурно независимых осцилляций к режиму температурного разрушения осцилляций, по порядку величины равна $T^* \simeq C_1 \hbar v_F/L$. Численный коэффициент C_1 в этой зависимости определяется статистическими свойствами системы.

Если кольцо не изолировано и, кроме интенсивного обмена энергией с термостатом, происходит также обмен частицами, то ситуация отвечает установлению равновесия в большом каноническом ансамбле (*фиксированный химический потенциал*). В этом случае заселенность уровней энергии определяется функцией распределения Ферми—Дирака и персистентный ток для модели (1.2) равен [12,13]

$$I(\Phi) = \frac{2}{\pi} I_0 \frac{T}{T^*} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nk_F L)\, \mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{nT}{T^*}\right) \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \tag{1.10}$$

где температура кроссовера $T^* = \pi^{-1}\hbar v_F/L$. На рис. 2 приведена зависимость амплитуды осцилляций от температуры. Как и ожидалось исходя из качественных соображений, персистентный ток

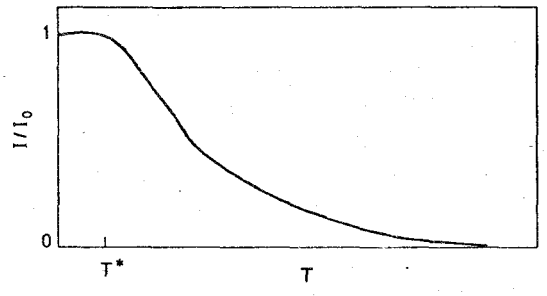

Рис. 2. Температурная зависимость амплитуды персистентного тока в кольце невзаимодействующих электронов.

разрушается в области температур $T \gtrsim T^*$. Температура кроссовера практически не зависит от формы энергетического спектра и имеет тот же численный коэффициент π^{-1}, что и для модели с линеаризованным вблизи уровня Ферми спектром электронов [13].

Указанный численный коэффициент C_1 существенно меняется при изменении характера термодинамического усреднения. В ситуации с фиксированным числом частиц (изолированное кольцо) температура кроссовера оказывается приблизительно в два раза выше [22]. Для линеаризованного спектра такая задача может быть решена аналитически, и искомый коэффициент равен $2\pi^{-1}$ [15].

Для двухзонной модели диэлектрика (1.6) температурный ход амплитуды осцилляций при фиксированном химическом потенциале аномальный. Рост температуры приводит к увеличению числа свободных носителей заряда (электронов и дырок), и персистентный ток, складывающийся из тока заполненной валентной зоны и тока термически возбужденных квазичастиц, монотонно растет (оставаясь экспоненциально малым при $T \lesssim \Delta$ [18–20]). Для более интересного, с точки зрения реализации в эксперименте, случая фиксированного числа частиц решение задачи требует численного анализа и до сих пор проведено не было.

В заключение этого раздела, посвященного свойствам персистентного тока в системе невзаимодействующих электронов, мы рассмотрим влияние отдельных упругих рассеивателей на амплитуду и период АБ-осцилляций. Как известно [6,23], упругие рассеяния, в отличие от неупругих, не нарушают фазовую когерентность и поэтому не разрушают персистентный ток. Ясно также, что для невзаимодействующих электронов такое рассеяние само по себе не может изменить период осцилляций. Однако амплитуда осцилляций, вообще говоря, подавляется при наличии потенциального барьера. Характер этого подавления для невзаимодействующих электронов зависит от свойств потенциала рассеяния. Рассмотрим вначале простей-

ший пример, когда барьер выбран в виде δ-функции:

$$U(x) = g\delta(x) . \qquad (1.11)$$

Задача о спектре электронов в поле δ-функционального барьера решается точно (см., например, [24]). Для квадратичного закона дисперсии спектр ε_n электронов на кольце с потоком магнитного поля Φ находится из решения трансцендентного уравнения [25]

$$2k\left(\cos 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} - \cos 2\pi k\right) - \frac{mLg}{\pi}\sin 2\pi k = 0 , \qquad (1.12)$$

где $k^2 = \varepsilon mL^2/2\pi^2$. Явные аналитические формулы для персистентного тока можно вывести для случая сильной ($g >> \hbar v_F$) и слабой ($g << \hbar v_F$) связи. Для слабой связи поправки к (1.5), обусловленные влиянием потенциала рассеяния, малы и несущественны. Сильная связь отвечает случаю, когда деформация спектра потенциалом сравнивается с характерной энергией квантования уровней $\hbar v_F/L$. В этом пределе основной вклад в персистентный ток вносит фундаментальная гармоника и амплитуда осцилляций оказывается в $\hbar v_F/g$ раз меньше, чем в идеальном кольце [13]:

$$I(\Phi) \simeq \frac{1}{2} I_0(-1)^{N_e}\frac{\hbar v_F}{g}\sin\left(2\pi n\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) . \qquad (1.13)$$

Малый безразмерный множитель $\hbar v_F/g << 1$, в (1.13) есть не что иное, как модуль амплитуды прохождения δ-барьера $t = i\hbar v/(i\hbar v - g)$, вычисленный при фермиевской энергии в режиме сильной связи $g >> \hbar v_F$. Таким образом, даже при наличии потенциального барьера персистентный ток определяется только фермиевскими характеристиками. Это обстоятельство позволяет получить простую общую формулу для персистентного тока в кольце для барьера произвольной формы, описывая последний через характеристики рассеяния — коэффициент прохождения $T(\varepsilon) = |t(\varepsilon)|^2$ и фазу рассеяния вперед $\delta_s(\varepsilon)$ (ε — энергия падающих на барьер частиц). В искомую формулу для персистентного тока входит только коэффициент прохождения, вычисленный при фермиевской энергии $E = T_F$ [26],

$$I(\Phi) = -I_0(T_F)^{1/2}\sin\left(2\pi n\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\times$$
$$\times\left(1 - T_F\cos^2\left(2\pi n\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\left\{\pi^{-1}\arccos\left((T_F)^{1/2}\cos\left(2\pi n\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right) - \delta_N\right\}, \qquad (1.14)$$

где $\delta_N = 1$ (0) при четном (нечетном) числе бесспиновых электронов в кольце.

Заметим, что в персистентный ток входит не квадрат амплитуды прохождения (как, например, в формулу Ландауэра для кондактанса [27]), а сама амплитуда. Это важное обстоятельство связано с тем, что персистентный ток является термодинамическим током и для его расчета достаточно знания спектральной плотности, а не корреляционных функций.

Теперь рассмотрим, к каким изменениям приводит учет спина электронов для модели невзаимодействующих частиц (1.1). Для одномерного свободного движения в поле АБ-потока спин можно трактовать как нединамическую переменную, приводящую к дополнительному двукратному (для частиц со спином 1/2) вырождению уровней энергии системы (1.2). Из-за эффекта деструктивной интерференции вкладов парциальных токов появление дополнительной Z_2-симметрии существенно сказывается на зависимости полного персистентного тока от числа частиц в кольце. Теперь имеет смысл различать четыре типа состояний электронов в кольце: четное число пар (со спином «вверх» и «вниз»), нечетное число пар, четное или нечетное число пар плюс дополнительный электрон.

1. $N_e = 4n$ (n — целое число, $n >> 1$). Поскольку токи электронов с различным направлением спина одинаковы, ситуация с четным числом пар описывается удвоенным четным током (1.3) для числа «частиц» $N_e/2$. Иными словами, персистентный ток в кольце определяется формулой (1.3) (с учетом очевидной замены $I_0 \to 2I_0$).

2. $N_e = 2(2n + 1)$. В этом случае ситуация аналогична нечетному числу бесспиновых фермионов и формула для тока совпадает с (1.4) ($I_0 \to 2I_0$).

3. $N_e = 4n + 1, 4n + 3$. Эти случаи в терминах бесспиновых фермионов описываются суммой четных и нечетных токов (1.3), (1.4) для чисел частиц, отличающихся на единицу. Такое суммирование приводит к эффективному уменьшению вдвое периода и амплитуды осцилляций и к парамагнитному характеру отклика системы на внешнее магнитное поле. Точно такой же результат возникает и при усреднении персистентного тока бесспиновых фермионов по флуктуациям числа частиц в кольце δN_e. В термодинамическом пределе $N_e >> 1$ для рассматриваемых в п. 3 случаев имеем следующую простую формулу для персистентного тока при нулевой температуре [28]:

$$I(\Phi) = I_0\left(1 - 2\frac{|\Phi|}{\Phi_0}\right)\operatorname{sgn}\Phi , \quad |\Phi| \le \left(\Phi_0/2\right) . \qquad (1.15)$$

Таким образом, персистентный ток в кольце, содержащем нечетное число фермионов со спином 1/2, совпадает со средним током для случая флуктуирующего числа частиц. При низких температурах этот ток является «парамагнитным» и осциллирует с половинным периодом $\Phi_0/2$. Диамагнитный отклик возникает только при полном заполнении всех уровней энергии ($\varepsilon_n < \varepsilon_F$) электронов в кольце, т.е. когда число электронов принимает значения $N_e = 2(2n + 1)$.

Перечислим основные свойства персистентных токов для систем невзаимодействующих электронов:

— период осцилляций тока равен кванту потока магнитного поля $\Phi = hc/e$;

— амплитуда осцилляций при нулевой температуре обратно пропорциональна периметру кольца $I \sim L^{-1}$ в металлической фазе и экспоненциально мала $I \sim \exp(-L/l_0)$ в диэлектрической фазе;

— форма АБ-осцилляций в металлическом состоянии определяется всеми гармониками («зубья пилы»), а в диэлектрической фазе — лишь фундаментальной гармоникой;

— ток носит парамагнитный характер при четном числе (бесспиновых) электронов в кольце и диамагнитный — при нечетном;

— температура разрушает осцилляции в области $T \gtrsim T^* \sim \hbar v_F/L$; численный коэффициент в температуре кроссовера T^* зависит от характера термодинамического усреднения;

— при наличии потенциального барьера персистентный ток подавляется; степень подавления зависит от свойств потенциала и эффект становится существенным, когда деформация спектра сравнивается с характерной энергией квантования уровней системы $\hbar v_F/L$.

2. Влияние кулоновского взаимодействия на персистентный ток в баллистических кольцах

Перейдем к изучению АБ-осцилляций в сильно коррелированных электронных системах. Рассмотрим влияние кулоновского взаимодействия на персистентный ток в баллистических одномерных (квазиодномерных одноканальных) кольцах. Вначале мы продемонстрируем, что в отсутствие примесей персистентный ток сильно коррелированных электронов практически совпадает с током свободных электронов. При нулевой температуре это утверждение может быть сформулировано как теорема.

Без обращения к какой-либо модели физически ясно, что в идеальном кольце (т.е. в кольце совершенной формы и в отсутствие примесей) любое взаимодействие, не нарушающее вращательной инвариантности (и, в частном случае, кулоновское взаимодействие), не влияет на величину и свойства персистентного тока бесспиновых фермионов при низких температурах [29]. Во вращательно-инвариантной системе, содержащей N_e заряженных частиц, поток магнитного поля «зацепляется» только за координаты центра инерции, в то время как взаимодействие электронов меняет только свойства «внутренних» координат. По этой причине для описанной идеальной ситуации персистентный ток совпадает с током свободных бесспиновых фермионов (1.5). В духе теоремы Кона [11] строгое доказательство этого утверждения приведено в работе [29].

Для частиц со спином кулоновское взаимодействие снимает статистическое вырождение энергетических уровней, и результирующий персистентный ток в кольце с заданным числом частиц меняется. Если кулоновская щель достаточно велика (порядка энергии квантования уровней), то реакция частиц со спином на АБ-поле становится идентичной реакции бесспиновых фермионов.

В дальнейшем в этом разделе мы будем считать взаимодействие (отталкивание) настолько сильным, что электроны в кольце формируют вигнеровский кристалл (ВК) [30]. Такая модель удобна для теоретического анализа и, как мы увидим ниже, дает, по существу, такие же предсказания для персистентного тока, как и модель Латтинджера.

Здесь уместно сказать несколько слов об одномерном ВК [31–33]. Известно, что в одном пространственном измерении инфракрасные особенности в квантовых флуктуациях настолько сильны, что разрушают дальний порядок даже при нулевой температуре [34]. Поэтому в строгом смысле ВК в цепочке электронов макроскопической длины отсутствует. Однако при низких плотностях $n << a_B^{-1}$, ($a_B^{-1} \equiv \hbar^2/2m$ — боровский радиус) размер упорядоченного кластера $L_c \propto a \exp(\mathrm{const}/na_B) >> a$ превосходит период вигнеровской решетки $a \equiv n^{-1}$ и для мезоскопических систем $a << L \lesssim L_c$ имеет смысл говорить о формировании состояния с неоднородной электронной плотностью, имитирующей ВК [35]. Более того, даже при $L \to \infty$ из-за исключительно медленного спада корреляций (медленнее, чем любая степень) можно говорить о формировании почти упорядоченного состояния [33]. Поскольку изучать динамику ВК оказывается значительно проще, чем систему из большого числа сильно коррелированных электронов, при анализе свойств квантовых колец мы будем неоднократно использовать представление о ВК.

Одномерный ВК можно представить как эластичную цепочку бесспиновых электронов [31,32]. В

такой модели он описывается четырьмя параметрами: периодом решетки a, массой m, зарядом частиц в узлах решетки e и скоростью звука s. В континуальном пределе лагранжиан $1D$ ВК в пиннингующем потенциале V_p, который предполагается плавным на масштабе периода кристалла a и локальным (точечным) на масштабах размера системы L имеет вид [32]

$$\tilde{L} = \frac{ma}{8\pi^2}\left\{\dot{\varphi}^2 - s^2(\varphi')^2\right\} - V_p\delta(x)\left(1 - \cos\varphi\right) - \\ - \frac{e^2}{8\pi}\int\int dxdx'\varphi'(x)\varphi'(x')\left[(x-x')^2 + d^2\right]^{1/2}, \tag{2.1}$$

где $\varphi(x, t) \equiv 2\pi u(x, t)/a$ — безразмерное (скалярное) поле, описывающее динамику кристалла ($u(x, t)$ — смещение кристалла в точке x в момент времени t); $\dot{\varphi} \equiv d\varphi/dt$, $\varphi' \equiv d\varphi/dx$; $\delta(x)$ — дельта-функция, и для простоты мы поместили пиннингующий потенциал в точку $x = 0$. Последнее слагаемое в (2.1) описывает эффекты дальнодействующего кулоновского взаимодействия (d — длина коротковолнового экранирования, которая в реальных ситуациях определяется шириной одномодового канала, $d \lesssim a$).

Рассмотрим реакцию ВК, образующего кольцо длиной L, на поток магнитного поля Ф, направленного перпендикулярно плоскости кольца. В этом случае в лагранжиане (2.1) появляется дополнительное слагаемое, описывающее эффект АБ [36],

$$\tilde{L}_{AB} = \left(\hbar\Phi/L\Phi_0\right)\dot{\varphi} \tag{2.2}$$

($\Phi_0 = hc/e$). Поскольку в (2.2) входит первая производная по времени от динамического поля, такое взаимодействие не меняет классических уравнений движения и сказывается только на квантовых свойствах системы.

Для расчета персистентного тока необходимо найти зависимость свободной энергии F кольца ВК от потока Ф. В общем виде для кольца, содержащего N_e бесспиновых электронов, свободная энергия может быть представлена в форме интеграла по путям:

$$F = -T\ln\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n(N_e-1)}\int D\varphi_n \exp\left(-\frac{S_E(\varphi_n)}{\hbar}\right), \tag{2.3}$$

где $S_E(\varphi_n)$ — евклидово (рассчитанное во мнимом времени τ) действие, соответствующее лагранжиану (2.1); $\varphi_n(x, \tau)$ — набор траекторий, удовлетворяющих «скрученным» граничным условиям (см. также [36а,36б]:

$$\varphi_n(\tau + \beta, x) = \varphi_n(\tau, x) + 2\pi n\,. \tag{2.4}$$

Здесь $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — целое число (гомотопический индекс), классифицирующее топологически неэквивалентные траектории; $\beta = T^{-1}$. Формула (2.3) содержит суммирование по всем гомотопическим классам с весом, учитывающим эффекты четности в кольце из N_e фермионов. Действительно, тождественная операция — сдвиг кристалла на расстояние, кратное периоду a, — должно отвечать изменению поля на $2\pi n$ ($\Delta\varphi = 2\pi n$) и $n(N_e - 1)$ последовательным перестановкам пар электронов в кольце. Последняя операция приводит к появлению знакопеременного множителя в уравнении (2.3).

Лагранжиан идеального ВК ($V_p = 0$) квадратичен по полям, и задача расчета свободной энергии может быть решена точно. Нас интересует только осциллирующая (зависящая от потока) часть свободной энергии (2.3). В этом случае экстремальные траектории, удовлетворяющие граничному условию (2.4), являются пространственно однородными линейными по мнимому времени τ функциями [36,20]:

$$\varphi_n(\tau, x) = 2\pi n\tau/\hbar\beta\,. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и выполняя суммирование по гомотопическому индексу n, находим

$$\Delta F(\Phi) = -T\ln\theta_3\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + \delta_{N_e},\ \exp\left(\frac{T}{T^*}\right)\right), \tag{2.6}$$

где $\theta_3(\theta, q)$ — тета-функция Якоби (см., например, [37]); $T^* \equiv 2\hbar v_F/\pi L$; $v_F \equiv \pi\hbar a/m$; коэффициент δ_{N_e} равен 0 (1/2) для нечетного (четного) числа электронов в кольце N_e. Дифференцируя (2.6) по потоку, находим интересующую нас формулу для персистентного тока идеального ВК

$$I_{WC}(\Phi) = \frac{2TI_0}{\pi T^*}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{kN_e}\frac{\sin\left(2\pi k\Phi/\Phi_0\right)}{\mathrm{sh}\left(kT/T^*\right)}. \tag{2.7}$$

Эта формула в точности совпадает с выражением для персистентного тока в латтинджеровской жидкости (ЛЖ) [15], если в определении температуры кроссовера T^* и амплитуды $I_0 = ev_F/L$ заменить фермиевскую скорость v_F на скорость зарядовых топологических возбуждений v_J (см. ниже).

При низких температурах $T < T^*$ выражение (2.7) переходит в (1.5) для персистентного тока идеального газа бесспиновых фермионов. Таким образом, мы продемонстрировали, что при нулевой температуре кулоновское взаимодействие не влияет на персистентный ток свободных бесспиновых фермионов. Температура кроссовера в (2.7) в два

раза больше, чем в формуле (1.10), что отвечает статистическому усреднению в каноническом ансамбле (фиксированное число частиц N_e). Однако, строго говоря, при конечных температурах персистентные токи в кольце невзаимодействующих электронов и в системе сильно коррелированных электронов должны различаться. Если для свободных частиц температура приводит только к изменению заселенности уровней энергии, то для сильно коррелированных электронных систем при $T \neq 0$ возникает конечная плотность термически возбужденных магнонов, которая приводит к дополнительному подавлению тока. Иными словами, при нулевой температуре персистентный ток ВК обеспечивается скольжением идеальной цепочки электронов вдоль кольца. При $T \neq 0$ кристалл становится термически деформированным и эффект АБ, связанный в конечном итоге с переносом заряда e вдоль замкнутого контура, сопровождается дополнительным перераспределением электронной плотности, что требует затрат энергии и приводит к эффективному экспоненциальному подавлению тока. Из приведенного рассуждения ясно, что это подавление должно зависеть от упругих свойств кристалла. В работе [38] показано, что для жесткого ВК ($\alpha \sim \hbar/msa << 1$) соответствующие поправки малы и в интервале температур $T^* \lesssim T \lesssim \varepsilon_F$ сводятся к аддитивной перенормировке показателя экспоненты в амплитуде осцилляций тока:

$$e^{(-T/T^*)} \to \exp\left\{-\frac{T}{T^*}\left[1 + K\alpha^3\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2\right]\right\}, \quad K \sim 1 . \tag{2.8}$$

Мы продемонстрировали отсутствие влияния электрон-электронных корреляций на свойства персистентного тока в баллистическом кольце для модели ВК, т.е. предполагая, что плотность электронов в кольце достаточно мала, $n << a_B^{-1}$. Сделанное утверждение можно распространить на электронные системы любой плотности, если описывать взаимодействующие электроны в кольце как латтинджеровскую жидкость.

Обычно под латтинджеровской жидкостью понимают длинноволновое континуальное описание систем сильно коррелированных электронов, когда корреляций не приводят к диэлектризации системы (появление щели в спектре заряженных возбуждений). В этом случае спектр электронов вблизи ферми-поверхности может быть линеаризован и в (1 + 1)-пространстве — времени задача сводится к безмассовым дираковским фермионам (дираковский спинор образуют «левые» и «правые» компоненты волновой функции электронов при $k \simeq \pm k_F$ со взаимодействием типа плотность—плотность (см., например, [10]).

Хорошо известно, что для релятивистской формы спектра исключительно удобным приемом, позволяющим в ряде случаев точно учесть взаимодействие полей, является метод бозонизации [39,40]. В бозонном представлении взаимодействие плотность—плотность приводит к квадратичному по полям гамильтониану, и задача становится тривиально точно решаемой. Поскольку метод бозонизации подробно описан в обзорной литературе (см., например, [41–43]), без вывода приведем лагранжиан $1D$ жидкости Латтинджера и обсудим специфику обобщения этого лагранжиана на конечные системы с квазипериодическими граничными условиями.

Для бесспиновых электронов лагранжиан жидкости Латтинджера в бозонной форме имеет вид

$$\tilde{L}_{LL} = \frac{K^*}{2}\left\{(v^*)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial t}\right)^2 - v^*\left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial x}\right)^2\right\}. \tag{2.9}$$

Здесь $\varphi_c(x, t)$ — бозонное (скалярное) поле, описывающее длинноволновую динамику сильно коррелированных электронов. Пространственная производная от этого поля определяет отклонение плотности заряда $\rho(x, t)$ в системе от средней плотности $n_F = p_F/\pi$ (p_F — фермиевский импульс):

$$\rho(x, t) = \pi^{-1/2}\partial_x\varphi_c , \tag{2.10}$$

где $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. Безразмерный параметр K^* и v^* (параметры Халдейна) исчерпывают набор параметров, характеризующих латтинджеровскую жидкость. В отсутствие взаимодействия $K^* = 1$, $v^* = v_F$ и лагранжиан (2.9) является бозонной формой лагранжиана свободных безмассовых дираковских фермионов. Электронные корреляции приводят к перенормировке указанных параметров. В частности, перенормированная фермиевская скорость равна $v_F^* = v^*/K^*$. Заметим, что иногда удобно (обычно в режиме слабой связи) использовать другую, альтернативную (2.9), запись лагранжиана латтинджеровской жидкости в терминах поля $\theta_c(x, t)$, дуального φ_c ($\partial_\mu\theta_c = \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi_c$, где $\varepsilon^{\mu\nu}$ — единичный антисимметричный тензор). Согласно приведенному равенству, пространственная производная поля $\theta_c(x, t)$ определяет ток фермионов. В терминах дуального поля θ_c лагранжиан латтинджеровской жидкости имеет вид

$$\tilde{L}_{LL} = \frac{g}{2}\left\{(v^*)^{-1}(\partial_t\theta_c)^2 - v^*(\partial_x\theta_c)^2\right\}, \tag{2.11}$$

где коэффициент $g = 1/K^*$. При наличии дальнодействующего кулоновского взаимодействия к

лагранжиану (2.9) добавляется слагаемое, аналогичное (2.1):

$$\tilde{L}_c = -\frac{e^2}{8\pi}\int\int dx dx' \partial_x \varphi_c(x)\partial_{x'}\varphi_c(x') \times$$

$$\times \left[(x-x')^2 + d^2\right]^{1/2}. \qquad (2.12)$$

Лагранжиан (2.9), (2.11) является универсальным в том смысле, что его форма не зависит от конкретной микроскопической модели (специфика модели «спрятана» в неуниверсальные значения параметров K^* и v^*). Поэтому все типы локальных взаимодействий, не разрушающих латтинджеровскую жидкость, в длинноволновом пределе являются либо несущественными (соответствующие константы взаимодействия стремятся к нулю), либо учитываются перенормировкой параметров Халдейна.

Поле $\varphi_c(x, t)$, появляющееся при бозонизации фермиевских полей, по построению является фазовым и топологическим (2.10). Поэтому на конечном интервале (как пространственном, так и во мнимом времени τ) оно удовлетворяет скрученным (квазипериодическим) граничным условиям. Это обстоятельство позволяет выделить из $\varphi_c(x, \tau)$ постоянную и линейную по координатам части (нулевые моды), которые при квантовании будут описывать так называемые топологические возбуждения [10]. Эти возбуждения определяют специфику длинноволновых свойств латтинджеровской жидкости, а в нашем случае именно они ответсвенны за АБ-осцилляции.

Стандартные правила бозонизации ($\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \propto \propto \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi_c$) позволяют легко описать вид АБ-взаимодействия в латтинджеровской жидкости. По существу, с точностью до нормировки бозонного поля это взаимодействие имеет тот же вид, что и в модели ВК (2.2). Здесь, однако, эффект четности удобно включить в форму АБ-взаимодействия. На примере свободных фермионов, а также в модели ВК мы видели, что добавление фермиона эквивалентно сдвигу персистентного тока (и любой другой термодинамической величины) на полпериода. Иными словами, дополнительный фермион вносит статистический поток $(\Phi_0/2)$, и этот эффект можно учесть непосредственно в АБ-взаимодействии скалярного поля $\varphi_c(x, t)$:

$$\tilde{L}_{AB} = \frac{2\hbar}{L}\pi^{1/2}\frac{d\varphi_c}{dt}\left\{\frac{k_J}{2} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right\}. \qquad (2.13)$$

Здесь $k_J = 0$ или 1 в зависимости от четности полного числа электронов в кольце. В ситуации, когда полное число частиц N_e задано (изолированные кольца), $r_J = 0$ для N_e нечетного и $r_J = 1$ для N_e четного. В этом случае даже при конечных температурах полный заряд надконденсатных частиц равен нулю и, согласно (2.10), нулевые моды в пространственном секторе отсутствуют. Бозонное поле $\varphi_c(x, \tau)$ «скручено» только по «координате» τ:

$$\varphi_c(x, \tau + \beta) = \varphi_c(x, \tau) + \pi^{1/2}n, \qquad (2.14)$$

и расчет персистентного тока с использованием (2.9)–(2.14) полностью аналогичен проведенному для ВК. При конечных температурах для тока мы имеем выражение (2.7), в котором в температуру кроссовера T^* и амплитуду I_0 входит перенормированная фермиевская скорость $v_F^* = v^*/K^*$.

Появление дополнительного статистического потока при бозонном описании фермионов имеет общий характер и может быть продемонстрировано различными методами. Например, используя преобразование Йордана—Вигнера, легко показать (см., например, [44]), что модель свободных фермионов в замкнутой цепочке с потоком Ф эквивалентна модели свободных бозонов (с твердой сердцевиной) при замене (mod 2π)

$$2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \to 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} + \pi(N-1),$$

где N — полное число частиц. Эта замена в точности отвечает эффективному потоку, входящему в (2.13). Приведенные рассуждения показывают, что для бозонов эффект четности отсутствует и они всегда диамагнитны, $E_0^{(b)}(\Phi) \geq E_0^{(b)}(0)$.

Если число частиц не сохраняется, то при конечных температурах появляется вклад дополнительного топологического сектора (пространственного), который связывается с потоком (2.13) посредством эффекта четности. Каждый раз, когда число частиц в кольце нечетное (четное) $k_J = 0$ (1), но теперь четность числа частиц зависит не только от четности числа конденсатных фермионов $N_e = [p_F L/\pi]$ ($[x]$ — целая часть x), но и от четности числа топологических возбуждений в пространственном секторе. Вводя для этой цели дополнительный индекс k_M, принимающий значения 0 или 1, обобщим граничное условие (2.14) на пространственное «скручивание»:

$$\varphi_c\left(x + L, \tau + \beta\right) =$$

$$= \varphi_c(x, \tau) + \pi^{1/2}n + \pi^{1/2}(2m + k_M), \qquad (2.15)$$

где $n, m \in \mathbf{Z}$. Легко проследить, что при данном числе «конденсатных» электронов N_e, топологические числа k_j, k_M должны удовлетворять правилу [15]

$$k_J = k_M, \quad N_e \text{ — нечетное;}$$

$$k_J = 1, k_M = 0; k_J = 0, k_M = 1, \quad N_e \text{ — четное.} \tag{2.16}$$

При вычислении зависящей от потока Ф части свободной энергии системы необходимо просуммировать по всем топологическим числам n, m, k_J, k_M с учетом ограничения (2.16). Результат (без учета дальнодействующего кулоновского взаимодействия (2.12)) сводится к сумме произведений тэта-функций Якоби [15]:

$$\Delta F(\Phi) = -\beta^{-1} \ln {\sum_{k_J, k_M}}' \exp\left(-\frac{\pi k_M K^* v^* \beta}{2L}\right) \times$$

$$\times \theta_3(z_J, q_J)\, \theta_3(z_M, q_M), \tag{2.17}$$

где

$$z_J = \pi\left(\frac{k_J}{2} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right); \quad q_J = \exp\left(-\frac{\pi K^* L}{2\beta v^*}\right);$$

$$z_M = \frac{i\pi k_M K^* v^* \beta}{L}; \quad q_M = \exp\left(-\frac{2\pi K^* v^* \beta}{L}\right). \tag{2.18}$$

Штрих над суммой в (2.17) означает учет ограничения (2.16).

При низких температурах $T << T^*$ вклад пространственных топологических возбуждений экспоненциально мал и мы снова воспроизводим формулу (2.7).

Таким образом, при низких температурах $T << T^*$ вне зависимости от характера термодинамического усреднения (фиксированное число частиц или фиксированный химический потенциал) персистентный ток сильно коррелированных электронов в баллистическом кольце совпадает по форме осцилляций и температурной зависимости с током свободных бесспиновых электронов. Эффект взаимодействия (отталкивания) сводится к перенормировке фермиевской скорости. Согласно общим теоремам [11], такая перенормировка отсутствует в галилеевоинвариантных системах. Однако для решеточных фермионов обсуждаемая перенормировка параметров имеет место и может, в частности, привести к появлению щели в спектре зарядовых возбуждений (т.е. к разрушению латтинджеровской жидкости). Для того чтобы определить зависимость амплитуды персистентного тока от величины взаимодействия, далее изучим точно решаемые решеточные модели в рамках подхода анзаца Бете.

В заключение этого раздела проанализируем осцилляции АБ в жидкости Латтинджера реальных электронов со спином 1/2. Известно, что при отталкивании в этом случае процедура бозонизации предсказывает полное разделение спина и заряда (см., например, обзор [45]). Иными словами, в длинноволновом пределе зарядовые и спиновые степени свободы полностью разделяются и в отсутствие примесей описываются независимыми гауссовыми моделями. Поскольку поток магнитного поля «зацепляется» только за зарядовые степени свободы, на первый взгляд может показаться, что персистентные токи в латтинджеровской жидкости (ЛЖ) реальных электронов (со спином) и бесспиновых фермионов одинаковы. В действительности, из-за эффектов четности, которые теперь связаны с четностью числа электронов с определенной проекцией спина («вверх» $N_\uparrow$ или «вниз» $N_\downarrow$), свойства АБ-осцилляций сильно коррелированных электронов изменяются.

Изучим предел нулевой температуры, когда зависимость энергии ЛЖ от потока имеет простой квадратичный вид. В случае отталкивания между электронами естественно предполагать, что основное состояние системы является макроскопически немагнитным. Тогда

$$N_\uparrow = N_\downarrow = N_e/2, \quad N_e \text{ — четное,} \tag{2.19}$$

$$N_\uparrow = (N_e \pm 1)/2, \; N_\downarrow = (N_e \mp 1)/2, \; N_e \text{—нечетное.}$$

Теперь мы имеем два сорта фермионов (со спином «вверх» и «вниз») и соответственно два типа бозонных полей $\varphi_{\uparrow,\downarrow}$. В терминах зарядовых ($c$) и спиновых ($s$) полей $\varphi_{c(s)} = (\varphi_\uparrow \pm \varphi_\downarrow)/2^{1/2}$ лагранжиан ЛЖ выглядит как сумма двух независимых лагранжианов (2.9) соответственно для зарядовой и спиновой подсистем, характеризующиеся своими параметрами Халдейна. Поток магнитного поля непосредственно взаимодействует только с φ_c, и это взаимодействие имеет вид (2.13), где теперь топологическое число k_J заменено на $(k_J^\uparrow + k_J^\downarrow)/2$ и целые числа k_J^s ($s = \uparrow, \downarrow$), описывающие топологические секторы в бозонном представлении, связаны с числом электронов с данной проекцией спина N_s правилом четности $(-1)^{N_s+1} = (-1)^{k_J^s}$. В терминах топологических зарядовых квантовых чисел k_J^s энергия ЛЖ при $T = 0$ имеет вид [10,46]

$$\Delta E(\Phi) = \frac{2\pi v_\rho}{L}\left(\frac{k_J^\uparrow + k_J^\downarrow}{4} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2\pi v_\sigma}{L}\left(\frac{k_J^\uparrow - k_J^\downarrow}{4}\right)^2, \tag{2.20}$$

где $v_{\rho(\sigma)}$ — скорости зарядовых (спиновых) возбуждений. Структура (2.20) физически очевидна,

так как эффект топологических чисел k_J эквивалентен появлению в зарядовом и спиновом секторах фиктивных потоков. При заданном внешнем потоке Ф и полном числе электронов в кольце топологические числа k_J^s должны находиться из условия минимума энергии.

Поскольку из общих теорем [47,48] следует, что энергия основного состояния в системе со взаимодействием, не нарушающим T-инвариантность, является четной функцией потока Ф и периодичной по потоку с периодом Φ_0, нам достаточно изучить зависимость $\Delta E(\Phi)$ при $0 \le \Phi \le \Phi_0/2$. Как и для невзаимодействующих частиц, характер АБ-осцилляций зависит от четности числа частиц в кольце.

1. При нечетном числе частиц в кольце сумма и разность зарядовых топологических квантовых чисел k_J^s, входящих в (2.20), согласно (2.19) и сформулированному выше правилу отбора, есть всегда нечетное число и поэтому минимальный (фиктивный) статистический поток в (2.20) в изучаемом интервале равен $\Phi_0/4$. Из этого факта следует важный вывод о том, что при нечетном N_e вне зависимости от соотношения между скоростями $v_{\rho,\sigma}$ энергия основного состояния (и, следовательно, персистентный ток) осциллирует с половинным периодом $\Phi_0/2$. При этом вблизи $\Phi \sim 0$ ток имеет парамагнитный характер. Перечисленные качественные свойства латтинджеровских колец с нечетным числом электронов совпадают со свойствами аналогичных колец невзаимодействующих электронов (см. разд. 1).

2. Для четного числа частиц N_e в кольце сумма $\sum_s k_J^s$ — всегда четное число и поэтому может быть приравнена нулю в окрестности $\Phi \sim 0$. Следовательно, в «четных» кольцах персистентный ток является диамагнитным. Точный период осцилляций этого тока совпадает с фундаментальным периодом Φ_0, но из (2.20) легко видеть, что из-за пересечения уровней в интервале $\Delta\Phi = \Phi_0$ появляется дополнительный минимум. Действительно, при $\Phi \sim \Phi_0/2$ системе взаимодействующих электронов энергетически выгодно перейти в состояние с фиктивным статистическим потоком:

$$\frac{1}{4}\sum_s k_J^s = -\Phi_0/2\,.$$

Нетрудно проверить, что при $v_\sigma \ll v_\rho$ (эта ситуация отвечает режиму сильной связи) пересечение уровней происходит при $\Phi = \Phi_0/4$, имитируя АБ-осцилляции с половинным периодом. Это уменьшение вдвое периода вызвано сильными корреляциями и отсутствует в модели свободных электронов.

При обратном неравенстве $v_\sigma \gg v_\rho$ (такая ситуация реализуется, например, вблизи перехода в соизмеримую фазу, т.е. вблизи точек разрушения ЛЖ) минимуму энергии (2.20) отвечает $k_J^{\uparrow} = k_J^{\downarrow}$ и характер АБ-осцилляций качественно меняется. Во-первых, пропадает пересечение уровней, и период осцилляций равен кванту потока Φ_0. Во-вторых, изменяется характер отклика системы на внешний поток. Если в кольцах с числом электронов $N_e = 4n + 2$ появление статистического потока энергетически невыгодно и поэтому ток остается диамагнитным, то для $N_e = 4n$ минимальный статистический поток $\Phi_f = -\Phi_0/2$ и диамагнитный отклик изменяется на парамагнитный. Иными словами, вблизи точек разрушения ЛЖ ведет себя подобно системе электронов со спином 1/2.

В разд. 4 мы увидим, что все перечисленные свойства персистентного тока в мезоскопических ($N_e \gg 1$) кольцах сохраняются в модели Хаббарда, которая дополнительно позволяет изучить зависимость амплитуды тока от константы взаимодействия, а также проанализировать ситуацию в микроскопических ($N_e \sim 1$) кольцах.

3. Персистентный ток пиннингованного вигнеровского кристалла

Резкое различие когерентных свойств свободных и сильно коррелированных электронов проявляется при нарушении трансляционной инвариантности, например, из-за наличия рассеивающих центров. Как было показано в разд. 1, для свободных частиц примесный потенциал не приводит к радикальным изменениям величины и (при конечных температурах) формы осцилляций персистентного тока. Даже количественно отличие от баллистического транспорта возникает только для сильных потенциалов, когда деформация спектра на уровне Ферми сравнивается с характерной энергией пространственного квантования $\Delta_0 \propto \propto \hbar v_F/L$. В этом случае уже при $T = 0$ форма осцилляций тока становится гармонической, а амплитуда осцилляций подавляется, сохраняя, однако, «металлическую» $1/L$-зависимость от размеров кольца (см. формулы (1.13), (1.14)). Важным свойством потенциального рассеяния в ферми-жидкости является тот факт, что степень подавления персистентного тока (определяемая модулем амплитуды прохождения через потенциальный барьер) неуниверсальна: она зависит от конкретного вида потенциала рассеяния.

Для сильно коррелированных систем мы имеем принципиально другой, универсальный (в длинно-

волновом пределе) характер отклика системы на внешний потенциал. Наиболее ярко этот эффект проявляется в задаче о туннелировании латтинджеровской жидкости [49]. В лагранжиане ЛЖ (для определенности будем говорить о выражении (2.11)) из двух входящих в него параметров наиболее важным является безразмерный параметр g, который определяет интенсивность квантовых флуктуаций в ЛЖ. Для галилеевоинвариантных систем его легко связать с коэффициентом сжимаемости κ [50]:

$$g = \pi\hbar \left(n\kappa/m\right)^{1/2}, \quad \kappa = \partial n/\partial\mu \qquad (3.1)$$

(μ — химический потенциал, n — плотность частиц). Приведенное равенство становится почти очевидным, если выражение (2.11) трактовать как феноменологический лагранжиан одномерной упругой среды (см., например, [51]).

Согласно (3.1), для невзаимодействующих фермионов $g = 1$; для случая отталкивания (притяжения) $g < 1$ ($g > 0$). Рассматриваемый параметр определяет степень уменьшения всех корреляционных функций в ЛЖ и может быть интерпретирован, например, как безразмерный кондактанс [27]

$$G = e^2 g/2\pi\hbar . \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) обобщает известное соотношение Ландауэра ($G = e^2/2\pi\hbar$) для баллистического транспорта в одномодовом канале на взаимодействующие одномерные фермионы.

Рассматривая задачу о поведении точечной (немагнитной) примеси в ЛЖ, Кэйн и Фишер доказали утверждение, что в термодинамическом пределе ($L \to \infty$) при нулевой температуре вне зависимости от величины (а также, по существу, и формы) примесного потенциала, безразмерный кондактанс ЛЖ равен нулю для случая отталкивания ($g < 1$) и g для случая притяжения ($g > 1$). При конечных температурах кондактанс всегда отличен от нуля и при $g < 1$ является степенной функцией температуры $G \propto T^{2/(g-2)}$ [49,52]. Иными словами, туннелирование в ЛЖ, в отличие от ферми-жидкости, носит универсальный характер. Коэффициент прохождения через потенциальный барьер не зависит ни от формы, ни от величины барьера и при низких температурах определяется только характером взаимодействия (отталкивание или притяжение) в объеме ЛЖ.

Для бесспиновых фермионов с отталкивательным взаимодействием модели ВК и ЛЖ дают, по существу, одни и те же физические результаты (см., например, [32,49]). Модель ВК представляется более удобной с точки зрения физической интуиции и поэтому, изучая влияние примесей на персистентный ток в одномерной сильно коррелированной системе электронов, в этом разделе в качестве исходного лагранжиана используем выражение (2.1). В рамках этой модели дадим простую физическую интерпретацию теоремы Кэйна—Фишера (см. также [32]) и обобщим указанные результаты на конечные системы с квантованным спектром.

Итак, нашей задачей является расчет зависящей от потока Ф части энергии основного состояния ВК в кольце, содержащем примесь (2.1). Потенциал примеси пиннингует ВК, и персистентный ток в кольце становится туннельным. Можно ожидать, что персистентный ток пиннингованного ВК будет значительно подавлен по сравнению с аналогичным током в ферми-газе, поскольку в туннельном процессе принимает участие не отдельный электрон, а скоррелированная система электронов (макроскопическое квантовое туннелирование).

Процесс макроскопического квантового туннелирования ВК в цепочке конечной длины может быть как однородным, так и неоднородным, в зависимости от силы пиннинга. Физически очевидно, что в цепочке, состоящей из N_e частиц, расположенных в узлах кристалла, минимальный проигрыш в энергии при неоднородной деформации равен $\delta E_m \propto ms^2/N_e$ (s — скорость звука в ВК; энергия ms^2 по порядку величины равна температуре плавления вигнеровской решетки). Поэтому для слабого потенциала $V_p < \delta E_m$ туннельный депиннинг будет осуществляться за счет однородных смещений вигнеровской цепочки. Соответствующее туннельное действие можно легко оценить, рассматривая ВК как эффективную «частицу» массой mN_e, туннелирующую через однородный потенциальный барьер высотой V_p на расстояние, равное периоду кристалла a (напомним, что при формулировке модели (2.1) потенциал $V_p(x)$ предполагался плавным на этом масштабе):

$$S_t \simeq a\left(2mN_eV_p\right)^{1/2}. \qquad (3.3)$$

Описываемый элементарный процесс — туннельный поворот кольца на расстояние a — на языке квазиклассических траекторий в функциональном интеграле может быть представлен как единичный инстантон (или антиинстантон)

$$\varphi_{\pm}(x, \tau) = \pm 2\pi\tau/\tau_0 . \qquad (3.4)$$

«Время» туннелирования τ_0 находится из условия минимума евклидова действия на траектории (3.4) и равно $\tau_0 = a(mN_e/2V_p)^{1/2}$. Легко проверить, что действие на одноинстантонной траектории (3.4) в точности совпадает с (3.3). Для слабого пиннинга, развивая теорию возмущений по малому параметру $V_p/\delta E_m$, можно строго обосновать выбор траек-

тории (3.4) и построить последовательную процедуру расчета туннельного действия [38].

При низких температурах ($T\tau_0 << \hbar$) различные туннельные повороты являются независимыми. Поэтому, считая действие (3.3) квазиклассическим $S_t/\hbar >> 1$ (что отвечает выполнению неравенства $V_p >> \Delta_0 = \hbar v_F/L$), при расчете энергии основного состояния кольца ВК воспользуемся известным приближением разреженного газа инстантонов (см., например, монографию [42]). При наличии потока Ф, играющего роль θ-вакуума в инстантонном подходе [20], соответствующее выражение для туннельного сдвига энергии основного состояния равно [38]

$$\Delta E_0(\theta) \propto \Delta_0 \left(\frac{S_t}{\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{S_t}{\hbar}\right)\left(1-\cos\theta\right). \quad (3.5)$$

Здесь $\theta \equiv 2\pi((\Phi/\Phi_0) + \delta_{N_e})$, где коэффициент δ_{N_e}, равный 0 (1/2) при N_e нечетном (четном), учитывает эффект четности. Из (3.5) для персистентного тока ВК при умеренно сильном пиннинге $\Delta_0 \le V_p < \delta E_m$ находим

$$I_{WC}(\Phi) \propto (-1)^{N_e} I_0\left(V_p/\Delta_0\right)^{1/4} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{2\pi V_p}{\Delta_0}\right)^{1/2} \sin\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.6) с (1.13), видим, что для ВК наличие примеси радикально меняет свойства персистентного тока. А именно, появляется сильная чувствительность к размерам системы. Закон $1/L$, характерный для бесщелевого спектра, заменяется на $L^{-3/4}\exp(-L/l_p)^{1/2}$. Однако эта зависимость перестает быть справедливой для длинных цепочек, когда макроскопическое квантовое туннелирование ВК становится неоднородным.

В условиях сильного пиннинга $V_p >> \delta E_m$ (это неравенство удобно переписать в виде $\alpha V_p >> \Delta_s$, где $\Delta_s = \hbar s/L$, $\alpha \equiv \pi\hbar/msa$ — параметр, определяющий интенсивность квантовых флуктуаций в ВК) процесс туннелирования ВК можно условно разбить на две стадии:

1) «быстрое» изменение поля $\delta\varphi = \pm 2\pi$ в окрестности $[-l_0/2, l_0/2]$, содержащей примесь (что отвечает туннелированию сегмента $a << l_0 << L$ кольца ВК);

2) медленная релаксация неоднородного состояния, возникшего на первой стадии, за счет расплывания пакета плазмонных мод.

Такой процесс квантового депиннинга впервые рассматривался Ларкиным и Ли [53] применительно к туннельному транспорту волны зарядовой плотности. В работе [32] этот механизм был использован для описания квантового транспорта в ВК.

Минимальная длина $l_0 = a\alpha V_p/\Delta_s$ туннелирующего сегмента находится из условия минимума полного действия. Для сильного пиннинга ($\alpha V_p >> \Delta_s$) основной вклад в туннельное действие вносит стадия «релаксации» [53,32], которая описывается свободным уравнением движения для поля $\varphi(x, \tau)$ (в мнимом времени)

$$\ddot{\varphi} + s^2\varphi'' = 0. \quad (3.7)$$

Искомое инстантонное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi_{\pm}(\tau+\beta, x) - \varphi_{\mp}(\tau+\beta, x) = \pm 2\pi;$$
$$\varphi_{\pm}(\tau, L/2) = \varphi_{\pm}(\tau, -L/2), \quad (3.8)$$

при $T = 0$ имеет вид [53]

$$\varphi_{\pm}(x, \tau; \tau_s) = \pi \pm 2\operatorname{arctg}\left[\frac{(\tau-\tau_s)s}{|x|}\right], \quad (3.9)$$

где τ_s — произвольный параметр, определяющий «центр» инстантона. В работах [36,38] инстантон Ларкина—Ли (3.9) был обобщен на случай конечных температур:

$$\varphi_{\pm}(x, \tau; \beta) =$$

$$= \pi \pm 2\operatorname{arctg}\left\{\operatorname{cth}\frac{\pi|x|}{\hbar s\beta}\operatorname{tg}\left[\pi\frac{\tau-(\hbar\beta/2)}{\hbar\beta}\right]\right\}. \quad (3.10)$$

Решение (3.10) переходит в выражение (3.9) при низких температурах, а в области высоких температур ($\beta \to 0$) описывает однородное скольжение ВК.

Действие на туннельной траектории (3.10) равно [38]

$$S_t(\tau) = \frac{\hbar}{\alpha}\left\{C_1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{C_2\alpha V_p}{2\pi T}\right)\operatorname{Arch}\left(\frac{1}{2}+\frac{C_2\alpha V_p}{2\pi T}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi T}{2\Delta_s} + \ln\left[\operatorname{sh}\frac{\pi T}{\Delta_s}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{C_2\alpha V_p}{2\pi T}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{C_2\alpha V_p}{2\pi T}-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \quad (3.11)$$

Здесь $C_1 \propto C_2 \propto 1$ — численные константы, конкретное значение которых зависит от выбора пробной функции, описывающей первую стадию, макроскопического квантового туннелирования ВК («скачок» поля $\Delta\varphi_{\pm} = \pm 2\pi$ на примеси). Ниже мы увидим, что свойства персистентного тока жесткого ВК ($\alpha << 1$) при температурах $T << \alpha V_p$ практи-

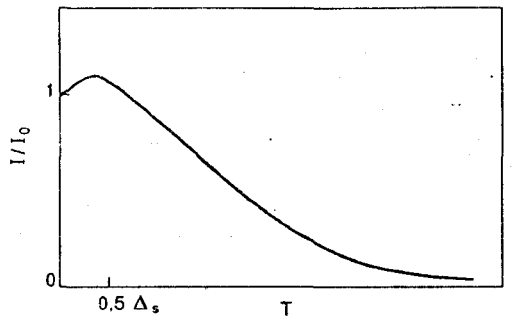

Рис. 3. Зависимость амплитуды персистентного тока вигнеровского кристалла с примесями от температуры.

чески не зависят от значений этих (контролируемых используемым приближением) констант.

Рассмотрим вначале АБ-осцилляции в кольце ВК при нулевой температуре. В этом случае одноинстантонное действие (3.11) принимает простой вид:

$$S_p = \frac{\hbar}{\alpha} \ln \frac{\alpha V_p}{\Delta_s}, \quad \alpha V_p >> \Delta_s \equiv \frac{\hbar s}{L}. \qquad (3.12)$$

Отметим логарифмический рост действия при увеличении размеров системы L. Это обстоятельство приводит к утверждению об отсутствии при $T = 0$ тока макроскопической вигнеровской цепочки через примесь, что согласуется с аналогичным результатом Кэйна—Фишера для ЛЖ.

Для кольца мезоскопического размера, рассчитывая энергию основного состояния в приближении разреженного газа инстантонов (что оправдано для жесткого ВК, $\alpha << 1$), для персистентного тока находим [38]

$$I_{WC}(\Phi, T = 0) \propto (-1)^N e I_s \left(\frac{\Delta_s}{\alpha V_p}\right)^{1/\alpha} \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad \alpha << 1, \qquad (3.13)$$

где $I_s \equiv es/L$. Формула (3.13), как и (3.6), предсказывает сильную зависимость тока от размеров кольца. В изучаемом случае длинных колец $I \propto \propto L^{-1/\alpha}$. Такой режим осцилляций является промежуточным между осцилляциями АБ в металлах и в диэлектриках (1.9). Формула для персистентного тока, аналогичная (3.13), получена и в модели ЛЖ бесспиновых электронов [26].

Перейдем теперь к изучению температурной зависимости персистентного тока ВК. Можно показать [38], что при слабом пиннинге $\alpha V_p << \Delta_s$ амплитуда тока практически не зависит от температуры кроссовера, которая, однако, при $V_p >> \Delta_0$ сдвигается в сторону более высоких температур $T^* \propto (\Delta_0 V_p)^{1/2}$ по сравнению со случаем непиннингованного кристалла. Существенной особенностью режима сильного пиннинга является предсказание аномальной температурной зависимости эффекта [36].

На рис. 3 приведена температурная зависимость амплитуды персистентного тока (в относительных единицах). График наглядно демонстрирует появление максимума в амплитуде тока при температуре $T_m \sim 0{,}5\Delta_s$. Форма зависимости $I(T)$ в области максимума становится более острой при уменьшении коэффициента α (заметим, однако, что при этом абсолютная величина тока быстро падает).

Физическую причину аномального температурного хода персистентного тока пиннингованного ВК легко понять из следующих простых рассуждений. Мы видели, что влияние температуры на АБ-осцилляции в идеальном ВК (как и для свободных фермионов) всегда деструктивно. Эта тенденция к разрушению фазовой когерентности с ростом температуры остается и при наличии потенциала пиннинга. Теперь, однако, персистентный ток обусловлен процессом макроскопического квантового туннелирования кольца ВК, а вероятность туннелирования, как известно, увеличивается с ростом температуры. Конкуренция указанных двух механизмов и приводит к появлению максимума на кривой зависимости $I(T)$. Формально в низкотемпературной области рост персистентного тока имеет место и при слабом пиннинге, но в этом случае относительное увеличение амплитуды тока мало и не зависит от упругих свойств кристалла. При неоднородном туннелировании форма пика является функцией параметра α, и для жесткого кристалла ($\alpha << 1$) эффект становится ярко выраженным.

До сих пор, изучая персистентный ток пиннингованного ВК, мы не учитывали влияние дальнодействующего кулоновского взаимодействия (последнее слагаемое в лагранжиане (2.1)). Такой подход может быть оправдан в ситуации, когда вблизи одномерного кольца помещены массивные металлические электроды, экранирующие кулоновское взаимодействие на расстояниях бо́льших величины зазора между кольцом и электродом. В реальных экспериментах с полупроводниковыми кольцами [7] всегда существуют массивные металлические электроды (гейты) и вопрос сводится к эффективности экранировки (т.е. к соотношению между размерами кольца и зазора). В принципе это соотношение может быть регулируемым параметром, и вполне реальна ситуация, когда кулоновское взаимодействие на расстояниях, сравнимых с размерами кольца L, еще не экранируется. Ниже мы изучим влияние неэкранированного кулоновского взаимодействия на макроскопическкое квантовое туннелирование в ВК.

Ясно, что это влияние имеет место только при неоднородном ($\varphi' \neq 0$) туннелировании, т.е. в ре-

жиме сильного пиннинга. Мы видели, что в этом случае основной вклад в туннельное действие вносит стадия «упругой релаксации», описывающая «расплывание» (в мнимом времени) волнового пакета плазмонов. Найдем вначале спектр плазмонов $\omega(k)$ («звука» в ВК) при наличии дальнодействующего кулоновского взаимодействия в идеальной цепочке. Такая (линейная) задача решается элементарно (см., например, [33]) с помощью обычного приема — перехода к фурье-компонентам поля:

$$\omega(k) = sk\left\{1 + \frac{2e^2}{mas^2}K_0(kd)\right\}^{1/2}_{kd>>1} \simeq s_0 k \ln^{1/2}\frac{l}{kd}. \tag{3.14}$$

Здесь $K_0(x)$ — функция Макдональда, $s_0^2 \equiv 2e^2/ma$.

Основное влияние дальнодействующих кулоновских сил на квантовые эффекты связано с модификацией спектра длинноволновых ($kd >> 1$) плазмонов. Это обстоятельство позволяет легко модифицировать теорию туннелирования в ВК для неэкранированного кулоновского взаимодействия. Инстантон, описывающий стадию туннельной релаксации, теперь удовлетворяет уравнению (ср. с выражением (3.7))

$$\ddot{\varphi} + s^2\varphi'' + \frac{e^2}{ma}\partial_x \times$$

$$\times \int_{-L/2}^{L/2} dy\, \partial_y\varphi(y;\tau)\left[(x-y)^2 + d^2\right]^{-1/2} = 0. \tag{3.15}$$

Анализ (3.15) показывает [54], что искомая туннельная траектория, являющаяся приближенным решением уравнения (3.15) при $|x| >> d$, описывается деформированным инстантоном Ларкина—Ли (3.9). Деформация сводится к замене скорости плазмонов s в формуле (3.9) на плавную функцию $s(x) = s_0 \ln^{1/2}(|x|/d)$. Это приводит к существенной модификации туннельного действия [54,55]

$$S_t^{(c)} = \frac{2\hbar}{3\alpha_0}\left\{\ln^{3/2}\frac{L}{d} - \ln^{3/2}\frac{l_0}{d}\right\}, \tag{3.16}$$

где $\alpha_0 \equiv \pi\hbar/mas_0$, $l_0 \equiv a\alpha_0 V_p/\Delta_s$, и персистентного тока [54]

$$I_{WC}^{(c)} \propto (-1)^{N_e} I_s \left(V_c/V_p\right)^{\ln^{1/2}N_e/\alpha_0} \sin\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \tag{3.17}$$

Здесь $I_s = es_0/L$; $V_c \equiv e^2/L << V_p$ (условие сильного пиннинга).

Согласно (3.17), неэкранированное кулоновское взаимодействие, увеличивая эффективную жесткость ВК

$$\alpha \to \alpha_0/\ln^{1/2}N_e, \tag{3.18}$$

дополнительно подавляет амплитуду персистентного тока при $T = 0$. При конечных температурах аномальный ход зависимости становится более выраженным, а максимум тока сдвигается в сторону более высоких температур $T_m \propto \Delta_s \ln^{1/2}N_e$.

4. Эффект Ааронова—Бома в модели Хаббарда

В предыдущих разделах мы видели, что в галилеевоинвариантных системах даже сильное взаимодействие (отталкивание) частиц не изменяет амплитуду и период АБ-осцилляций, рассчитанные в модели свободных фермионов. Для решеточных фермионов трансляционная инвариантность нарушена и учет взаимодействия может привести к существенным изменениям свойств персистентного тока.

В этом разделе мы изучим в решеточных моделях АБ-осцилляции в идеальной (без примесей) замкнутой цепочке. Нас будет интересовать вопрос, как характеристики осцилляций зависят от констант взаимодействия и индекса заполнения $\nu = N/N_a$ (N_a — число узлов цепочки) в широкой области изменения этих параметров. Такую задачу разумно ставить для точно решаемых моделей, когда имеется принципиальная возможность получить явные аналитические формулы для интересующих нас величин. Обсудим несколько моделей сильно коррелированных электронов (модель Гейзенберга—Изинга, модель Хаббарда, t–J-модель), главное внимание уделив модели Хаббарда.

Все эти модели решаются методом анзаца Бете, или квантовым методом обратной задачи рассеяния (см., например, [56]), и поэтому возникает вопрос, применим ли квантовый метод обратной задачи рассеяния для квазипериодических граничных условий? Другими словами, не нарушает ли топологическое взаимодействие с внешним потоком критерии точной разрешимости модели (например, факторизации многочастичных амплитуд рассеяния)? Так как ответ на этот вопрос утвердительный (квантовый метод обратной задачи по-прежнему позволяет находить собственные функции и значения гамильтониана и при наличии топологических фаз [57–59]), а доказательство этого важного факта скорее относится к описанию метода анзаца Бете, чем к физике персистентных токов, мы его выносим в Приложение 1.

Здесь же мы изучим эффект АБ в модели Хаббарда исходя непосредственно из уравнений анзаца Бете [60], модификация которых при наличии

взаимодействия с потоком магнитного поля физически вполне очевидна (см. ниже).

Модель Хаббарда [61] первоначально была предложена для описания проводящих магнитных систем, в которых электроны одной и той же зоны (электроны проводимости) одновременно определяют как электрические, так и магнитные свойства проводника. Взаимодействие между электронами в модели Хаббарда предполагается ультралокальным — в виде отталкивания электронов на узле. Такой выбор взаимодействия естественно относить к ситуации (узкозонные металлы), когда волновые функции электронов почти локализованы, т.е. имеют форму не функций Блоха, а функций Ваннье.

Гамильтониан одномерной модели Хаббарда при наличии независящего от проекции спина электрона σ топологического взаимодействия, описываемого пайерлсовским фазовым множителем $\exp(i\Phi/N_a)$ в интеграле перескока, имеет вид ($\Phi \equiv \Phi/\Phi_0$) [58]

$$H = -t\sum_{k,\sigma}\left(e^{i\Phi/N_a}\, c^{+}_{k,\sigma}\, c_{k+1;\sigma} + \text{э.с.}\right) + \\ + U\sum_{k} n_{k,\uparrow}\, n_{k,\downarrow}\,, \qquad (4.1)$$

где $c^{+}_{k,\sigma}$ ($c_{k,\sigma}$) — оператор рождения (уничтожения) электрона с проекцией спина $\sigma = \uparrow, \downarrow$ в узле с номером $k = 1, 2, 3, \ldots, N_a$; $n_{k,\sigma} = c^{+}_{k,\sigma}\, c_{k,\sigma}$ — оператор плотности электронов; t — амплитуда интеграла перескока; U — константа взаимодействия электронов на узле, которая может быть как положительной (отталкивание), так и отрицательной (притяжение). Поскольку фазовый множитель в (4.1) не зависит от номера узла, рассматриваемое топологическое взаимодействие с помощью калибровочного преобразования (фазового вращения) фермионных операторов может быть убрано из гамильтониана в (скрученные) граничные условия.

Уравнения анзаца Бете для гамильтониана (4.1) имеют вид [58, 59] ($V = U/4$, M — число частиц со спином «вниз»)

$$N_a k_n = 2\pi\left(I_n + \frac{\Phi}{2\pi}\right) - 2\sum_{\alpha=1}^{M}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin k_n - \Lambda_\alpha}{V}\right), \qquad (4.2)$$

$$-2\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin k_n - \Lambda_\alpha}{V}\right) = \\ = 2\pi J_\alpha + 2\sum_{\beta=1}^{M}\operatorname{arctg}\left(\frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta}{2V}\right). \qquad (4.3)$$

Здесь $\{k_n\}$ — набор квазиимпульсов, через которые энергия и импульс системы, состоящей из N решеточных фермионов, выражаются следующим образом:

$$E = -2t\sum_{n=1}^{N}\cos k_n\,; \quad P = \sum_{n=1}^{N} k_n\,. \qquad (4.4)$$

$\{\Lambda_\alpha\}$ — набор быстрот в спиновой подсистеме. Числа в зарядовом (I_n) и в спиновом (J_α) секторах принимают целые либо полуцелые значения: $\{I_n = 1, \ldots, N\}$ — целые (полуцелые) при M четном (нечетном); $\{J_\alpha = 1, \ldots, M\}$ — целые (полуцелые) при $(N-M)$ нечетном (четном). Их набор при заданном (N, M) полностью характеризует состояние системы. Для основного состояния (которое в дальнейшем только и будет нас интересовать) в отсутствие потока этот набор составляют целые (полуцелые) числа (без пропусков), симметричные относительно нуля.

Уравнения (4.2) есть условия квантования безразмерного импульса взаимодействующих N частиц на кольце длиной $L = N_a a$. В условиях опыта АБ-сдвиг зарядовых чисел в (4.3) $I_n \to I_n + \Phi/\Phi_0$ полностью аналогичен сдвигу орбитальных чисел в спектре свободных электронов (1.2).

Нашей задачей в этом разделе является расчет зависящей от потока Ф энергии основного состояния кольца хаббардовских электронов. Прежде всего заметим, что, поскольку числа $\{I_n\}$ для основного состояния образуют полный (без пропусков) набор целых (или полуцелых) чисел на конечном отрезке длиной L, изменение потока Ф на квант потока Φ_0 сдвигает этот набор на один шаг вправо или влево $I_n \to I_n \pm 1$. Для невзаимодействующих частиц такой сдвиг переводит уровни энергии в самих себя и энергия основного состояния, естественно, не изменяется, как и должно быть из требования калибровочной инвариантности. Это общее требование остается справедливым и при наличии взаимодействия, поэтому Φ_0-периодичность должна обеспечиваться кроссовером.

Для общего случая произвольных констант взаимодействия и произвольного индекса заполнения фундаментальный период $\Phi_0 = hc/e$ является единственным точным периодом осцилляций. Однако, в отличие от невзаимодействующих фермионов, нельзя заранее исключить ситуацию, когда при определенных константах взаимодействия в системе появляются дробные периоды Φ_0/k (k — целое число). Например, для случая притяжения ($U < 0$) из физических соображений следует ожидать появления половинного (сверхпроводящего) периода $\Phi_0/2$, что подтверждается строгим расчетом [62].

В модели Хаббарда с отталкиванием особая ситуация возникает при $U = \infty$. В этом случае период АБ-осцилляций в кольце из N_a узлов, содержащем N электронов, при $N \neq N_a$, $2N_a$ равен $\Phi_N = \Phi_0/N$ [63] (при половинном и полном заполнении АБ-осцилляции пропадают). Покажем, что дробление периода связано с несиловым (топологическим) влиянием спиновой подсистемы на зарядовую.

Хорошо известно утверждение [64], что при $U = \infty$ зарядовый сектор модели Хаббарда ($\nu \neq 1$) эквивалентен модели бесспиновых свободных решеточных фермионов. Однако и в этом пределе остается топологическая связь спиновой подсистемы и зарядовой, изменяющая взаимодействие бесспиновых фермионов с потоком магнитного поля. Отсутствие полного разделения спина и заряда легко заметить, изучая низколежащие зарядовые возбуждения, спектр которых для рассматриваемого случая имеет вид $\varepsilon(k) = -2t \cos(k/N)$ [65]. Эта мода включает как зарядовые, так и спиновые степени свободы и именно она определяет микроскопические АБ-осцилляции. В пределе $U \to \infty$ трансцендентные уравнения (4.2), (4.3) решаются элементарно:

$$k_j = \frac{2\pi}{N_a}\left[I_j + \frac{\Phi}{\Phi_0} + N^{-1}\sum_{\alpha=1}^{M} J_\alpha\right], \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.5}$$

и совпадают с условием квантования импульса бесспиновых фермионов, находящихся в эффективном потоке

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi + \Phi_0 N^{-1}\sum_{\alpha=1}^{M} J_\alpha . \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) в (4.4) и суммируя по квантовым числам I_j, которые являются симметричными относительно нуля целыми либо полуцелыми числами (для энергии основного состояния), легко находим [66,67]

$$E_0(\Phi) = -2t \sin\frac{\pi N}{N_a}\sin^{-1}\frac{\pi}{N_a}\cos\left[2\pi\left(\frac{\Phi_{\text{eff}}}{\Phi_0} + \delta_c\right)\right]. \tag{4.7}$$

Здесь $\delta_c = (I_{\max} + I_{\min})/2$ — коэффициент, принимающий значения 0 либо 1/2 (mod 1); $I_{\max(\min)}$ — максимальное (минимальное) зарядовое квантовое число для занятых электронами состояний; δ_c играет ту же роль, что и аналогичный коэффициент в выражениях (1.14), (2.6), вводя статистический поток $\Phi_0/2$, учитывающий эффект четности. Поскольку первоначальные (хаббардовские) электроны обладали спином, правило «четности» формулируется следующим образом: $\delta_c = 1/2$ для $N = 4n, 4n + 3$ и $\delta_c = 0$ для $N = 4n + 2, 4n + 1$ (n — целое число). Иными словами, теперь появление статистического потока $\Phi_0/2$ связано с изменением числа электронов в кольце на два.

При половинном заполнении $N = N_a$ выражение (4.7) тождественно обращается в нуль. В этом случае мы имеем моттовскую (диэлектрическую) фазу. При $U \to \infty$ щель в спектре заряженных возбуждений также неограниченно растет и поэтому эффект АБ отсутствует. При конечных U АБ-осцилляции в мезоскопическом моттовском диэлектрике будут рассмотрены в следующем разделе.

Вне половинного заполнения даже для бесконечного отталкивания внешний поток индуцирует в хаббардовском кольце конечный ток. Найдем период осцилляций этого персистентного тока. Сумма спиновых чисел $\{J_\alpha\}$ в определении эффективного потока (4.6) в пределе $U \to \infty$ ничем не фиксирована, и при каждом внешнем потоке Φ должна находиться из условия минимума энергии (4.7). Поскольку эта сумма является дискретной величиной (целое число), полная компенсация возможна только при изменениях потока кратных Φ_0/N. Поэтому период осцилляций (получивших название микроскопических) становится дробным, $\Phi_N = hc/Ne$ [63,66].

Микроскопические осцилляции связаны, как видно из выражения (4.6), с перестройкой спиновой подсистемы. Индуцированный потоком сдвиг квазиимпульсов частично компенсируется изменением импульса (и магнитного момента) спинонного конденсата. При $U = \infty$ такое возбуждение спиновой подсистемы не требует затрат энергии и дробный период Φ_0/N является точным периодом АБ-осцилляций. При конечном, но сильном отталкивании, $t \ll U$, на рождение спинонов требуется конечная энергия (порядка $\nu t^2/U$) и, хотя точная дробная периодичность пропадает, персистентный ток продолжает осциллировать с квазипериодом Φ_0/N. В работе [66] было показано, что минимальный (с точки зрения затрат энергии) механизм «намагничивания» спиновой подсистемы связан с возбуждением дырки в спинонном конденсате («пропуск» в наборе спиновых чисел J_α, так называемый спинон). Спиноны несут спин 1/2, но вследствие топологии рождаются парами [68], связываясь в триплет — спиновую волну де Клуазо—Пирсона [69] (мы не будем касаться синглета и мультиплетов высших порядков). Поскольку элементарное возбуждение несет спин 1, Φ_0/N-осцилляции сопровождаются переходом вакуума модели для четного числа частиц в триплетное киральное состояние. Заметим, что аналогичный механизм объясняет

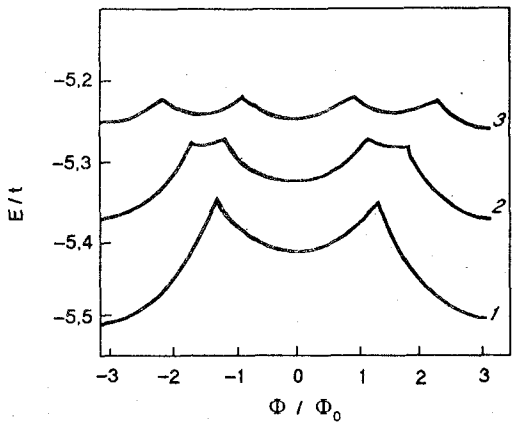

Рис. 4. Зависимость энергии основного состояния хаббардовской цепочки из 8 узлов с двумя электронами со спином вверх и двумя со спином вниз от потока магнитного поля: $U/t = 20$ (*1*); 40 (*2*); 200 (*3*) по работе [66].

физическую причину триплетности основного состояния хаббардовской цепочки вне половинного заполнения с числом электронов $N = 4n$ (n — целое число). В этом случае частичная спиновая поляризация ($S_z = 1$) оказывается энергетически выгодной, так как компенсирует статистический поток $\Phi_0/2$ [66].

Здесь уместно сделать небольшое замечание, касающееся термодинамического мезоскопического предела ($N >> 1$, $M >> 1$) $U = \infty$ модели Хаббарда. В этом случае импульс спинонного конденсата можно считать непрерывной переменной, которая находится из условия минимума энергии (4.7). Поэтому индуцированный в спинонном конденсате фиктивный поток будет полностью компенсировать внешний поток магнитного поля и мезоскопические АБ-осцилляции в такой модели отсутствуют [70]. Описанный механизм взаимодействия зарядовой и спиновой подсистем во многом аналогичен калибровочной связи спинонов и холонов, постулируемой в $2D$ калибровочных моделях высокотемпературной сверхпроводимости (см., например, [71]). Особенности осцилляций Литтла—Паркса [5] в таких моделях рассматривались в работе [72].

Формула (4.7) предсказывает также, что в металлической фазе ($\nu \neq 1$) вблизи половинного заполнения амплитуда осцилляций стремится к нулю при $\nu \to 1$ по линейному закону. Ниже мы увидим, что это важное свойство является общей чертой АБ-осцилляций вблизи фазового перехода металл—диэлектрик.

Численный анализ показывает [67], что при увеличении параметра Nt/U микроскопические осцилляции пропадают и в мезоскопических кольцах (где обычно $Nt/U >> 1$) в общей ситуации выживают осцилляции только с фундаментальным периодом Φ_0 (см. рис. 4). Но и в этом случае из-за кроссовера, вообще говоря, возможна ситуация (см. ниже), когда период осцилляций уменьшается вдвое.

В термодинамическом пределе суммы в уравнениях анзаца Бете заменяются на интегралы и уравнения (4.2), (4.3) переходят в интегральные, которые могут быть аналитически решены в пределе сильного и слабого взаимодействий. Для мезоскопических систем простая замена сумм интегралами недостаточна и для достижения требуемой точности (в нашем случае N_a^{-2}) необходимо, используя формулу Эйлера—Маклорена, учитывать поправки. Такой метод расчета ($1/L$-разложение) энергии основного состояния и низколежащих возбуждений точно решаемых моделей был предложен в работе [73] и легко обобщается на замкнутые цепочки с потоком. Впервые эффект Аронова—Бома в модели Хаббарда изучался независимо в работе [58], в которой был рассчитан персистентный ток при малых потоках, и в [59]. Подробный анализ мезоскопических АБ-осцилляций с учетом эффекта четности и разбором ситуаций, связанных с пересечением уровней, был проведен в работе [66]. Мы будем следовать изложению работы [66], результаты которой до настоящего времени остаются наиболее полным аналитическим описанием АБ-осцилляций в металлической фазе модели Хаббарда.

Для мезоскопических систем ($Nt/U >> 1$) разумно предполагать, что в основном состоянии распределение зарядовых и спиновых чисел не имеет пропусков. Тогда энергия системы для такого типа распределения квантовых чисел будет зависеть от их максимальных и минимальных значений. Более удобно ввести линейные комбинации

$$\begin{aligned} I_{\max} - I_{\min} &= N, \quad I_{\max} + I_{\min} = 2\delta_c, \\ J_{\max} - J_{\min} &= M, \quad J_{\max} + J_{\min} = 2\delta_s, \end{aligned} \tag{4.8}$$

имеющие очевидный физический смысл ($\delta_{c,s}$ — коэффициенты, описывающие эффекты четности в зарядовом и спиновом секторах; $\delta_{c,s} = 0$ или $1/2$ (mod 1) в зависимости от четности чисел N и M). В терминах этих чисел энергия изучаемого типа состояний модели Хаббарда с нулевым макроскопическим магнитным моментом равна [74]

$$E = N_a\varepsilon_\infty + \frac{2\pi v_c}{N_a}\left\{(N - \nu N_a)^2(2\xi)^{-2} + \right.$$

$$\left. + \xi^2\left(\delta_c + \frac{\delta_s}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\right\} +$$

$$+ \frac{2\pi v_s}{2N_a}\left\{\frac{1}{4}(N - 2M)^2 + \delta_s^2 - \frac{1}{6}\right\}. \tag{4.9}$$

Здесь $v_{c,s}$ — ферми-скорости «одетых» (взаимодействием) зарядовых и спиновых возбуждений, ζ — «одетый» заряд.

В общем случае произвольных M и N можно определить 2×2-матрицу «одетых» зарядов (как производных от энергий ε_α ($\alpha = c, s$) «одетых» квазичастиц по соответствующим обобщенным химическим потенциалам $\zeta_{\alpha\beta} = -\partial\varepsilon_\beta/\partial A_\alpha$), которая выражается через один заряд ζ для макроскопически немагнитного состояния (что естественно предполагать, изучая основное состояние модели Хаббарда с отталкиванием).

Например, в работах [86,87] в термодинамическом пределе $N \gg 1$, $M \gg 1$, $N_a \gg 1$ выписаны интегральные уравнения для интересующих нас величин v_α, $\zeta_{\alpha\beta}$ и приведены их решения для режима сильной связи $U \gg t$.

Магнитный поток сдвигает зарядовые числа $I_n \to I_n + (\Phi/\Phi_0)$ и поэтому, согласно (4.8), его влияние легко учесть в (4.9), заменяя $\delta_s \to \delta_c + (\Phi/\Phi_0)$. Нас интересует зависящая от потока Φ часть энергии основного состояния. Для ее расчета минимизируем (4.9) при заданных полном числе электронов в кольце и потоке Φ по всем квантовым числам. Заметим, что, поскольку основное состояние предполагается макроскопически немагнитным, число частиц со спином «вниз» (M), по существу, также фиксировано: $M = N/2$ (N — четные), $M = (N \pm 1)/2$ (N — нечетные). Два эквивалентных выбора M при нечетном числе электронов приводят к одной и той же энергии в мезоскопическом пределе. Остаются параметры $\delta_{c,s}$, которые, вообще говоря, могут принимать разные значения в разных областях изменения магнитного потока. В терминах этих параметров зависящая от потока энергия равна

$$\Delta E(\Phi) = \frac{2\pi v_c}{N_a}\zeta^2\left(\delta_c + \frac{\delta_s}{2} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{\pi v_s}{N_a}\delta_s^2 . \tag{4.10}$$

Как и для свободных электронов (см. разд. 1), рассмотрим четыре различные ситуации, отличающиеся значением полного числа электронов в кольце. Так как энергия основного состояния является четной функцией потока, достаточно изучить зависимость $\Delta E_0(\Phi)$ на интервале $0 \le \Phi \le \Phi_0/2$, а затем периодически продолжить найденную функцию на всю ось потоков.

1) $N = 4n + 1$ (n — целое число). Тогда $M = 2n$ (или $2n + 1$) и на указанном интервале состояния с $\delta_c = 0$, $\delta_s = -1/2$ обладают наименьшей энергией

$$\Delta E_0(\Phi) = \frac{\pi v_c \zeta^2}{2N_a}\left[\frac{1}{2} - \frac{2\Phi}{\Phi_0}\right]^2 + \frac{\pi v_c}{4N} . \tag{4.11}$$

2) $N = 4n + 3$. В основном состоянии $\delta_c = -1/2$, $\delta_s = 1/2$ и энергия системы совпадает с (4.11). Из выражения (4.11) немедленно следует, что энергия основного состояния при нечетном числе электронов в кольце осциллирует с половинным периодом $hc/2e$.

3) $N = 4n$. Для немагнитного состояния $M = 2n$ и, согласно (4.8), $\delta_c = 1/2 \pmod 1$, $\delta_s = 0 \pmod 1$. В изучаемом случае два разных набора чисел (δ_c, δ_s) реализуют минимум энергии в двух разных областях изменения потока. Вблизи $\Phi \propto 0$, как легко увидеть из (4.10), $\delta_c = -1/2$, $\delta_s = -1$, в то время как в окрестности $\Phi \propto \Phi_0/2$ «минимальный» набор равен $(-1/2, 0)$. Пересечение парабол (level crossing) происходит при [66]

$$\frac{\Phi_c^{(-)}}{\Phi_0} = \frac{1}{4} - \frac{v_s}{2v_c\zeta^2} . \tag{4.12}$$

4) $N = 4n + 2$ ($M = 2n + 1$) $\Rightarrow \delta_c = 0 \pmod 1$, $\delta_c = 0 \pmod 1$. Очевидно, что при малых потоках минимум энергии (4.10) отвечает набору $(0, 0)$, в окрестности $\Phi \propto \Phi_0/2$ — $(0, -1)$. Пересечение уровней происходит при

$$\frac{\Phi_c^{(+)}}{\Phi_0} = \frac{1}{4} + \frac{v_s}{2v_c\zeta^2} . \tag{4.13}$$

Для четного числа электронов в кольце точный период АБ-осцилляций, как мы видим, равен фундаментальному кванту потока. Однако из-за эффекта пересечения уровней внутри фундаментального периода появляется дополнительный минимум, и поэтому при наличии взаимодействия форма осцилляций персистентного тока радикально отличается от предсказания модели свободных электронов (см. разд. 1). Более того, для сильно коррелированных электронов ($U \gg t$) $v_c \gg v_s$ и пересечение уровней происходит при $\Phi \simeq \Phi_0/4$, имитируя осцилляции с половинным периодом $hc/2e$.

Итак, при нечетном числе электронов в хаббардовском мезоскопическом кольце персистентный ток $I(\Phi) = -c\partial E_0/\partial\Phi$ парамагнитен и осциллирует с половинным периодом $\Phi_0/2$ вне зависимости от силы взаимодействия

$$I(\Phi) = \zeta^2 I_c\left(1 - 2\frac{2|\Phi|}{\Phi_0}\right)\operatorname{sgn}(\Phi) , \tag{4.14}$$

где $I_c = ev_c/2L$ ($L = N_a a$ — длина кольца). Сравнивая (4.14) с аналогичной формулой для модели свободных электронов, мы видим, что в случае нечетного числа частиц взаимодействие не изменяет период и форму осцилляций, перенормируя только амплитуду тока. Для сильной связи ($U >> t$) эта перенормировка, согласно (4.10), незначительна:

$$I_c\xi^2 \simeq I_0 \sin(\pi\nu) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{4t\ln 2}{\pi U}\left[2\sin(\pi\nu) + \pi^2\nu\left(2 + \cos(\pi\nu)\right)\right]\right\}. \tag{4.15}$$

Амплитуда тока максимальна при заполнении зоны на одну четверть и исчезает для половинного заполнения. В следующем разделе будет показано, что персистентный ток в этом случае экспоненциально мал, как и должно быть для диэлектрической фазы.

Если мезоскопическое хаббардовское кольцо содержит четное число электронов, форма осцилляций персистентного тока резко отличается от предсказанной модели свободных электронов. На интервале $\Delta\Phi = \Phi_0$ появляется дополнительный скачок тока в точке (4.12) или (4.13). Такие осцилляции имитируют АБ-осцилляции с половинным периодом, тогда как модель невзаимодействующих электронов предсказывает существование только фундаментального периода. Более того, взаимодействие стабилизирует диамагнитный характер отклика $I(\Phi) \sim -\Phi$ при $\Phi \sim 0$. Теперь ток диамагнитен не только при $N = 4n + 2$, но и при любом четном числе электронов в кольце. Для всех рассмотренных случаев амплитуда тока в режиме сильной связи равна току бесспиновых фермионов плюс поправки порядка t/U. Вблизи половинного заполнения $\nu \to 1$, амплитуда стремится к нулю по линейному закону $\sim (\nu - 1)$.

5. Моттовский фазовый переход и персистентный ток в диэлектрической фазе

Персистентный ток, как мы видели, отражает чувствительность системы заряженных частиц к граничным условиям и поэтому может рассматриваться в качестве удобного и естественного критерия для определения проводящих свойств системы. Действительно, в металлической фазе как для свободных, так и для взаимодействующих фермионов, амплитуда персистентного тока при низких температурах убывает с ростом размеров системы по степенному закону ($\propto 1/L$), в то время как в диэлектрической фазе эта зависимость экспоненциальная $\propto \exp(-L/\xi_0)$ (ξ_0 — характерный корреляционный радиус).

Этим качественным рассуждениям можно придать строгий смысл (критерий Кона для моттовского фазового перехода [11]). Определим зарядовую жесткость системы D_c как вторую производную по нормированному потоку $\varphi \equiv 2\pi\Phi/\Phi_0$ от энергии основного состояния

$$D_c = \frac{L}{2}\left.\frac{d^2E_0(\varphi)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}. \tag{5.1}$$

В приближении линейного отклика (по электрическому полю) можно показать, что проводимость $\sigma(\omega)$ на частоте ω следующим образом связана с D_c [11]:

$$\lim_{\omega\to 0} \omega\,\mathrm{Im}\,\sigma(\omega) = 2e^2D_c/\hbar^2;$$
$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega \to 0) = \frac{2\pi e^2 D_c}{\hbar}\delta(\hbar\omega) \tag{5.2}$$

(в последней формуле регулярные при $\omega \to 0$ вклады опущены). Из соотношений (5.2) следует, что зарядовая жесткость обратно пропорциональна эффективной массе m^* носителей заряда $D_c \propto 1/m^*$. В металлической фазе D_c конечна даже в термодинамическом пределе ($L \to \infty$), как легко видеть, например, из выражения (2.20), и поэтому обращение зарядовой жесткости в нуль при изменении параметров системы (констант взаимодействия, индекса заполнения ν) должно сигнализировать, согласно критерию Кона, о переходе в моттовскую фазу.

Понятие зарядовой жесткости для макроскопических проводников имеет смысл, когда зависимость энергии от потока магнитного поля при малых потоках имеет квадратичный вид

$$\Delta E_0(\Phi) \underset{\Phi\to 0}{\propto} \frac{D_c}{L}\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)^2, \tag{5.3}$$

т.е. при диамагнитном характере отклика. Сравнивая (5.3) с (1.3), (1.4), (1.15), находим, что для свободных электронов зарядовая жесткость равна

$$D_c = \hbar v_F/2\pi. \tag{5.4}$$

Наличие взаимодействия перенормирует заряд и скорость носителей тока, и зарядовая жесткость для модели Хаббарда принимает вид

$$D_c = \hbar v_c\xi^2/2\pi, \tag{5.5}$$

где v_c — фермиевская скорость зарядовых возбуждений; ξ — «одетый» заряд (см. формулы (4.11), (4.14)).

В этом разделе нас будут интересовать персистентные токи в моттовской фазе и в металличе-

ской фазе вблизи перехода в диэлектрическое состояние. Такая проблема для модели Хаббарда была подробно изучена в работе [75] (см. также [76]), где приведены формулы для зарядовой жесткости в общем случае произвольной константы взаимодействия. Ниже мы проанализируем поставленную задачу в двух предельных режимах — сильной и слабой связи, когда конечные ответы легко находятся без трудоемких вычислений.

Рассмотрим вначале диэлектрическую фазу. Для модели Хаббарда с отталкиванием моттовская фаза возникает при половинном заполнении зоны ($\nu = 1$) вне зависимости от величины константы связи. Как известно, зарядовые возбуждения в этом случае имеют щель

$$2\Delta(U, t) = \frac{16t^2}{U} \int_1^\infty \frac{(y^2 - 1)^{1/2} dy}{\mathrm{sh}\,(2\pi y t/U)}, \qquad (5.6)$$

и мы вправе ожидать, что в термодинамическом мезоскопическом пределе $N_a >> 1$ амплитуда персистентного тока будет экспоненциально мала. В этой ситуации мы можем ограничиться вкладом первой (фундаментальной) гармоники в АБ-осцилляции и выражение для осциллирующей части энергии основного состояния диэлектрического кольца хаббардовских электронов может быть представлено в виде

$$\Delta E_0(\Phi) = \frac{2}{L} D_c^{(d)}(N_a) \left[1 - \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right], \qquad (5.7)$$

где $L = N_a a$ — длина кольца и коэффициент $D_c^{(d)} \propto$ $\propto \exp(-N_a)$ по аналогии с (5.1) можно рассматривать как зарядовую жесткость моттовской фазы. Наиболее легко она рассчитывается в предельных случаях слабой ($U << t$) и сильной ($U >> t$) связи.

Для слабой связи, $U << t$, при решении задачи удобно использовать метод бозонизации. В этом подходе вблизи половинного заполнения ($\nu \to 1$) зарядовый сектор модели Хаббарда описывается квантовой моделью синус-Гордон (SG) [77]. Низколежащие заряженные возбуждения с зарядом $q = \pm e$ являются топологическими солитонами модели SG с релятивистской формой спектра

$$\varepsilon(k) = \left[c^2 k^2 + \Delta^2\right]^{1/2}, \qquad (5.8)$$

где энергия покоя совпадает с величиной моттовской щели (см. выражение (5.6) при $U << t$), а предельная скорость $c = 2t[1 + (U/4\pi t) + \ldots]$. Напомним, что в квантовой теории топологические солитоны обладают статистическими свойствами фермионов и ансамбль невзаимодействующих солитонов описывается фермиевской функцией распределения (см., например, [42]).

В бозонном представлении автоматически учитывается основной эффект взаимодействия хаббардовских электронов при половинном заполнении — образование щели в спектре заряженных возбуждений. Поэтому при расчете свойств диэлектрической фазы (и, в частности, АБ-осцилляций) в режиме слабой связи естественно считать квантовые солитоны невзаимодействующими и описывать их как свободные бесспиновые дираковские фермионы со спектром (1.6).

Расчет осциллирующей по потоку части энергии основного состояния такой системы не представляет затруднений [19,20] и приводит к выражению (1.7). В нашем случае эта формула справедлива для колец длиной $L >> \xi_0$ (ξ_0 — «размер» квантового солитона, он же корреляционный радиус в моттовской фазе) и при четном числе узлов N_a в цепочке (для того чтобы половинное ее заполнение отвечало целому числу $N_e = N_a/2$ бесспиновых фермионов). С учетом этих ограничений из (1.7), (5.7) для зарядовой жесткости находим

$$D_c^{(d)} = \hbar c (-1)^{(N_a+2)/2} N_a \left(\frac{2L}{\pi\xi_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{L}{\xi_0}\right); \quad L >> \xi_0. \qquad (5.9)$$

Выражение (5.9) совпадает с пределом слабой связи ($U << t$) общей формулы для зарядовой жесткости моттовской фазы, выведенной в [75], с использованием метода анзаца Бете:

$$D_c^{(d)} = \hbar c (-1)^{(N_a+2)/2} N_a D(U) \exp\left(-\frac{L}{\xi(U)}\right); \quad L >> 1, \qquad (5.10)$$

где

$$\xi^{-1}(U) = \frac{4t}{U} \int_1^\infty \frac{\ln\,[y - (y^2 - 1)^{1/2}]dy}{\mathrm{ch}\,(2\pi y t/U)}, \qquad (5.11)$$

$$D(U) = \begin{cases} (2/\pi\xi)^{1/2}, & U << t \\ 0{,}15U/t, & U >> t \end{cases}. \qquad (5.12)$$

Согласно (5.10)–(5.12), в режиме сильной связи корреляционный радиус $\xi(U)$ с ростом силы взаимодействия логарифмически стремится к нулю $\xi(U) \propto 1/\ln(U/t)$ и в пределе $U \to \infty$ АБ-осцилляции исчезают даже в мезоскопических кольцах. Физически этот результат очевиден, так как при половинном заполнении и бесконечном отталкивании на узле транспорт заряда в хаббардовской цепочке отсутствует.

В режиме слабой связи персистентный ток, полученный из (5.7), (5.9), выраженный в терминах диэлектрической щели Δ, совпадает с током в двухзонной модели диэлектрика (1.9) и поэтому в

рассматриваемом случае все эффекты взаимодействия хаббардовских электронов «спрятаны» в зависимости $\Delta(U)$. Заметим, что отклик системы на внешнее поле диамагнитный при числе электронов в кольце $N_e = 4n + 2$ ($N_e = N_a$) и парамагнитный при $N_e = 4n$. Период осцилляций равен кванту потока вне зависимости от силы взаимодействия (эти свойства повторяют АБ-характеристики диэлектрического кольца, состоящего из четного числа невзаимодействующих электронов со спином, см., например, [18]).

Восстановление Φ_0-периодичности при приближении по концентрации к половинному заполнению можно обнаружить и в металлической фазе. Действительно, в этом случае разность $|\nu - 1| = n_h$ есть ни что иное как концентрация холонов. Вблизи точки перехода $n_h \ll 1$ и холоны можно считать слабо взаимодействующими бесспиновыми фермионами с зарядом e. Для бесспиновых фермионов период АБ-осцилляций, как мы видели, всегда совпадает с квантом потока hc/e.

В двух изучаемых режимах (сильной и слабой связи) нетрудно рассчитать и амплитуду осцилляций персистентного тока при $\nu \to 1$. Для слабой связи, когда справедливо отображение зарядового сектора модели Хаббарда на квантовую модель SG, холоны естественно описывать как топологические солитоны модели. Но теперь их концентрация в валентной зоне мала и спектр эффективно нерелятивистский $\varepsilon_h(p) = p^2/2m^* + O(p^4)$, $m^* = \Delta/c^2$ (импульс и энергия отсчитываются от границы зоны). Зарядовая жесткость для холонов (бесспиновых фермионов) согласно (2.20) равна

$$D_c^h = \frac{\hbar v_F^h}{2\pi} = \frac{\hbar c}{2}\frac{\xi_0 n_h}{a}, \quad U \ll t. \qquad (5.13)$$

В работе [75] были найдены следующие по концентрации поправки к D_c. При этом было показано, что взаимодействие холонов дает вклад в поправки порядка n_h^4 и выше.

При анализе сильной связи будем использовать известный результат [64], что зарядовые возбуждения в этом случае образуют решеточный газ бесспиновых фермионов со спектром $\varepsilon_h(p) = -2t\cos(pa)$. Соответственно для зарядовой жесткости находим [75]

$$D_c^h \simeq \frac{ta}{\pi}\left\{\pi n_h - \frac{(\pi n_h)^3}{3!} + \ldots\right\}, \quad t \ll U. \qquad (5.14)$$

Переход в моттовскую фазу по концентрации электронов в модели Хаббарда является частным случаем переходов типа соизмеримость—несоизмеримость. Эти переходы в $1D$ обладают универсальным поведением термодинамических характеристик (см., например, [78]), что объясняется тем простым фактом, что в окрестности точки перехода в несоизмеримой («металлической») фазе носители топологического заряда («холоны») всегда могут быть описаны как ферми-газ слабо взаимодействующих частиц с эффективной массой m^*. Это обстоятельство в нашем случае позволяет представить зарядовую жесткость при $n_h \to 0$ в следующем универсальном виде $D_c = n_h/2|m^*|$ [75]. Такого рода универсальность отсутствует при переходах по константе взаимодействия.

В модели Хаббарда фазовый переход по константе взаимодействия в диэлектрическое состояние невозможен. Но для бесспиновых фермионов с отталкиванием существует критическое значение константы связи, когда в системе появляется конечный корреляционный радиус и зарядовые возбуждения приобретают щель. Такая ситуация имеет место в $1D$ модели Гейзенберга—Изинга (XXZ-модель). Для наших целей эту модель удобно представить в виде решеточного газа бесспиновых фермионов с взаимодействием плотность—плотность на соседних узлах [79]:

$$H = -\sum_n \left(c_n^+ c_{n+1} + \text{э.с.}\right) - 2\gamma \sum_n \left(\rho_n - \frac{1}{2}\right)\left(\rho_{n+1} - \frac{1}{2}\right), \qquad (5.15)$$

где $\rho_n \equiv c_n^+ c_n$ — оператор числа фермионов и интеграл перескока положен равным единице, $t = 1$.

Известно (см., например, [80]), что в зависимости от значения константы связи γ модель (5.15) описывает две фазы: бесщелевую (металлическую) при $|\gamma| \le 1$ ($\gamma = 0$ отвечает случаю свободных фермионов) и диэлектрическую при $\gamma \le -1$. Гамильтониан (5.15) диагонализуется с помощью подстановки Бете, и соответствующие уравнения для квазиимпульсов k_n имеют вид [80]

$$N_a k_n = 2\pi I_n - 2\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{M} \operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma \sin((k_n - k_m)/2)}{\cos((k_n + k_m)/2) - \gamma \sin((k_n - k_m)/2)}\right], \qquad (5.16)$$

где $n = 1, 2, \ldots M$; M — число фермионов; N_a — число узлов и для основного состояния квантовые числа I_n образуют набор целых или полуцелых чисел $\{-(M-1)/2, \ldots, (M-1)/2\}$. В терминах квазиимпульсов k_n энергия системы равна

$$E = -\frac{N_a\gamma}{2} + 2\sum_{n=1}^{M}\left(\gamma - \cos k_n\right). \quad (5.17)$$

Наличие АБ-взаимодействия (скрученные граничные условия для волновой функции) учитывается в (5.16) заменой $I_n \to I_n + \Phi/\Phi_0$, где $\Phi_0 = hc/e$ — квант потока.

Ниже мы рассмотрим случай половинного заполнения $M = N_a/2$ (N_a — четное число), позволяющий получить простые аналитические формулы (в спиновом представлении модели Гейзенберга—Изинга этот случай отвечает немагнитному основному состоянию системы $S^z_{\text{tot}} = 0$).

В металлической фазе характер зависимости персистентного тока от потока магнитного поля Ф, по-существу, был нами уже изучен в разд. 2, когда анализировались АБ-осцилляции в ЛЖ. Для бесспиновых электронов соответствующая формула имеет вид (2.6), (1.5), где под фермиевской скоростью в нашем случае следует понимать величину $v_F^* = 2\pi D_c/\hbar$.

Зарядовая жесткость D_c для цепочки бесспиновых электронов со взаимодействием ближайших соседей (5.15) при половинном заполнении была рассчитана в работе [59]

$$D_c = \hbar v_F \frac{\pi \sin\mu}{8\pi(\pi - \mu)}, \quad (5.18)$$

где $\cos\mu = -\gamma$; $v_F = 2ta$ (в используемых единицах $t = a = 1$). Согласно результатам разд. 2, персистентный ток в кольце бесспиновых электронов осциллирует с периодом $\Phi_0 = hc/e$ и при низких температурах вне зависимости от силы взаимодействия (отталкивания) форма осцилляций резко ангармонична. Ток диамагнитен для нечетного числа частиц в кольце и парамагнитен для четного. В нашем случае режим ЛЖ с отталкиванием реализуется при $-1 \le \gamma \le 0$.

Амплитуда тока

$$I_m = \frac{ev_F^*}{L} = I_0\frac{\pi^2 \sin\mu}{\mu(\pi - \mu)} \quad (5.19)$$

($I_0 = ev_F/L$) монотонно убывает с ростом взаимодействия от максимального значения I_0 в отсутствие взаимодействия ($\gamma = 0 \Rightarrow \mu = \pi/2$) до $\sim 0{,}785\, I_0$ в точке фазового перехода ($\gamma = -1$) в диэлектрическое состояние. В бесконечной цепочке зарядовая жесткость в точке перехода терпит скачок $\Delta D_c = 1/4$ (в отличие от рассмотренного ранее случая фазового перехода по концентрации, где D_c обращается в нуль). Для кольца конечной длины персистентный ток отличен от нуля и в непроводящей (диэлектрической) фазе при конечном взаимодействии ($|\gamma| < \infty$). Качественно ток в этом случае имеет ту же форму, что и в моттовской фазе модели Хаббарда (5.7)

$$I(\Phi) \sim (-1)^{N_a/2}\exp\left(-\frac{N_a}{\xi}\right)\sin\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (5.20)$$

хотя количественные характеристики диэлектрической фазы в двух изучаемых моделях резко отличаются (в (5.20) мы опустили предэкспоненциальный множитель, расчеты которого отсутствуют в литературе).

В модели Гейзенберга—Изинга упорядоченная фаза реализуется при больших ($-\gamma \le 1$) константах взаимодействия и поэтому метод бозонизации в этом случае, вообще говоря, неприменим. Для нахождения корреляционного радиуса $\xi(L) < \infty$ в диэлектрической фазе необходимо использовать точные методы. Используя результаты, приведенные, например, в монографии Бакстера [81], где рассчитывалось межфазное натяжение в шести- и восьмивершинных моделях, в работе [59] были приведены точные выражения для корреляционного радиуса ξ и минимальной щели Δ_g в спектре низколежащих возбуждений для модели Гейзенберга—Изинга в упорядоченной фазе ($\gamma < -1$, $-\gamma \equiv \operatorname{ch}\lambda$)

$$\xi^{-1} = \ln\left\{\frac{\theta_3(q)}{\theta_2(q)}\right\}, \quad q \equiv \exp(-2\lambda), \quad (5.21)$$

где $\theta_i(q) \equiv \theta_i(0, q)$ — тэта-функция Якоби нулевого аргумента (см., например, [37])

$$\Delta_g = \operatorname{sh}\lambda\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{ch}^{-1}(n\lambda)\right\}. \quad (5.22)$$

Зная асимптотики θ-функций при $q \to 0$ и $q \to 1$ [37], нетрудно найти выражения для $\xi(\gamma)$ и $\Delta_g(\gamma)$ в режиме сильной связи ($|\gamma| \gg 1$) и вблизи точки моттовского перехода ($\gamma \to -1^-$)

$$\xi = \begin{cases} 2/\ln(-\gamma), & -\gamma \gg 1 \\ \dfrac{1}{4}\exp\left\{\dfrac{\pi^2}{2\,(2(-\gamma-1))^{1/2}}\right\}, & \gamma \to -1^- \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\Delta_g \simeq \begin{cases} |\gamma|, & -\gamma \gg 1 \\ (2\pi 2^{1/2})\exp\left\{-\dfrac{\pi}{(-\gamma-1)^{1/2}}\right\}, & \gamma \to -1^- \end{cases} \quad (5.24)$$

Сравнивая (5.23) с выражением для корреляционного радиуса в модели Хаббарда (5.11), легко увидеть, что в режиме сильной связи зависимости ξ от константы взаимодействия совпадают (корреля-

ционный радиус логарифмически убывает с ростом константы взаимодействия). В области фазового перехода изучаемые зависимости резко отличаются. Если для модели Хаббарда при $U \propto t$ (что соответствует $\gamma = -1$ в модели Гейзенберга—Изинга) моттовская фаза характеризуется конечной щелью в точке перехода, то аналогичный предел в модели (5.15) предсказывает экспоненциально малую щель (5.24) и экспоненциально большой корреляционный радиус (5.23). Константы в показателях экспонент в (5.23), (5.24) специфичны для изучаемой модели, и какая-либо универсальность в критической области отсутствует (заметим, однако, что качественно, с точностью до численных множителей, $\xi \propto \Delta_g^{-1}$ в окрестности перехода).

Интересно отметить, что в изучаемой модели заряд возбуждений с минимальной щелью дробный: $q = \pm e/2$ [59]. Поэтому в наивной картине свободного газа дробнозаряженных фермионов мы бы получили аномальный период АБ-осцилляций $\Phi_q = hc/q = 2\Phi_0$. Однако, поскольку носители дробного заряда всегда подчиняются дробной статистике (см., например, [82]), правильное квантование возбуждений восстанавливает фундаментальную Φ_0-периодичность (см. также обзор [20]).

В заключение этого раздела кратко перечислим основные результаты, касающиеся проводящих свойств одномерных цепочек сильно коррелированных электронов, описывающихся t–J-моделью. Гамильтониан этой модели имеет вид [83]

$$H = -t \sum_{i,\sigma} P\left(c^+_{i,\sigma} c_{i+1,\sigma} + \text{э.с.}\right) P + \\ + 2J \sum_i \left(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1} - \frac{1}{4} n_i n_{i+1}\right), \qquad (5.25)$$

где $\mathbf{S} = (1/2) c^+_{i,\sigma} (\hat{\sigma})_{\sigma,\sigma'} c_{i,\sigma'}$ ($(\hat{\sigma})$ — матрицы Паули), $n_i = \sum_\sigma c^+_{i,\sigma} c_{i,\sigma}$; P — проектор на состояния с запрещенными парами электронов с противоположными импульсами на узле (обычно в модели (5.25) рассматривается антиферромагнитная связь $J > 0$).

Модель точно решается квантовым методом обратной задачи рассеяния, например, в суперсимметричной точке $t = J$ [84]. В работе [85] в этом подходе, используя $1/L$-разложение при решении уравнений анзаца Бете, была рассчитана зарядовая жесткость системы в металлической фазе. Анализ, проведенный в [85], показывает, что поведение зарядовой жесткости в t–J-модели как функции концентрации электронов ($\nu = N_e/N_a$) практически совпадает с аналогичными результатами в модели Хаббарда. При низких концентрациях ($\nu \to 0$) $D_c(\nu) \sim \nu$ и совпадает с выражением для жесткости невзаимодействующих фермионов той же плотности. При увеличении концентрации зарядовая жесткость достигает максимума при $\nu \sim 1/2$ и затем монотонно убывает, обращаясь в нуль при половинном (для электронов со спином) заполнении $\nu \to 1$, что свидетельствует о фазовом переходе в диэлектрическое состояние. Поведение $D_c(\nu)$ в окрестности перехода $D_c \propto (1 - \nu)$ отвечает универсальным характеристикам переходов типа соизмеримость—несоизмеримость. Эффективная масса носителей заряда в суперсимметричной t–J-модели, согласно приведенным в [85] расчетам, незначительно больше (на 7%) эффективной массы зарядовых возбуждений в модели Хаббарда в режиме сильной связи.

Поскольку в металлической фазе длинноволновые свойства t–J-модели относятся к классу универсальности моделей ЛЖ, период и форма осцилляций персистентного тока совпадают с вычисленной в разд. 2 для ЛЖ электронов со спином 1/2.

Приложение 1

Рассмотрим систему из N частиц, находящихся на цепочке. Состояние каждой частицы имеет внутреннюю структуру, которая характеризуется дискретным индексом α, пробегающим l значений. При взаимодействии частицы не только обмениваются импульсами (так как их состояние на цепочке полностью задается координатой вдоль цепочки или сопряженным ей импульсом), но и меняют индекс α в зависимости от вида взаимодействия. Волновая функция системы N частиц в координатном представлении

$$\Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}\left(x_1, \ldots x_N\right) \qquad (\text{П1.1})$$

ищется в виде

$$\Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}\left(x_1, \ldots x_N\right) = \sum_P A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(Q|P) \times \\ \times \exp\left(i \sum_{j=1}^N p_{P_j} x_j\right), \qquad (\text{П1.2})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(Q|P) = A_{\alpha_{Q1} \ldots \alpha_{QN}}(PQ).$$

В формуле (П1.2) $Q = \{q_1, \ldots, q_N\}$ и $P = \{P_1, \ldots, P_N\}$ — перестановки целых чисел 1, ..., N; p_j — импульс j-ой частицы и $x_{q_1} < x_{q_2} < \ldots < x_{q_N}$. Формула (П1.2) представляет собой обобщение анзаца Бете на случай перестановки экспонент не только по импульсам, но и по координатам, так как частицы обладают внутренним индексом α. При пере-

становке i-ой и j-ой частиц амплитуда A меняется по следующему закону:

$$A_{\ldots\alpha_i\ldots\alpha_j\ldots}(Q|P) =$$

$$= \sum_{\alpha_i'\alpha_j'} S^{\alpha_i\alpha_i'}_{\alpha_j\alpha_j'}(p_i, p_j)\, A_{\ldots\alpha_i'\ldots\alpha_j'\ldots}(Q'|P'), \quad (\text{П1.3})$$

где $S^{\alpha_i\alpha_i'}_{\alpha_j\alpha_j'}(p_i, p_j)$ — двухчастичная матрица рассеяния, которая определяется взаимодействием между частицами. Между элементами двухчастичной матрицы рассеяния имеется связь [56]. Рассмотрим трехчастичное рассеяние. Пусть в начальном и конечном состояниях частицы расположены $x_1 < x_2 < x_3$ и $x_3 < x_2 < x_1$ соответственно. Поскольку процесс рассеяния может идти двумя путями:

$$x_1 < x_2 < x_3 \to x_2 < x_1 < x_3 \to$$
$$\to x_2 < x_3 < x_1 \to x_3 < x_2 < x_1$$

и

$$x_1 < x_2 < x_3 \to x_1 < x_3 < x_2 \to$$
$$x_3 < x_1 < x_2 \to x_3 < x_2 < x_1,$$

а конечный результат одинаков, то из этого следует, что

$$\sum_{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'} S^{\alpha_1\alpha_1'}_{\alpha_2\alpha_2'}(p_1, p_2)\, S^{\alpha_1'\alpha_1''}_{\alpha_3\alpha_3'}(p_1, p_3)\, S^{\alpha_2'\alpha_2''}_{\alpha_3'\alpha_3''}(p_2, p_3) =$$
$$= \sum_{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'} S^{\alpha_2\alpha_2'}_{\alpha_3\alpha_3'}(p_2, p_3)\, S^{\alpha_1\alpha_1'}_{\alpha_3'\alpha_3''}(p_1, p_3)\, S^{\alpha_1'\alpha_1''}_{\alpha_2'\alpha_2''}(p_1, p_2). \quad (\text{П1.4})$$

Формула (П1.4) называется уравнением Янга—Бакстера (или соотношением «звезда—треугольник» по графической аналогии [81]). Удобно перейти к переменным λ_1, λ_2 (они называются быстротами) от переменных p_1, p_2 так, чтобы матрица S была функцией их разности $S(\lambda_1 - \lambda_2)$. С помощью двухчастичных матриц рассеяния можно построить матрицу монодромии $\widetilde{T}$ размерности l^{N+1} и трансфер-матрицу T размерности l^N, зависящие от спектрального параметра λ:

$$\widetilde{T}^{\gamma_\xi\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\xi\gamma_{\xi'}\beta_1\ldots\beta_N}(\lambda) = \sum_{\gamma_2\ldots\gamma_N} S^{\gamma_\xi\gamma_2}_{\alpha_1\beta_1}(\lambda)\, S^{\gamma_2\gamma_3}_{\alpha_2\beta_2}(\lambda) \ldots S^{\gamma_N\gamma_{\xi'}}_{\alpha_N\beta_N}(\lambda), \quad (\text{П1.5})$$

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_N}(\lambda) = \sum_{\gamma_1\ldots\gamma_N} S^{\gamma_1\gamma_2}_{\alpha_1\beta_1}(\lambda)\, S^{\gamma_2\gamma_3}_{\alpha_2\beta_2}(\lambda) \ldots S^{\gamma_N\gamma_1}_{\alpha_N\beta_N}(\lambda). \quad (\text{П1.6})$$

Матрица монодромии — матрица, описывающая рассеяние частицы с начальным γ_ξ и конечным $\gamma_{\xi'}$ состояниями на N частицах в цепочке с начальными $\alpha_1\ldots\alpha_N$ и конечными $\beta_1\ldots\beta_N$ состояниями. Как видно из формул (П1.5), (П1.6), трансфер-матрица T есть операторный след от матрицы монодромии $\widetilde{T}$:

$$T(\lambda) = \mathrm{Tr}_\xi\, \widetilde{T}_\xi(\lambda).$$

Построим так называемый L-оператор — матрицу размерности l^{N+1}, диагональную по всем индексам, кроме $\alpha_n\beta_n$:

$$L^{\gamma_\xi\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\xi n\gamma_{\xi'}\beta_1\ldots\beta_N}(\lambda) = S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\alpha_n\beta_n}(\lambda)\, \delta_{\alpha_1\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_N\beta_N}.$$

Легко проверить, что

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_N}(\lambda) = \left\{\mathrm{Tr}_\xi\, L_{\xi 1}(\lambda)\, L_{\xi 2}(\lambda) \ldots L_{\xi N}(\lambda)\right\}^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\beta_1\ldots\beta_N}.$$

Используя уравнение (П1.4), можно убедиться, что выполняются уравнения Янга—Бакстера для L операторов и для матрицы монодромии $\widetilde{T}$

$$P_{\xi\eta}\, S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\gamma_\eta\gamma_{\eta'}}(\lambda - \mu)\, L_{\xi n}(\lambda)\, L_{\eta n}(\mu) = L_{\eta n}(\mu)\, L_{\xi n}(\lambda)\, P_{\xi\eta}\, S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\gamma_\eta\gamma_{\eta'}}(\lambda - \mu), \quad (\text{П1.7})$$

$$P_{\xi\eta}\, S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\gamma_\eta\gamma_{\eta'}}(\lambda-\mu)\,\widetilde{T}_\xi(\lambda)\widetilde{T}_\eta(\mu) =$$

$$= \widetilde{T}_\eta(\mu)\,\widetilde{T}_\xi(\lambda)\,P_{\xi\eta}\, S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\gamma_\eta\gamma_{\eta'}}(\lambda-\mu)\,, \quad (\text{П1.8})$$

где $P_{\xi\eta}$ — оператор перестановки подпространств ξ и η. Обычно обозначают

$$P_{\xi\eta}\, S^{\gamma_\xi\gamma_{\xi'}}_{\gamma_\eta\gamma_{\eta'}}(\lambda) = R(\lambda)\,,$$

где $R(\lambda)$ — матрица размерности l^2. Из уравнения (П1.8) следует, что трансфер-матрицы с разными аргументами коммутируют:

$$\left[T(\lambda),\, T(\mu)\right] = 0\,. \quad (\text{П1.9})$$

Необходимым и достаточным условием равенства (П1.9) является выполнение уравнения Янга—Бакстера (П1.4) для двухчастичных матриц рассеяния.

Учет непериодичности (скрученности) граничных условий можно провести на уровне матрицы монодромии и трансфер-матрицы [57]. Для этого необходимо матрицу монодромии домножить на матрицу D, которая учитывает скрученность граничных условий. Матрица D обычно диагональна [59], поэтому соотношения (П1.8) и (П1.9) выполняются, т.е. и для скрученных граничных условий трансфер-матрицы разных аргументов коммутируют. Это означает, что можно построить набор операторных функций трансфер-матрицы, которые будут коммутировать с ней и друг с другом, что означает точную интегрируемость модели. В частности, обычно гамильтониан является логарифмической производной от трансфер-матрицы [56].

Применение квантового метода обратной задачи рассеяния для $1D$ модели Хаббарда изложено, например, в монографии [79] (заметим, что впервые точное решение было получено в работе [60]), а учет скрученных граничных условий для нее проведен в работах [58,59].

Приложение 2

В этом приложении приведем интегральные уравнения, решения которых определяют матрицу «одетых» зарядов цепочки Хаббарда и скорости фермиевских «одетых» возбуждений.

Из уравнений (4.2)–(4.4) стандартным путем (см., например, [74]), для матрицы «одетых» зарядов получаем

$$\zeta_{11}(k) = 1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda K_1(\lambda - \sin k)\,\zeta_{21}(\lambda)\,, \quad (\text{П2.1})$$

$$\zeta_{12}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda' K_1(\sin k - \lambda')\,\zeta_{22}(\lambda')\,, \quad (\text{П2.2})$$

$$\zeta_{21}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k_0}^{k_0} dk K_1(\lambda - \sin k)\cos k\,\zeta_{11}(k) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda' K_2(\lambda - \lambda')\,\zeta_{21}(\lambda')\,, \quad (\text{П2.3})$$

$$\zeta_{22}(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k_0}^{k_0} dk K_1(\lambda - \sin k)\cos k\,\zeta_{12}(k) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda' K_2(\lambda - \lambda')\,\zeta_{22}(\lambda')\,, \quad (\text{П2.4})$$

где ядра $K_{1,2}(x)$ равны

$$K_n(x) = \frac{2Un}{(Un)^2 + x^2}\,, \quad (\text{П2.5})$$

и предельные значения квазиимпульса (k_0) и быстроты (λ_0) находятся из уравнений

$$\varepsilon_c(k_0) = 0\,, \quad \varepsilon_s(\lambda_0) = 0\,, \quad (\text{П2.6})$$

$$\varepsilon_c(k) = \varepsilon_c^0(k) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda K_1(\lambda - \sin k)\,\varepsilon_s(\lambda)\,, \quad (\text{П2.7})$$

$$\varepsilon_s(\lambda) = \varepsilon_s^0(\lambda) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k_0}^{k_0} dr K_1(\lambda - \sin k)\cos\varepsilon_c(k) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda' K_2(\lambda - \lambda')\,\varepsilon_s(\lambda')\,. \quad (\text{П2.8})$$

В отсутствие внешнего магнитного поля «голые» энергии зарядовых ε_c^0 и спиновых ε_s^0 степеней свободы имеют очевидный вид:

$$\varepsilon_c^0 = -2\cos k\,, \quad \varepsilon_s^0 = 0\,. \quad (\text{П2.9})$$

Ферми-скорости $v_{c,s}$ в зарядовом и спиновом секторах определяются следующим образом:

$$2\pi v_c = \frac{\varepsilon_c'(k_0)}{\rho(k_0)}, \quad 2\pi v_s = \frac{\varepsilon_s'(\lambda_0)}{\sigma(\lambda_0)}, \tag{П2.10}$$

где $\rho(k)$, $\sigma(\lambda)$ — плотности распределения квазиимпульсов и быстрот в термодинамическом пределе

$$v_c = \int_{-k_0}^{k_0} dk\,\rho(k), \quad v_s = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda\,\sigma(\lambda). \tag{П2.11}$$

Аналитическое выражение для поправки конечного размера к основному состоянию цепочки Хаббарда в присутствии АБ-потока получено в режиме сильной связи $U >> t$. Расчеты были проведены, например, в работах [86,87]. Для немагнитного основного состояния имеем

$$\Delta E(v_c) = \frac{4\pi \sin(\pi v_c)}{N_a}\left\{1 + \frac{\ln 2}{U}\left[2\sin(\pi v_c) - v_c\cos(\pi v_c)\right]\left[\left\{\frac{\Phi}{\Phi_0}\right\} - \frac{1}{12}\left(1 - \frac{\ln 2}{U}v_c\cos(\pi v_c)\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^2}{12UN_a}\left(1 - \frac{\sin(2\pi v_c)}{2\pi v_c}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{N_a}\right). \tag{П2.12}$$

Из выражения (П2.12) видно, что при половинном заполнении мезоскопические АБ-осцилляции в хаббардовском кольце отсутствуют.

Эта работа была выполнена при частичной поддержке INTAS, Grant N 94-3862 и Международного научного фонда, Grant N U2K000.

1. Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
2. R. G. Chambers, *Phys.Rev. Lett.* **5**, 3, (1960).
3. *Proceedings of the International Conference on Fundamental Aspects of Quantum Theory to Celebrate 30 Years of the Aharonov-Bohm Effect*, World Scientific, Singapore (1991).
4. M. Peskin, *Phys. Rep.* **80**, 375 (1981); S. Olariu and I. Popescu, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985); G. N. Afanas'ev, *Part. Nucl.* **21**, 172 (1990).
5. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGrow-Hill (1975).
6. M. Buttiker, Y. Imry, and Landauer, *Phys. Lett.* **96A**, 365 (1983).
7. D. Mailly, C. Chapelier, and A. Benoit, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2020 (1993); *Physica* **B197**, 514 (1994).
8. R. B. Dingle, *Proc. Phys. Soc.* **A212**, 47 (1952).
9. G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum Press, New York (1990).
10. F. D. M. Haldane, *J. Phys.* **C14**, 2585 (1981).
11. W. Kohn, *Phys. Rev.* **123**, 1242 (1961); **133**, 171 (1964).
12. И. О. Кулик, *Письма в ЖЭТФ*, **11**, 407 (1970).
13. H.-F. Cheung, Y. Gefen, E. K. Riedel, and W.-H. Shin, *Phys. Rev.* **B37**, 6050 (1988).
14. A. J. Leggett, in: *Granular Nanoelectronics*, K. Ferry, J. R. Barker, and C. Jacoboni (eds.), NATO ASI Ser. B., Plenum Press, New York (1991), v. 251, p.297.
15. D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 343 (1992).
16. F. V. Kusmartsev, *Phys. Rev.* **B46**, 7675 (1992).
17. T. Swahn, E. N. Bogachek, Yu. M. Galperin, M. Jonson, and R. I. Shekhter, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 162 (1994).
18. И. О. Кулик, А. С. Рожавский, Э. Н. Богачек, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 251 (1988).
19. Э. Н. Богачек, И. В. Криве, А. С. Рожавский, *ТМФ* **83**, 115 (1990).
20. I. V. Krive, A. S. Rozhavsky, *Int. J. Mod. Phys.* **B6**, 1255 (1992).
21. P. F. Bagwell, *Phys. Rev.* **B49**, 6841 (1994).
22. A. Grincwajg, I. V. Krive, R. I.Shekhter, and M. Jonson, *Persistent Current in a 1D Ballistic Ring: The Influence of Statistics, Appl. Phys. Rep.* N 948, CHT/GU, Goteborg (1994).
23. Y. Imry, In: *Directions in Condensed Matter Physics*, B. Grinstein and G. Mazenko (eds.), World Scientific, Singapore (1986).
24. S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics I*; Springer–Verlag Berlin–Heidelberg–New York (1971); З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, Мир, Москва (1974).
25. Y. Nagoshi and S. Takagi, *J. Phys.* **A24**, 4093 (1991).
26. A. O. Gogolin and N. V. Prokof'ev, *Phys. Rev.* **B50**, 4921 (1994).
27. R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 223 (1957); *Phylos. Mag.* **21**, 863 (1970).
28. D. Loss and P. Goldbart, *Phys. Rev.* **B43**, 13762, (1991).
29. A. Muller-Groeling, H. A. Weidenmuller, and C. H. Lewenkopf, *Europhys. Lett.* **22**, 193 (1993).
30. E. Wigner, *Phys. Rev.* **46**, 1002 (1934).
31. D. V. Averin, K. K. Likharev, In: *Mesoscopic Phenomena in Solids*, B. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (eds.), Elsevier, Amsterdam (1991).
32. L. I. Glazman, I. M. Ruzin, and B. I. Shklovsky, *Phys. Rev.* **B45**, 8454 (1992).
33. H. J. Schulz, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1864 (1993).
34. R. F. Dashen, S.-K. Ma, and R. Rajaraman, *Phys. Rev.* **D11**, 1449 (1975).
35. K. Jauregui, W. Hausler, and B. Kramer, *Europhys. Lett.* **24**, 581 (1993).
36. I. V. Krive, R. I. Shekhter, S. M. Girvin, and M. Jonson, *Physica Scripta* **54**, 123 (1994).

36а. Э. Н. Богачек, И. В. Криве, И. О. Кулик, А. С. Рожавский, *ЖЭТФ* **97**, 603 (1990).

36б. E. N Bogachek, I. V. Krive, I. O. Kulik, and A. S. Rozhavsky, *Phys. Rev.* **B42**, 7614 (1990).

37. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
38. S. M. Girvin, M. Jonson, I. V. Krive, and R. I. Shekhter, *Aharonov-Bohm Oscillations in a One-Dimensional Wygner Crystal-Ring, Applied Phys. Rep.* N 93-53, CHT/GU, Goteborg (1993) (to be published in P.R.B).
39. S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975); S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11**, 3026 (1975).
40. A. Luther and I. Peschel, *Phys. Rev.* **B9**, 2911 (1974); 12, 3908 (1975).

41. V. J. Emery, In: *Highly Conducting One-Dimensional Solids*, J. T. Devreese et al. (eds.), New York (1979) p. 327.
42. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985).
43. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison-Wesley, Redwood City CA (1991).
44. B. S. Shastry, *Mod. Phys. Lett.* **B6**, 1427 (1992).
45. H. J. Schulz, *Int. J. Mod. Phys.* **B5**, 57 (1991).
46. S. Fujimoto and N. Kawakami, *Phys. Rev.* **B48**, 17406 (1993).
47. N. Byers and C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* 7, 46 (1962); C. N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
48. F. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1241 (1968).
49. C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1220 (1992); *Phys. Rev.* **B46**, 15233 (1992).
50. F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1840 (1981).
51. E. B. Kolomensky, *Phys. Rev.* **B47**, 1840 (1993).
52. A. Furusaki and N. Nagaosa, *Phys. Rev.* **B47**, 4631 (1993).
53. A. I. Larkin and P. A. Lee, *Phys. Rev.* **B17**, 1596 (1978).
54. I. V. Krive, A. A. Nersesyan, M. Jonson, and R. I. Shekhter, *Influence of Long-Range Coulomb Interaction on the Metal-insulator Transition in One-Dimensional Strongly Correlated Electron System, Appl. Phys. Rep.* 94-35, CHT/GU, Goteborg, (1994), submitted to P. R. B.
55. M. Fabrizio, A. O. Gogolin, and S. Scheidl, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2235 (1994).
56. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН* **34**, 13 (1979).
57. E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*, Preprint HU-TFT-91-51, Helsinki (1991).
58. А. А. Звягин, *ФТТ* **32**, 1546 (1990).
59. B. S. Shastry and B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 243 (1990).
60. E. Lieb and T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1445 (1968).
61. J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc.* **A276**, 238 (1963).
62. А. А. Звягин, *ЖЭТФ* **103**, 312 (1993).
63. F. V. Kusmartsev, *J. Phys. Cond. Mat.* **3**, 3199 (1991).
64. H. Shiba, *Phys. Rev.* **B6**, 930 (1972).
65. B. Doucot and X.G. Wen, *Phys. Rev.* **B40**, 2719 (1989).
66. N. Yu and M. Fowler, *Phys. Rev.* **B45**, 11795 (1992).
67. F. V. Kusmartsev, J. F. Weisz, R. Kishore, and M. Takahashi, *Phys. Rev.* **B49**, 16234 (1994).
68. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Phys. Lett.* **A85**, 375 (1981).
69. J. des Cloizeaux and J. J. Pearson, *Phys. Rev.* **128**, 2131 (1962).
70. A. J. Schofield, J. M. Wheatly, and T. Xiang, *Phys. Rev.* **B44**, 8349 (1991).
71. N. Nagaosa and P. Lee, *Phys. Rev.* **B45**, 966 (1992).
72. I. Krive and G. Wendin, *Mod. Phys. Lett.* **B7**, 921 (1993).
73. H. J. de Vega, and F. Woynarovich, *Nucl. Phys.* **B251**, [FS13] 439 (1985).
74. F. Woynarovich, *J. Phys.* **A22**, 4243 (1989).
75. C. A. Stafford and A. J. Millis, *Phys. Rev.* **B48**, 1409 (1993).
76. C. A. Stafford, A. J. Millis, and B. S. Shastry, *Phys. Rev.* **B43**, 13660 (1991); R. M. Fye, M. J. Martins, D. J. Scalapino, J. Wagner, and W. Hanke, *Phys. Rev.* **B44**, 6909 (1991).
77. H. Bergknoff and H. B. Thaker, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 135 (1979); В. Е. Корепин, *ТМФ* **41**, 169 (1979).
78. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980); А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
79. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
80. C. N. Yang and C. P. Yang, *Phys. Rev.* **150**, 321 (1966).
81. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985).
82. F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anion Superconductivity*, World Scientific, Singapore (1990).
83. F. C. Zhang and T. M. Rice, *Phys. Rev.* **B37**, 3759 (1988).
84. P. Schlottmann, *Phys. Rev.* **B36**, 5177 (1987).
85. N. Kawakami and S. K. Yang, *Phys. Rev.* **B44**, 7844 (1991).
86. А. А. Звягин, И. В. Криве, *ЖЭТФ* **102**, 1376 (1992).
87. I. V. Krive and A. A. Zvyagin, *Mod. Phys. Lett.* **B6**, 871 (1992).

Persistent current in one-dimensional systems of strongly correlated electrons

(Review Article)

A. A. Zvyagin and I. V. Krive

Charge persistent currents in one-channel ballisic rings for various models of strongly correlated electrons (the Wigner crystal, Luttinger liquid, the Hubbard model, the t–J model, the fermion representation of the Heisenberg-Ising model) are studied. The main goal of the review is to compare the properties of the Aharonov-Bohm oscillations for weakly and strongly correlated electrons and formulate the set of persistent current characteristics, which shows the anomalous (different from the Fermi liquid) behavior of $1D$ electron systems. For this purpose the manifestation of the parity effect (the dependence of the response type on the particle in ring number parity) and the difference of persistent current properties for model spinless fermions and real electrons are analyzed. The influence of single impurities on magnitude and temperature dependence of Aharonov-Bohm oscillations has been studied. It is demonstrated that the formation of a Wigner crystal (which can take place for weakly screened Coulomb interaction) causes sharp anomalous (non-monotonic) temperature dependence of the current value for the nonideal ring. Local types of electron-electron interaction change most essentially the charge current properties near the Mott metal-insulator transition.