

Н. В. Никитина

## О СУЩЕСТВОВАНИИ АТТРАКТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Two cases of existence of attractors in the basic models of 3D system are analyzed.

**Key words:** two– disk dynamo model, Rössler model, bifurcation, chaos.

### Введение.

Методы качественной теории нелинейной механики двумерных систем получили полное завершение во второй половине прошлого века. В конце прошлого века повысился интерес к трехмерным системам в связи с изучением хаотических движений. Проблемы касаются разнообразия математических моделей, которые порождают хаотические аттракторы и построение принципов изучения возникновения регулярных аттракторов, а также механизмов возникновения хаоса в трехмерных системах. Несмотря на определенный опыт исследования нелинейных систем [3 – 8, 10,12], проблема существования аттракторов остается открытой и связана с выделением нескольких механизмов потери устойчивости орбиты.

Укажем некоторые случаи, которые связаны с привлечением принципа симметрии, с качественным анализом, который позволяет доказать теорему о существовании аттрактора, установить характер потери устойчивости орбиты и переход от регулярного аттрактора к странному.

1. Аттракторы, образование которых доказывается при помощи принципа симметрии, имеют определенную симметрию на координатных плоскостях замкнутой в целом траектории [3].

2. Трехмерная система следующего вида: первые два уравнения линейные, третье уравнение – нелинейное

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_3) \quad (1)$$

можно представить в виде двух двумерных подсистем вида

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad (2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_3). \quad (3)$$

Система разделена на две подсистемы таким образом, чтобы линейная подсистема (2) определяла процесс на плоскости  $x_1x_2$ . Подсистема (3) содержит неизменным нелинейное уравнение трехмерной системы (1) и определяет процесс на плоскости  $x_1x_3$ . Плоскость  $x_2x_3$  исключена из рассмотрения, так как система (1) не содержит

соответствующей правой части. Подсистемы на плоскостях  $x_1x_2$  и  $x_1x_3$  связаны между собой переменной  $x_1$ . Подсистема (2) является диссипативным осциллятором  $\ddot{x}_2 - a\dot{x}_2 + x_2 = 0$ , траектория которого уходит из нуля плоскости  $x_1x_2$ .

Предположим, что подсистема (3) устойчива; тогда в системе (1) может образоваться трехмерный аттрактор. Эти физические предположения легли в основу доказательства теоремы о существовании аттрактора в системе (1).

**3. Трехмерная система с плоским аттрактором.** Существование в трехмерной системе плоского аттрактора связано с характером особой точки, а также с выполнением определенных условий, которые показывают, что в трехмерной системе имеет место замкнутая траектория на плоскости. Качественный анализ плоского аттрактора связан с определенным механизмом потери устойчивости орбиты. При определенных начальных условиях орбита замкнутой траектории теряет устойчивость и образует странный аттрактор.

В данной работе рассмотрены два последних случая. В приложении рассмотрены базовые математические модели процессов.

### 1. Трехмерные системы вида (1) – (2), (3).

Система трех уравнений взаимодействует на двух плоскостях систем (2), (3) (плоскости  $x_1x_2$ ,  $x_1x_3$ ). Обратимся к принципу кососимметрии для двумерных систем. Рассмотрим принцип кососимметрии для нелинейных двумерных систем, который был применен в работе [2]. Предположим, что нелинейный осциллятор имеет линейную и нелинейную составляющие диссипации. Линейная порождает в нуле неустойчивую особую точку (неустойчивый фокус) – линейную составляющую кососимметрии траектории. Нелинейная составляющая ограничивает также область ухода траектории из нуля кососимметричной кривой. Эта кривая образует предельный цикл. Пример нелинейной двумерной системы – осциллятор Ван-дер-Поля

$$dx_1/dt = x_2, dx_2/dt = -x_1 + \mu(x_2 + x_1^2 x_2), \quad (4)$$

где  $\mu$  – параметр. Кососимметрия связана с двумя осями координат.

*В нелинейной системе вида (4) (с линейной и нелинейной составляющей диссипации)*

$$dx_1/dt = F_1(x); \quad dx_2/dt = F_2(x) \quad (5)$$

существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (5), связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); \quad F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2); \quad (6)$$

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (7)$$

Условия (6), (7) создают кососимметрию. Нелинейная составляющая диссипации ограничивает область и, таким образом, останавливает уход изображающей точки. Приведенные сведения из методов качественного анализа двумерных систем будут применены для подсистем (2), (3) при доказательстве существования аттрактора в системе (1).

**Предположение 1.** Пусть трехмерная нелинейная система (1) приводится к виду (2), (3). Особая точка трехмерной системы в нуле  $(0, 0, 0)$  – седлофокус. На одной координатной плоскости  $x_1x_2$  подсистема (2) образует линейный диссипативный осциллятор; особая точка на плоскости – неустойчивый фокус. Линейная система на плоскости  $x_1x_2$  отвечает условиям (6), (7). Траектория на плоскости  $x_1x_2$  имеет фокусные точки. На плоскости  $x_1x_3$  вторая подсистема (3) – нелинейная. Особая точка в нуле  $(0,0)$  имеет характеристические показатели (ХП)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Траектория подсистемы на плоскости  $x_1x_3$  стремится к нулю.

**Теорема 1.** Если трехмерная система (1) удовлетворяет условиям Предположения 1, то в окрестности особой точки  $(0,0,0)$  рождается аттрактор.

*Доказательство.* Так как особая точка трехмерной системы в нуле – седлофокус, то траектория уходит от нуля. В трехмерной системе первая подсистема (2) (плоскость  $x_1x_2$ ) имеет неустойчивую особую точку в нуле и удовлетворяет условиям (6), (7). Однако, подсистема – линейная и образование замкнутой кривой не происходит. Подсистемы (2), (3) связаны между собой через переменную  $x_1$ . Одновременно вторая подсистема включается в режим притяжения к нулю на плоскости  $x_1x_3$ . В этом случае уход траектории на плоскости  $x_1x_2$  остановлен. На плоскости  $x_1x_3$  доминирует процесс притяжения. Поле, порожденное уравнениями в вариациях подсистемы (3), – это поле устойчивой системы. Траектория трехмерной системы либо замыкается, находясь в окрестности нуля  $(0,0,0)$  трехмерной системы, либо (в силу седлофокусных решений) осуществляет бесконечный поиск, стремясь замкнуться в окрестности нуля.

*Замечание о симметрии проекций замкнутой траектории на координатные плоскости.* Пусть при некоторых значениях параметров траектория замыкается. На плоскости  $x_1x_2$  она близка к кососимметрии. Трехмерная система (1) содержит седлофокусные решения, которые делают кососимметрию приближенной. Увеличение седловой составляющей в частном решении приводит к возникновению кратного периода колебаний либо к хаотическим колебаниям.

#### Пример 1: аттракторы в модели Рёсслера.

Модель Рёсслера возникла в динамике химических реакций, протекающих в некоторой среде с перемешиванием [9]. Она описывается безразмерной системой уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta - \zeta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + a\eta; \quad \frac{d\zeta}{dt} = b - c\zeta + \xi\zeta, \quad (8)$$

где  $a, b, c$  – положительные величины. Система (8) рассмотрена многими авторами (см. [7, 11] и библиографию там). Координаты особых точек системы (8) находим из уравнения  $a\zeta^2 - c\zeta + b = 0$ .

Рассмотрим ближайшую к нулю особую точку  $A(\xi = az_a, \eta = -z_a, \zeta = z_a)$ , где  $z_a = c / (2a) - \sqrt{(c / 2a)^2 - b / a}$ . Вторая особая точка  $B(\xi = az_b, \eta = -z_b, \zeta = z_b)$ , где  $z_b = c / (2a) + \sqrt{(c / 2a)^2 - b / a}$ .

Свяжем с точкой  $A$  систему координат  $Axyz$ , где  $x = \xi - az_a$ ,  $y = \eta + z_a$ ,  $z = \zeta - z_a$ . Система (8) в новых координатах принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -y - z; \quad \frac{dy}{dt} = x + ay; \quad \frac{dz}{dt} = z_a x - b / z_a z + xz. \quad (9)$$

Здесь принято во внимание, что  $-b / z_a = -c + az_a$ . Составим характеристическое уравнение, которое соответствует системе (9),

$$\lambda^3 + \lambda^2(b / z_a - a) + \lambda(1 + z_a - ab / z_a) + b / z_a - az_a = 0. \quad (10)$$

Для определенных значений параметров уравнение (10) показывает, что особая точка системы (9) – седлофокус. Запишем уравнения (9) в форме (2), (3):

$$\frac{dx}{dt} = -y; \quad \frac{dy}{dt} = ay + x; \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = -z; \quad \frac{dz}{dt} = -b / z_a z + z_a x + xz. \quad (12)$$

Введем малые отклонения  $\delta x, \delta y, \delta z$  в системе (11), (12) от частных решений  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = -\delta y; \quad \frac{d\delta y}{dt} = a\delta y + \delta x; \quad \frac{d\delta x}{dt} = -\delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = (-b/z_a + \bar{x})\delta z + (\bar{z} + z_a)\delta x. \quad (13)$$

В подсистеме (11) в нуле особая точка имеет ХП  $a/2 \pm \sqrt{(a/2)^2 - 1}$ . В подсистеме (12) согласно подсистемы в вариациях (13) на плоскости  $xz$  точки имеют ХП, которые зависят от частных решений

$$\lambda_{1,2}(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{-b/z_a + \bar{x}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-b/z_a + \bar{x})^2}{4} - (z_a - \bar{z})}. \quad (14)$$

В нуле ХП показывают согласно (14) устойчивый узел. При  $|\bar{x}| < b/z_a$ , а также при  $\bar{x} < 0$ , изображающая точка системы (12) описывает траекторию с устойчивыми точками (согласно выражению (14)). Общая картина, которая порождает аттрактор, следующая: на плоскости  $xu$  (уравнения (11)) в нуле – неустойчивый фокус ( $\text{Re} \lambda_{1,2} > 0$ ).

Появление устойчивых точек на траектории плоскости  $xz$  может быть сигналом для замыкания трехмерной системы (на плоскости  $xu$  координатный портрет системы (11), рис. 1, а). Подсистема (11) соответствует линейным уравнениям движения; на плоскости  $xz$  (подсистема (12)) траектория стремится к нулю. Здесь речь идет об аттракторах как регулярных, так и о хаотических. Механизм возникновения хаотического аттрактора связан с избытком седловых решений на траектории. Избыток седловых решений приводит к появлению удвоения периода (кратность периода). Седловые решения (по сравнению с фокусными) вызывают замедление движения изображающей точки. Поэтому изображающая точка выходит на второй виток колебаний. Дальнейшее развитие периодического процесса (при изменении параметров) связано с кратным увеличением периода, которое приводит к неповторяемости бифуркаций (исчезновение определенной последовательности бифуркаций на периодической траектории). Колебательный процесс становится хаотическим. Этот вид хаоса весьма распространен.

Введем малые отклонения  $\delta x, \delta y, \delta z$  в системе (9) от частных решений  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = -\delta y - \delta z; \quad \frac{dy}{dt} = \delta x + a\delta y; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -(b/z_a - \bar{x})\delta z + (z_a + \bar{z})\delta x.$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left( -a + \frac{b}{z_a} - \bar{x} \right) + \lambda \left( 1 - \frac{ab}{z_a} + z_a - a\bar{x} + \bar{z} \right) + a \left( z_a + \frac{b}{z_a} + \bar{z} \right) - \bar{x} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) показывает, что бифуркационный процесс связан с решениями  $\bar{x}, \bar{z}$ . По уравнению (15) устанавливается влияние величин параметров на появление седловых решений в точках траектории. На рис. 1, а, б, в приведены координатные портреты системы (9), параметры системы:  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 4; 2)$ . Изменение величин параметров  $b, c$  приводит к изменению величины  $z_a$ , что влияет на избыток седловых решений (см. уравнение (15)). При малых величинах  $z_a$  возникает удвоение периода (рис. 1, г, д,  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 4; 4)$ ) и хаос (рис. 1, ж,  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 4, 7)$ ).

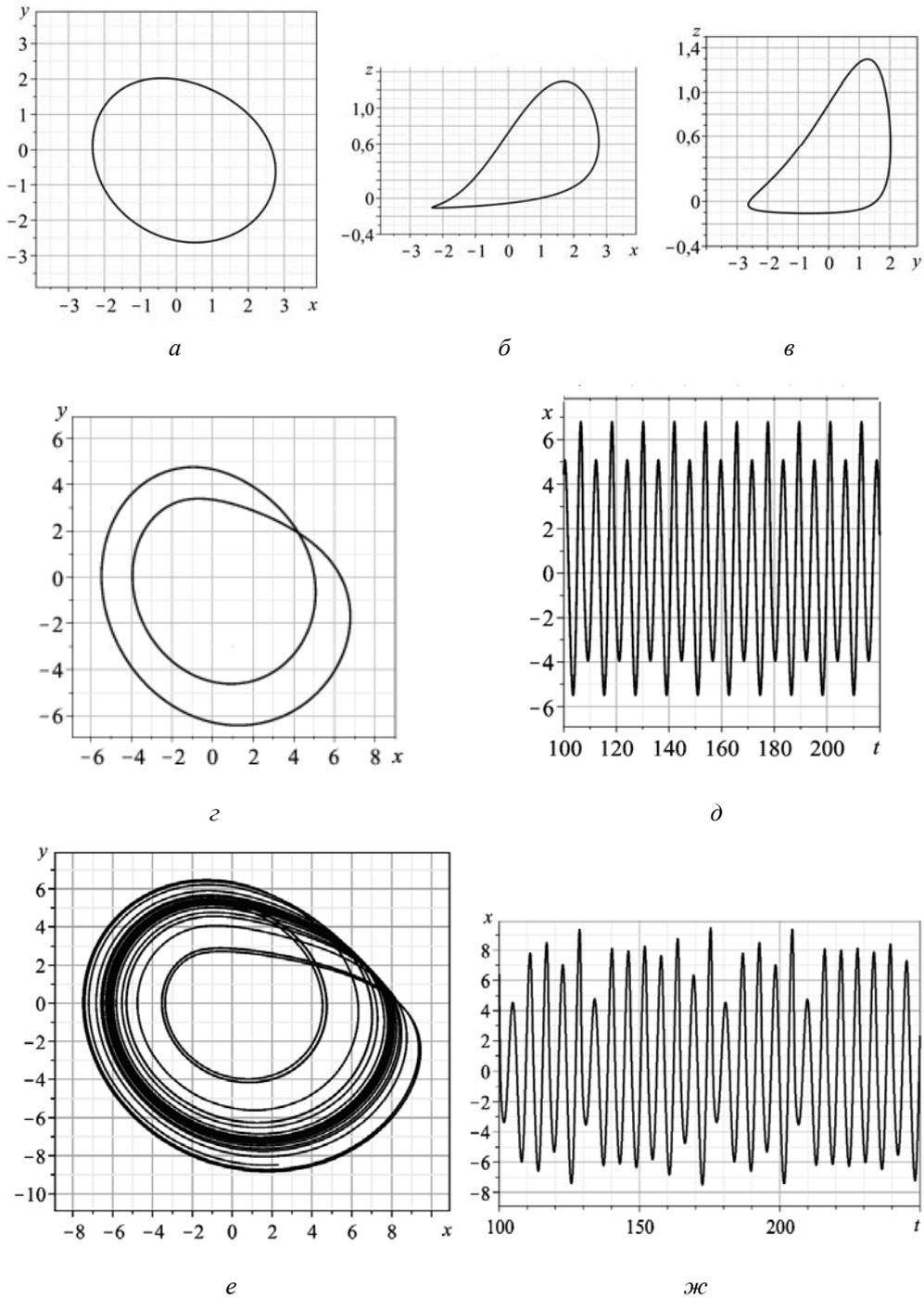


Рис. 1

Таким образом, Теорема 1 устанавливает существование аттрактора определенного типа в трехмерной системе (1).

## 2. Пример 2. Трехмерная система с плоским аттрактором.

Базовая модель земного динамо является трехмерной системой с плоским аттрактором. Перерастание плоского аттрактора в трехмерный является переходом регулярного аттрактора в странный. Рассмотрим возникновение механизма потери устойчивости орбиты.

Палеомагнитные исследования показали, что магнитное поле Земли претерпевает изменение направления (полярности) на обратное. В течение последних сотен миллионов лет смена направления происходит нерегулярным образом. Помимо подробной магнитогидродинамической модели построены простые модели. Базовой моделью в теории земного динамо является модель Рикитаки, предложенная в 1955 году [1]. Эта модель описывает систему из двух дисков динамо, соединенных как показано на рис. 2, а. Диски этой модели могут рассматриваться как имитация двух больших вихрей в ядре Земли. Рассмотрим возбуждения полей в двух дисках. Ток  $I_1$  вызывает магнитное поле, в котором второй диск индуцирует ток  $I_2$ . Этот ток в свою очередь вызывает поле, в котором первый диск индуцирует ток  $I_1$ . Нелинейность возникает при учете обратной реакции момента электромагнитной силы на движение, т.е. на угловые скорости  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

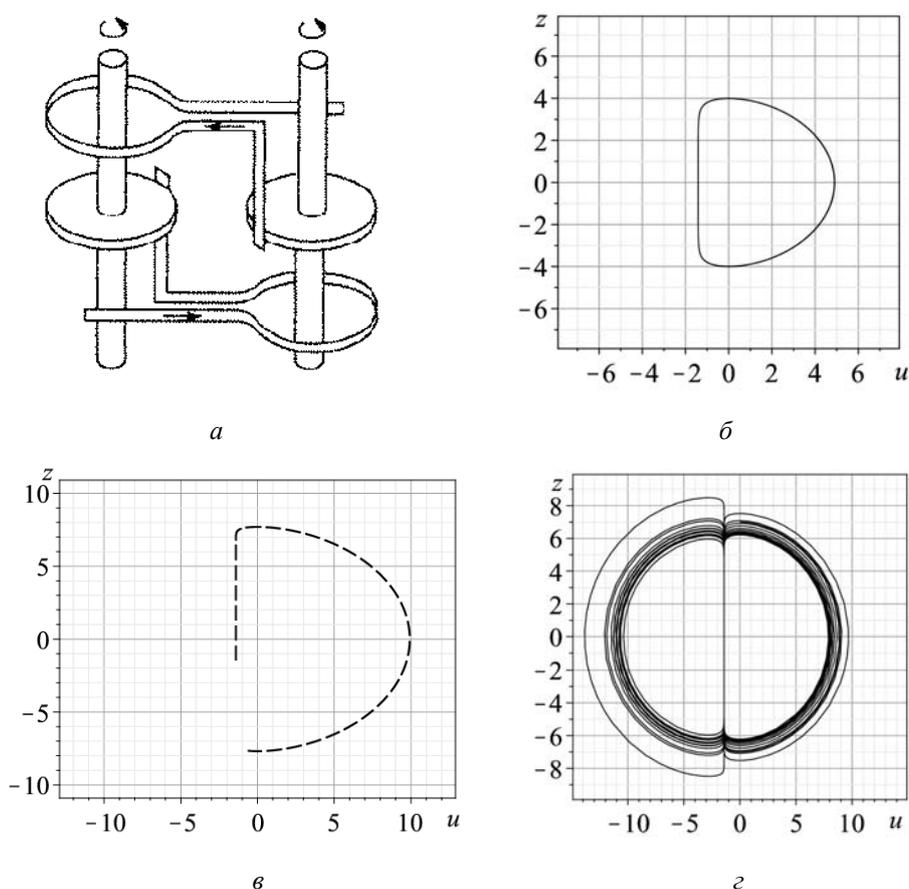


Рис. 2

Согласно законам механики и электродинамики система уравнений в этом случае имеет вид

$$L \frac{dI_1}{d\tau} + RI_1 = MI_2\Omega_1; \quad L \frac{dI_2}{d\tau} + RI_2 = MI_1\Omega_2, \quad (16)$$

где  $L$  – индуктивность дисков;  $R$  – сопротивление контуров;  $M$  – взаимная индуктивность между контуром и диском. Система (16) является уравнениями динамо. Система

$$J \frac{d\Omega_1}{d\tau} = G - MI_1I_2; \quad J \frac{d\Omega_2}{d\tau} = G - MI_1I_2, \quad (17)$$

где  $J$  – момент инерции дисков;  $G$  – момент внешних сил, описывает обратную реакцию электромагнитных сил на движение. Введем безразмерные переменные, следуя Рикитаки [1],  $x_1, x_2, x_3, x_4, t$ :

$$I_1 = x_1 \sqrt{\frac{G}{M}}; I_2 = x_2 \sqrt{\frac{G}{M}}; \Omega_1 = x_3 \sqrt{\frac{GL}{JM}}; \Omega_2 = x_4 \sqrt{\frac{GL}{JM}}; \tau = t \sqrt{\frac{JL}{MG}}.$$

Система (16), (17) в безразмерном виде запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1 + x_2 x_3; \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 + x_1 x_4; \frac{dx_3}{dt} = 1 - x_1 x_2; \frac{dx_4}{dt} = 1 - x_1 x_2. \quad (18)$$

Здесь  $\mu = R\sqrt{J/(GLM)}$  – коэффициент омической диссипации. Из системы (18) следует, что разность угловых скоростей есть величина постоянная:  $x_3 - x_4 = a$ , где  $a = \text{const}$ . Примем следующее значение параметра:  $a = 0$ .

Находим значения координат особых точек системы (18) из системы уравнений

$$-\mu x_1 + x_2 x_3 = 0; -\mu x_2 + x_1 x_4 = 0; 1 - x_1 x_2 = 0. \quad (19)$$

Квадрат значения координаты  $x_1$  обозначим  $v$  и определяем из системы уравнений (19), т.е. имеем

$$v = \pm\sqrt{1}; v^2 - 1 = 0.$$

В системе (18) имеют место две особые точки:  $A(\sqrt{v}, 1/\sqrt{v}, \mu/v)$ ,  $B(-\sqrt{v}, -1/\sqrt{v}, -\mu/v)$ .

Введем систему координат, связанную с точкой  $A$ :  $x = x_1 - \sqrt{v}$ ,  $y = x_2 - 1/\sqrt{v}$ ,  $z = x_3 - \mu/v$  и запишем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\mu x + \mu y + \frac{z}{\sqrt{v}} + yz; \frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{v} x - \mu y + \sqrt{v} z + xz; \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{x}{\sqrt{v}} - \sqrt{v} y - xy. \end{aligned} \quad (20)$$

Примем значение параметра  $\mu = 1$ . Характеристическое уравнение, соответствующее системе (20), имеет вид

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0. \quad (21)$$

Особые точки системы (20) (согласно уравнению (21)) не содержат седловых решений:  $\text{Im}\lambda_1 < 0$ ,  $\text{Im}\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ . Точки называются узлофокусные. Повернем систему осей  $Axyz$  на угол  $\gamma = \arctg(1/v)$ .

$$u = x \cos \gamma + y \sin \gamma; w = -x \sin \gamma + y \cos \gamma.$$

В новой системе координат  $Auwz$  трехмерная система примет вид

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2}z + uz; \frac{dw}{dt} = -2\mu w - wz; \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2}u - u^2/2. \quad (22)$$

Рассмотрим систему (22) в общем виде:

$$\frac{du}{dt} = F_1(u, z); \frac{dw}{dt} = F_2(w, z); \frac{dz}{dt} = F_3(u).$$

**Теорема 2.** *Трехмерная система (22) образует плоский регулярный аттрактор с одной осью симметрии.*

*Доказательство.* Первый признак существования плоского аттрактора состоит в том, что особая трехмерная точка не содержит седловые решения, а содержит лишь узлофокусные решения. Параметры системы, которые образуют узлофокусные решения в окрестности особой точки, предполагают также существование регулярного плоского аттрактора. В этом аттракторе имеют место седловые решения в точках, которые не влияют на регулярный характер аттрактора. Правые части первого и третьего уравнений системы (22) удовлетворяют следующим условиям:

$$F_1(u, -z) = -F_1(u, z); \quad F_3(u, -z) = F_3(u, z). \quad (23)$$

На основе принципа симметрии для двумерных систем можно заключить, что в системе (22) существует замкнутая траектория, если выполняются условия (23) (условия четности функции  $F_1(u, -z)$  относительно  $z$  и нечетности  $F_3(u)$  относительно  $z$ ). Здесь (согласно (23)) ось  $Au$  является осью симметрии. Таким образом, в системе (22) замкнутая траектория существует на плоскости  $uz$ . Существование аттрактора в трехмерной системе установлено с помощью принципа симметрии для двумерных систем [8]. Образование регулярного аттрактора происходит в пределах следующих начальных условий:  $|z_0| < |\pm z^*|, u_0 = 0$ . На рис. 2, б приведена замкнутая относительно особой точки  $A$  траектория. Зададим начальные условия по  $z$  в системе (22). Построим регулярный плоский предельный цикл системы (22) (рис. 2, б). Слева на границе ( $u = -\sqrt{2}$ ) ХП такие:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$ . Симметричный цикл системы (24) образуется слева.

Введем систему координат, связанную с точкой  $B$ :  $x = x_1 + \sqrt{v}, y = x_2 + 1/\sqrt{v}, z = x_3 + \mu/v$  и запишем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\mu x + \mu y - \frac{z}{\sqrt{v}} + yz; & \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu}{v} x - \mu y - \sqrt{v}z + xz; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{x}{\sqrt{v}} + \sqrt{v}y - xy. \end{aligned}$$

В системе координат  $Buvw$  в трехмерной системе выполняются условия вида (23). Траектория располагается в плоскости  $uz$ . Здесь оси связаны с особой точкой  $B$ :

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{2}z + uz; \quad \frac{dw}{dt} = -2\mu w - wz; \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{2}u - u^2/2. \quad (24)$$

Для системы (24), как и для (22), можно привести Теорему 2 о существовании плоского аттрактора.

### 3. Механизм возникновения неустойчивости орбиты в системе с плоским аттрактором.

Рассмотрим механизм возникновения орбитной неустойчивости, которая связана с переходом изображающей точки справа налево и наоборот в полуплоскостях  $Auz, Buz$ . Введем малые отклонения  $\delta u, \delta w, \delta z$  в системе (22) от частных решений  $\bar{u}(t), \bar{w}(t), \bar{z}(t)$  и составим уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d\delta u}{dt} &= \sqrt{2}\delta z + \bar{u}\delta z + \bar{z}\delta u; & \frac{d\delta w}{dt} &= -2\mu\delta w - \bar{w}\delta z - \bar{z}\delta w; \\ \frac{d\delta z}{dt} &= -\sqrt{2}\delta z - \bar{u}\delta u. \end{aligned} \quad (25)$$

ХП точек поля, которое порождает система в вариациях (25), находятся согласно характеристического уравнения системы (25). Численное решение соответствует частным решениям  $\bar{u}(t), \bar{z}(t)$ .

Обратимся к рис. 2, в. Точки образующие вертикальный участок траектории, на котором ХП в силу характеристического уравнения системы (25) имеют следующие ХП:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$ . Согласно этих ХП траектория поднимается вверх до точки, в которой  $z = 0$ . Далее ХП такие:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$ , причем

$$|\lambda_2| > |\lambda_1|. \quad (26)$$

Условие (26) соответствует продвижению траектории вверх, где в окрестности точки ( $u = 0,88, z = 7,62$ ) появляются точки с тремя ненулевыми ХП:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ . Далее седлоузловые точки переходят в седлофокусные. В данном случае на рис. 2, в происходит поворот траектории и седловые решения на этом участке при каждом повороте приводят к несовпадению траекторий. Это порождает хаотический аттрактор.

Увеличение начальных возмущений по  $z$  изменяет топологию поля ХП так, что траектория переходит из одной области в другую. Момент перехода изображающей точки через вертикальную границу между предельными циклами совершается мгновенно, поэтому на решении оно не отражается. На рис. 2, в приведен плоский стохастический аттрактор. Определение ХП точек осуществляется в силу трехмерной системы в вариациях (25). Странный аттрактор так и остается плоским, однако ХП в момент перехода имеют вид седлоузловых либо седлофокусных. Появление седлофокусных решений вносит стохастичность. Реализуется странный аттрактор.

#### Заключение.

Таким образом, рассмотрены два случая существования аттракторов в трехмерной системе и проанализированы причины хаотизации аттракторов. Первый случай связан с Теоремой 1. Пример этого случая – аттрактор Рёсслера, который не обладает симметрией на координатных плоскостях (на одной плоскости имеет место приближенную кососимметрию). Механизм образования хаоса связан с возникновением седловых решений, которые (по сравнению с фокусными решениями) вносят увеличение периода колебаний (кратное увеличение). Кратное увеличение периода (при изменении параметров) переходит в хаос.

Второй случай относится к существованию в трехмерной системе плоских аттракторов (частный случай задачи Рикитаки). Две узлофокусные особые точки на плоскости порождают два аттрактора. Для одних начальных условий аттракторы имеют общую границу и траектория не переходит эту границу. При других начальных условиях происходит стохастический переход траектории из одной области в другую. Граница (вертикальная линия) между аттракторами заполнена точками с ХП  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$ . Ориентировка седловых ХП точек при разных значениях координат  $z$  меняется таким образом, что при  $|z_0| < |\pm z^*|$  – аттрактор регулярный (плоский) – переход из области в область закрыт (рис. 2, б); при  $|z_0| > |\pm z^*|$  – аттрактор странный и плоский (рис. 2, в). Странный аттрактор остается плоским в результате мгновенного перехода из одной области в другую.

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано два випадки існування аттракторів в базових моделях тривимірної системи.

1. Куж А., Робертс П. Система двухдискового динамо Рикитаки // Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 164 – 292.
2. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.

3. *Никитина Н.В.* Принцип симметрии в трехмерных системах // Доп. НАН України. – 2017. – № 7. – С. 21 – 28.
4. *Leonov G.A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: St. Peterburg Univ. Press, 2008. – 160 p.
5. *Martynuk A.A., Nikitina N.V.* Stability and Bifurcation in a Model the of Earth Magnetic Field of Earth // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 721 – 731.
6. *Martynuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcations and Multi-Stability of the Oscillations of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 232.
7. *Martynuk A.A., Nikitina N.V.* Of Periodical Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
8. *Neimark, Yu.I., Landa, P.S.* Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
9. *Nemytskii V.V., Stepanov V.V.* Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
10. *Rössler O.E.* Chemical turbulence: chaos in a simple reaction-diffusion system // Z. Naturforsch. – 1976. – **31a**, №10. – P. 1168 – 1172.
11. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 с.
12. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 с.

Поступила 15.06.2017

Утверждена в печать 22.11.2018