

В. Н. П е л ы х

**К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТАЛОСТИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ
НАГРУЖЕНИИ СТАТИЧЕСКИМ КРУЧЕНИЕМ И СИММЕТРИЧНЫМ
ЦИКЛИЧЕСКИМ ИЗГИБОМ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem of analysis of fatigue life-time and ultimate state is solved for prismatic specimens undergoing the united action of static torsion and symmetric cyclic bending. The solution is built on the basis of model of destruction that sets dependence between the maximum values of amplitudes of asymmetric cycle of loading in the form of exponential transcendent function, and the conception of equivalent stresses. The stress of symmetric cycle is chosen as equivalent stress, which reduces the asymmetric cycle of loading to the symmetric cycle at the fixed number of cycles to destruction. The results of calculations are approved experimentally for the specimens from alloyed steels and aluminium alloy.

Key words: multi-cycle fatigue, prismatic specimen, fatigue life-time, ultimate state, asymmetric loading, combined loading, cyclic bending, static torsion, equivalent stress.

Введение.

Проблема усталостных разрушений материалов и элементов конструкций, несмотря на огромное количество выполненных в этом направлении работ, всё ещё остается актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [6, 7, 9, 12]. Особенно актуальными представляются задачи усталостного разрушения при взаимодействии различных видов комбинированного нагружения статическими и циклическими нагрузками, характерными, например, для большинства вращающихся валов, лопаток газовых турбин, коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, фрагментов фюзеляжа и крыльев самолета, соединительных элементов конструкций.

Одним из видов комбинированного нагружения является комбинированное нагружение статическим кручением и симметричным циклическим изгибом [5, 8, 13]. Такому виду нагружения подвержены разнообразные валы и оси транспортного оборудования, в частности, валы и оси поршневых и реактивных двигателей, элементы крыльев самолета. Оценка сопротивления усталости в условиях такого вида нагружения обычно осуществляется по диаграммам предельных напряжений, устанавливающим зависимость циклической компоненты напряжений от статической. Усталостная долговечность, в этом случае, описывается кривыми усталости, которые отображают зависимость числа циклов до разрушения от величины амплитуды цикла напряжений по параметру касательного статического напряжения.

Традиционно диаграммы предельных напряжений и кривые усталости при совместном воздействии статического кручения и симметричного циклического изгиба строятся по результатам трудоемких испытаний образцов материала на усталость для каждого фиксированного значения касательного статического напряжения [5]. В некоторых случаях задача решается за счет установления и использования эмпирических зависимостей параметров кривой усталости от величины касательного статического напряжения. Это позволяет рассчитывать предельное состояние и усталостную

долговечность для промежуточных значений касательного статического напряжения и сократить объем весьма трудоемких и длительных испытаний образцов материала. Такой подход, однако, обеспечивает удовлетворительные результаты оценки предельного состояния лишь для конкретного материала или для нескольких соотношений статической компоненты к циклической.

В работе [2] построена модель предельного состояния для условий одноосного асимметричного растяжения – сжатия в форме степенной трансцендентной функции, а в работах [10-11, 14] такая модель обобщена на случай асимметричного изгиба и кручения. Модель позволяет охватить практически все формы диаграмм предельных напряжений, характерных для большинства конструкционных материалов и включающих выпуклые, вогнутые и близкие к линейным диаграммам предельных напряжений. Для расчета усталостной долговечности используется концепция эквивалентных напряжений [3]. Эквивалентные напряжения приводят асимметричный цикл к симметричному и позволяют рассчитывать усталостную долговечность, используя усталостные характеристики симметричного цикла.

В данной работе степенная трансцендентная функция и концепция эквивалентных напряжений используются для построения модели предельного состояния и решения задач усталости при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом.

§1. Постановка задачи.

Рассматривается усталостное разрушение сплошных цилиндрических образцов, находящихся под действием комбинированного нагружения статическим крутящим моментом $M_{кр}$ и симметричным циклическим изгибающим моментом $M_{изг}$. Условие нагружения задается соотношением

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_a^b g(n), \quad \sigma_y = \sigma_z = 0; \\ \tau = \tau_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

где σ_a^b – амплитуда циклической компоненты при изгибе; τ_m – статическая касательная компонента цикла напряжений; $g(n)$ – некоторая периодическая функция, задающая закон изменения напряжения σ_a^b во времени; $n = ft$ – число циклов изменения напряжения σ_a^b .

Принимается, что амплитудные значения напряжений σ_a^b в (1.1) не зависят от времени (стационарный режим) и достаточно быстро (частота $f = n/t > 10$ Гц) изменяются от цикла к циклу, а максимальное главное напряжение в цикле согласно критерию максимальных нормальных напряжений не превышает предела текучести материала σ_Y при растяжении – сжатии, так что

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_a^b}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_a^b)^2}{4} + \tau_m^2} \leq \sigma_Y. \quad (1.2)$$

В этом случае усталостное разрушение образца реализуется в многоцикловой области, где число циклов до разрушения $n_R \geq 10^5$.

Модель предельного состояния при асимметричном изгибе задается соотношением [10]

$$\frac{\sigma_a^b}{\sigma_n^b} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_m^b}{\sigma_B^b} \right) \right]^{2\lambda_1}, \quad (1.3)$$

а при асимметричном кручении – соотношением [11]

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^{\lambda_2}, \quad (1.4)$$

где σ_a^b , τ_a – амплитуды циклического напряжения при изгибе и кручении, соответственно; σ_n^b , τ_n – пределы ограниченной усталости при симметричном изгибе и кручении; σ_m^b , τ_m – статические нормальные и касательные напряжения цикла; σ_B^b , τ_B – кратковременная прочность материала при изгибе и кручении; λ_1 , λ_2 – коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла при изгибе и кручении, соответственно.

Уравнение кривой усталости, устанавливающее зависимость числа циклов до разрушения n_R от разрушающего напряжения при симметричном цикле нагружения записывается в виде [3]

$$n_R = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_a)^q}, \quad (1.5)$$

где σ_a – амплитудное значение напряжения; q и D – параметры кривой усталости.

Задача заключается в обобщении степенной трансцендентной функции в (1.3) и (1.4) на условия комбинированного нагружения статическим кручением и симметричным циклическим изгибом и решение на ее основе задач расчета усталостной долговечности и предельного состояния сплошных призматических образцов конструкционных материалов.

§2. Модели усталостного разрушения при комбинированном нагружении.

В качестве моделей усталостного разрушения при совместном воздействии статического кручения и симметричного изгиба рассматривается модель предельного состояния, устанавливающая зависимость между разрушающими напряжениями по параметру числа циклов до разрушения, и модель, устанавливающая зависимость числа циклов до разрушения от амплитуды напряжения изгиба по параметру статического напряжения кручения.

2.1. Модель предельного состояния. Модель предельного состояния при совместном воздействии статического кручения и симметричного циклического изгиба в нормированной системе координат строится по аналогии с (1.3) и (1.4) в виде

$$\frac{\sigma_a^b}{\sigma_n^b} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^{\chi}, \quad (2.1)$$

где χ – коэффициент чувствительности материала к совместному воздействию нормальных и касательных напряжений. Остальные обозначения соответствуют приведенным в (1.3) и (1.4). В модели предельного состояния (2.1), как и в моделях (1.3) и (1.4), граничные условия удовлетворяются точно по каждой из компонент цикла напряжений.

Модель предельного состояния (2.1) задает зависимость между предельными напряжениями комбинированного нагружения – статичным кручением и симметричным циклическим изгибом в нормированной (обобщенной) системе координат, инвариантной по отношению к числу циклов до разрушения n_R .

Модель (2.1) охватывает практически все известные формы диаграмм предельных напряжений при варьировании коэффициента чувствительности материала к совместному воздействию нормальных и касательных напряжений χ , включая выпуклые, линейные и вогнутые (рис. 1), характерных для большинства конструкционных материалов.

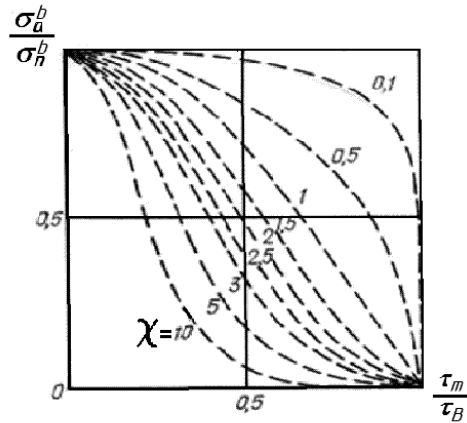


Рис. 1

2.2. Модель усталостного разрушения. Строится модель усталостного разрушения, устанавливающая зависимость между числом циклов до разрушения n_R в функции амплитуды циклических напряжений σ_a^b по параметру среднего касательного напряжения τ_m , задаваемых согласно (1.1). Модель строится на основе концепции эквивалентных напряжений, позволяющих свести асимметричный цикл нагружения к симметричному

$$(\sigma_a^b)_{eqv} = f(\tau_m, c_i) \cdot \sigma_a^b, \quad (2.2)$$

которые задают комбинации среднего касательного напряжения τ_m и амплитуды циклического напряжения σ_a^b для одного и того же числа циклов до разрушения n_R , и, которое соответствует пределу ограниченной усталости σ_n^b при симметричном изгибе. Здесь c_i – экспериментально определяемые коэффициенты.

Зависимость числа циклов до разрушения n_R от эквивалентного напряжения $(\sigma_a^b)_{eqv}$ при заданном виде нагружения определяется по уравнению

$$n_R = \frac{1}{(1+q)D \left((\sigma_a^b)_{eqv} \right)^q}, \quad (2.3)$$

которое получено из уравнения кривой усталости (1.5) при симметричном цикле заменой величины σ_a на $(\sigma_a^b)_{eqv}$, где q и D – параметры кривой усталости при симметричном цикле нагружения.

Функция $f(\cdot)$ в (2.2) идентифицируется, исходя из аналитического выражения (2.1), задающего диаграмму предельных напряжений в нормированной системе координат.

Эквивалентные напряжения $(\sigma_a^b)_{eqv}$ при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом, исходя из (2.1) с учетом (2.2), записываются в виде

$$(\sigma_a^b)_{eqv} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^{-\chi} \sigma_a^b. \quad (2.4)$$

2.3. Методика определения коэффициентов. Для решения задач усталостного разрушения на основе модели предельного состояния (2.1) и модели усталостного разрушения (2.3) необходимо располагать значением предела кратковременной статической прочности при кручении τ_B и значениями материальных констант q , D и χ .

Предел прочности τ_B определяется по результатам испытаний образцов материала при чистом кручении.

Коэффициенты q и D определяются по результатам аппроксимации экспериментальных данных на усталость при симметричном ($\tau_m = 0$) цикле нагружения чистым изгибом. Как и в [3] задача сводится к минимизации функционала

$$\Phi(q, D) = \sum_{j=1}^S \left\{ n_{Rj}(\sigma_{nj}) - \left[(1+q)D(\sigma_n)^q \right]^{-1} \right\}^2 \Rightarrow 0, \quad (2.5)$$

где σ_{nj} и n_{Rj} – набор дискретных значений пределов ограниченной усталости и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

Константа χ , характеризующая чувствительность материала к двухосности нагружения, определяется аналогично [1] из условия наилучшего согласования экспериментальных значений σ_{aj}^b , σ_{nj}^b , τ_{mj} с линеаризованной предельной диаграммой

$$\frac{\sigma_{aj}^b}{\sigma_{nj}^b} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_{mj}}{\tau_B} \right) \right]^\chi, \quad (2.6)$$

которая следует из (2.1) при условии, что значениям σ_{aj}^b , σ_{nj}^b , τ_{mj} соответствует одно и то же число циклов до разрушения n_R .

Задача определения константы χ сводится, исходя из (2.6), к минимизации функционала

$$\Phi(\chi) = \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{\sigma_{aj}^b}{\sigma_{nj}^b} - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_{mj}}{\tau_B} \right) \right]^\chi \right\}^2 \Rightarrow 0, \quad (2.7)$$

где комбинации нормальных и касательных напряжений в базовом эксперименте выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\nu = \frac{\sigma_a^b}{\tau_m} = 0,5; 1,0; 1,5,$$

что позволяет охватывать наиболее характерные виды двухосного циклического нагружения.

§3. Расчет усталостной долговечности и предельного состояния.

Решается задача расчета усталостной долговечности и предельного состояния сплошных цилиндрических образцов при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом.

3.1. Объекты исследования, материальные константы. Рассмотрено усталостное разрушение сплошных цилиндрических образцов на примере разрушения сплошных цилиндрических образцов из сталей 40X и 45 и алюминиевого сплава Д16Т при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом.

Значения пределов прочности при кручении τ_B для исследуемых материалов, а также значения использованных в расчетах материальных констант q , D и χ , найденных по изложенной в разделе 2.3 методике, приведены в таблице. Экспериментальные данные, использованные при определении коэффициентов, заимствованы из [4, 5].

Материал	τ_B , МПа	q	D , МПа ^q ·цикл ⁻¹	χ
Сталь 40Х	1172,2	19,786	$6,812 \cdot 10^{-65}$	0,64
Сталь 45	751,0	20,218	$3,201 \cdot 10^{-62}$	0,38
Сплав Д16Т	310,0	6,446	$1,927 \cdot 10^{-22}$	1,41

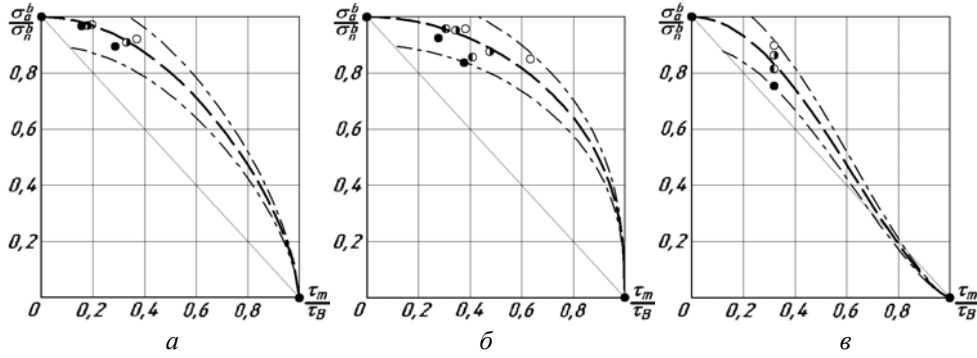


Рис. 2

Зависимость относительной величины σ_a^b / σ_n^b от τ_m / τ_B , рассчитанной по уравнению (2.1) с использованием значения показателя степени χ , приведенного в таблице и рассчитанного для трех значений величины ν , удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными (рис. 2), полученными для более широкого диапазона значений величины ν . Зависимость рассчитана для образцов из стали 40Х (а) при значениях $\nu = 2,0; 2,25; n_R = 10^4$ (○) цикл.; $\nu = 1,78; 2,0; n_R = 10^5$ (●) цикл.; $\nu = 1,58; 1,78; n_R = 10^6$ (●) цикл., для образцов из стали 45 (б) при значениях $\nu = 1,48; 2,5; n_R = 10^4$ (○) цикл.; $\nu = 1,33; 2,24; n_R = 10^5$ (●) цикл.; $\nu = 1,2; 2,0; n_R = 10^6$ (●) цикл.; $\nu = 1,07; 1,79; n_R = 10^7$ (●) цикл. и для образцов из алюминиевого сплава Д16Т (в) при значениях $\nu = 2,4; n_R = 10^5$ (○) цикл.; $\nu = 1,8; n_R = 4 \cdot 10^5$ (●) цикл.; $\nu = 1,6; n_R = 10^6$ (●) цикл.; $\nu = 1,4; n_R = 10^7$ (●) цикл. Здесь и далее результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные – точками. Штрих-пунктирными линиями обозначен интервал в $\pm 10\%$, задающий отклонение от расчетных значений σ_a^b / σ_n^b . Экспериментальные данные заимствованы из [4, 5].

3.2. Расчет усталостной долговечности. Рассчитывается число циклов до разрушения n_R в зависимости от амплитуды σ_a^b и статической компоненты τ_m . Величина n_R определяется из уравнения

$$n_R = \frac{1}{\left[(1+q)D \left\{ \cos \left(\frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right) \right\}^{-q\chi} (\sigma_a^b)^q \right]}, \quad (3.1)$$

полученного из (2.3) с учетом (2.4).

Результаты расчета числа циклов до разрушения n_R сплошных образцов при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом, выполненные по уравнению (3.1) с использованием приведенных в таблице значений коэффициентов, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными при варьировании параметра τ_m . Кривые усталости рассчитаны для образцов из стали

40X (а) при значениях $\tau_m = 433,67$ (○) и $384,14$ (●) МПа; для образцов из стали 45 (б) – при значениях $\tau_m = 356,08$ (○) и $228,08$ (●) МПа и для образцов из алюминиевого сплава Д16Т (в) – при значении $\tau_m = 98,1$ (○) МПа. Сплошными линиями показаны кривые усталости при симметричном цикле нагружения. Экспериментальные данные заимствованы из [4, 5].

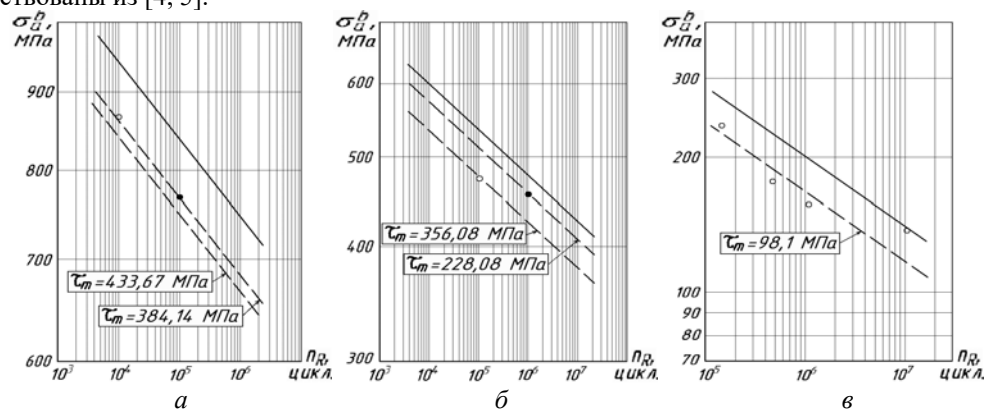


Рис. 3

3.3. Расчет предельного состояния. Рассчитывается значение амплитуды при изгибе σ_a^b в зависимости от статической компоненты τ_m по параметру числа циклов до разрушения n_R . Значение величины σ_a^b определяется из уравнения

$$\sigma_a^b = \frac{1}{[(1+q)Dn_R]^{\frac{1}{q}}} \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot \tau_m}{2 \tau_B}\right) \right]^\lambda, \quad (3.2)$$

полученного из (2.1) с учетом (1.5), где принято $\sigma_n^b = \sigma_a^b$.

Результаты расчетов значения σ_a^b сплошных образцов при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом, выполненные по уравнению (3.2) с использованием приведенных в таблице значений коэффициентов, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными для образцов из стали 40X (а) – при значениях $n_R = 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●) цикл.; для образцов из стали 45 (б) – при значениях $n_R = 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●), 10^7 (●) цикл. и для образцов из алюминиевого сплава Д16Т (в) при значениях $n_R = 10^5$ (○), $4 \cdot 10^5$ (●), 10^6 (●), 10^7 (●) цикл. при варьировании числа циклов до разрушения n_R . Экспериментальные данные заимствованы из [4, 5].

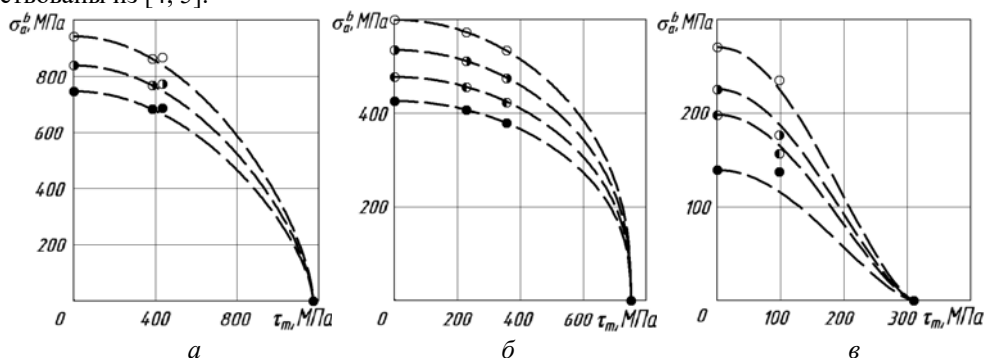


Рис. 4

§4. Анализ результатов.

Задача расчета усталостной долговечности и предельного состояния при комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом решена в работе на основе модели предельного состояния, связывающей предельные напряжения цикла нагружения с помощью степенной трансцендентной функции и концепции эквивалентных напряжений, позволяющей свести комбинированное нагружение циклическим изгибом и статическим кручением к симметричному циклическому изгибу.

Результаты расчетов усталостной долговечности и предельного состояния сплошных образцов из стали 40Х, стали 45 и алюминиевого сплава Д16Т, выполненные по предложенным моделям, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Максимальная погрешность по долговечности n_R получена для стали 40Х (см. рис. 3, а) при $\tau_m = 384,14$ МПа, $\sigma_a^b = 880$ МПа и составила 50%. Для других материалов и уровней среднего касательного напряжения τ_m погрешность по долговечности колеблется в пределах от 5 до 30%, что, учитывая, большой разброс экспериментальных данных при усталостных испытаниях, можно считать вполне приемлемой. Наибольшая погрешность при расчете предельного состояния составила 12 % для алюминиевого сплава Д16Т (см. рис. 4, в) при $\tau_m = 98,1$ МПа и $n_R = 10^7$.

Заключение.

Подход к решению задач усталостного разрушения, основанный на использовании степенной трансцендентной функции для формулировки моделей предельного состояния при одноосном асимметричном нагружении, может быть использован также для двухосного комбинированного нагружения статическим кручением и симметричным циклическим изгибом. В рамках этого подхода решены задачи расчета усталостной долговечности по параметру статического напряжения кручения и зависимости амплитуды изгибных циклических напряжений от статического напряжения кручения по параметру числа циклов до разрушения. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для стали 40Х, стали 45 и алюминиевого сплава Д16Т.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу розрахунку довговічності та граничного стану призматичних зразків за умови втоми при спільній дії статичного кручення та симетричного циклічного згину. Розв'язок побудовано на основі моделі руйнування, що встановлює залежність між граничними значеннями амплітуд асиметричного циклу навантаження у формі ступеневої трансцендентної функції, та концепції еквівалентних напружень. За еквівалентне напруження вибрано напруження симетричного циклу, яке зводить асиметричний цикл навантаження до симетричного циклу при фіксованому числі циклів до руйнування. Результати розрахунків апробовано експериментально для зразків з легованих сталей та алюмінієвого сплаву.

1. Голуб В.П. Метод расчета усталостной долговечности элементов конструкций при двухосном комбинированном нагружении // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – **106**. – № 9. – С. 159 – 165.
2. Голуб В.П., Крижановский В.И. К оценке предельного состояния материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // *Пробл. прочности*. – 1994. – № 4. – С. 3 – 15.
3. Голуб В.П., Пельх В.Н., Погребняк А.Д. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений // *Вісн. нац. техн. ун-ту України «КПІ». Машинобудування*. – 2010. – № 58. – С. 177 – 182.
4. Земсков Г.В. О пределе выносливости некоторых материалов при переменном изгибе и постоянном кручении // *Усталостная прочность и долговечность авиационных конструкций*. – Куйбышев: Изд-во Авиационного института, 1974. – С. 61 – 64.

5. Почтенный Е.К., Стайченко Е.С. Исследование циклической прочности сталей 45 и 40Х в условиях совместного действия циклического изгиба и статического кручения // Пробл. прочности. – 1973. – № 8. – С. 114 – 116.
6. Серенсен С.В., Козаев В.П., Шнейдорович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие / Под ред. С.В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
7. Collins J.A. Failure of materials in mechanical design. Analysis. Prediction. Prevention. – New York: John Wiley & Sons, 1981. – 624 p.
8. Forrest P.G. Fatigue of Metals. – London-New York-Paris: Pergamon Press, 1962. – 425 p.
9. Golub V.P., Plashchinskaya A.V. On the Theory of Growth of Fatigue Mode I Cracks in Thin Isotropic Plates of Finite Size under Uniaxial Tension-Compression // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 188 – 206.
10. Golub V.P., Pogrebnyak A.D., Kochetkova E.S. Fatigue Strength of Metallic and Composite Materials under Repeated High-Cycle Bending // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, – N 5. – P. 516 – 524.
11. Golub V.P., Pogrebnyak A.D., Kochetkova E.S. Fatigue Strength of Metals and Composites under Repeated High-Cycle Torsion // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, – N 2. – P. 134 – 141.
12. Heywood R.B. Designing against fatigue. – London: Chapman and Hall Ltd., 1962. – 504 p.
13. Kobzar Yu. M. Models of Long-Term Brittle Fracture of Rods in Tension and Compression under Creep Conditions // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 4. – P. 444 – 453.
14. Pogrebnyak A.D., Pelykh V.N., Kasperskaya V.V. On Selection of the Model of Limiting State of Heat-Resistant Materials under Uniaxial Asymmetric Loading // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 1. – P. 56 – 63.

Поступила 20.06.2017

Утверждена в печать 22.11.2018

