

Н. Н. Дихтярук, О. В. Куриненко, Е. А. Поплавская,  
Н. Н. Самарук

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНЕЧНОГО СТРИНГЕРА  
И ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ПОЛОС С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*Хмельницкий национальный университет,  
ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина;  
e-mail: [mega-dihtyaruk@ukr.net](mailto:mega-dihtyaruk@ukr.net)*

**Abstract.** Within the framework of linearized theory of elasticity, a plane contact problem is solved on passing the concentrated load from the stringer to two compressed by one end identical stripes with initial stresses. An analysis is carried out for the theory of large initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations for the elastic potential of arbitrary form. A solving the problem relative to the tangential contact stresses is reduced to solving the integro-differential equations that are solved in the form of Jacobi's polynomials. Further, after some transformations the quite quasi-regular infinite system of linear algebraic equations is obtained that is solved by the known numerical methods. It is shown that the initial stresses in elastic strips influence essentially on a law of distribution of contact stresses. Namely, in the case of compression the contact stresses decrease essentially (in the case of tension – increase) whereas the displacements in the case of compression increase and of tension – decrease. The highly elastic materials show more essential quantitative influence as compared with the rigid materials. The qualitative influence is similar for all materials.

**Key words:** contact problem, linearized theory of elasticity, stripe, initial compression (tension), initial deformation.

**Введение.**

Одним из наиболее распространенных на практике способов передачи внешних усилий является контактное взаимодействие. Поэтому исследование контактных задач – это весьма актуальная проблема на протяжении многих лет. Не менее важным фактором (наряду с другими), оказывающим существенное влияние на надежность и долговечность инженерных сооружений, механических конструкций и деталей машин, является наличие в них начальных (остаточных) напряжений [1, 9].

Отметим, что по проблемам, относящихся к контактным задачам для упругих, пластических и вязкоупругих тел без начальных напряжений, получены результаты по широкому кругу вопросов. Все эти исследования рассмотрены в многочисленных изданиях монографического и учебного характера, а также отражены в периодических изданиях. Исследование вопросов контактных взаимодействий, связанных с передачей нагрузки от упругих накладок (стрингеров) разной формы и длины к массивным телам в случае отсутствия начальных напряжений (классический случай) приведено в [5]. Впервые контактные задачи для предварительно напряженной полуплоскости и накладок рассмотрены в работах [1, 7]. Влияние начальных напряжений, присутствующих в упругой полосе, на контактное взаимодействие с упругими накладками исследовано в работах [3, 4]. Материалы данной работы отличаются от ранее опубликованных тем, что здесь впервые рассмотрено и исследовано контактное взаимодействие накладки конечной длины с двумя предварительно напряжёнными полосами.

### §1. Постановка задачи. Основные соотношения.

В рамках линеаризованной теории упругости [1, 7] изложим постановку и решение задачи о передаче нагрузки от накладки конечной длины к двум одинаковым, заземленным по одному краю полосам с начальными напряжениями.

Предположим, что две бесконечные упругие полосы изготовлены из одинаковых сжимающихся или несжимающихся материалов с потенциалом произвольной структуры. В данных полосах действуют одинаковые начальные (остаточные напряжения). Принимаем, что полосы соединены между собой упругой накладкой длиной  $2a$ , малой толщины  $h$  и толщиной полос  $t$ . Начальные напряжения в упругой накладке отсутствуют. Модуль упругости материала накладки  $E_1$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1$ . В средней точке упругой накладки действует горизонтальная сила  $Q_0\delta(y_1)$  (рис. 1).

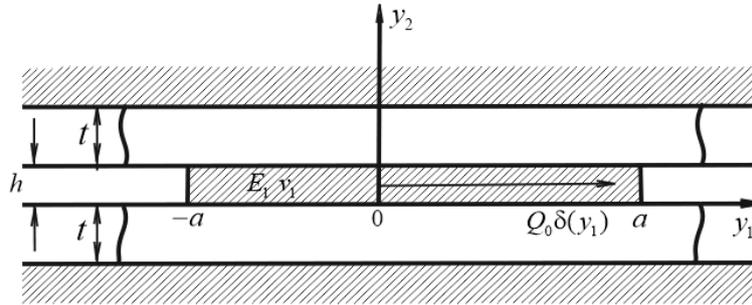


Рис. 1

Определим закон распределения нормальных и тангенциальных напряжений вдоль линии соединения  $[-a; a]$  накладки с предварительно напряжёнными полосами. При рассмотрении данной задачи принимаем и в дальнейшем всегда придерживаемся основных известных положений в теории контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями [1, 2, 7, 12].

Как известно из теории сопротивления материалов, под действием приложенной нагрузки и только тангенциальных контактных напряжений, стрингер растягивается (или сжимается) как стержень и находится в одноосном напряженном состоянии [13, 15]. Примем, что вдоль горизонтальной оси вертикальные упругие перемещения постоянные, что обусловлено малой толщиной стрингера.

Обозначим интенсивности нормальных и тангенциальных контактных напряжений  $-p(y_1)$  и  $q(y_1)$ , а вертикальные и горизонтальные перемещения точек стрингера – соответственно,  $v^{(1)}(y_1)$  и  $u^{(1)}(y_1)$ . Тогда можно записать, что

$$\frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [2q(t) - Q_0\delta(t)] dt \quad (-a < y_1 < a); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = 0; \quad \forall y_1 \in (-a < y_1 < a);$$

$$\left[ \int_{-a}^{y_1} q(t) dt \right]_{y_1=a} = \frac{Q_0}{2}; \quad (1.2)$$

$$\left[ \int_{-a}^{y_1} p(t) dt \right]_{y_1=a} = 0. \quad (1.3)$$

При условии полного контакта по линии контакта должны выполняться условия:

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1^{(2)}(y_1)}{\partial y_1} \quad (-a < y_1 < a). \quad (1.4)$$

Здесь  $u^{(1)}(y_1)$ ,  $v^{(1)}(y_1)$  – компоненты вектора перемещений в упругом стрингере;  $u_1^{(2)}(y_1)$ ,  $u_2^{(2)}(y_1)$  – компоненты вектора перемещений в упругих полосах с начальными напряжениями.

Приняв во внимание (1.1) – (1.4) относительно неизвестных контактных напряжений  $p(t)$ ,  $q(t)$ , опустив некоторые преобразования, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dy_1} \left[ \int_{-a}^a h_{11}(|y_1-t|) p(t) dt + \int_{-a}^a h_{12}(y_1-t) q(t) dt \right] = 0 \quad (-a < y_1 < a); \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dy_1} \left[ \int_{-a}^a h_{21}(y_1-t) p(t) dt + \int_{-a}^a h_{22}(|y_1-t|) q(t) dt \right] = \frac{1}{E_1 h} \left[ 2 \int_{-a}^{y_1} q(t) dt - Q_0 \theta(y_1) \right].$$

Здесь  $\theta(y_1)$  – функция Хевисайда, а  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – функции влияния для упругой полосы с начальными напряжениями, выражения которых задаются [4, 15, 16].

## §2. О преобразовании системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Подставляя в (1.5) выражения  $h_{ij}(y_1)$ ,  $i, j = 1, 2$ , используя при этом [3, 4, 16] и произведя замену переменных

$$y_1 = a\xi; \quad t = a\eta, \quad (2.1)$$

после ряда преобразований, полагая

$$\chi^*(x) = p^*(x) + iq^*(x) \quad (x = \xi, \eta), \quad (2.2)$$

в результате получим, что система уравнений (1.5), которая должна рассматриваться вместе с условиями (1.2) и (1.3) к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению –

$$\begin{aligned} \chi^*(\xi) + ic_1^* \int_{-1}^1 \frac{\chi^*(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + ic_1^* \int_{-1}^1 \tilde{h}_{11}(\xi - \eta) \chi^*(\eta) d\eta + \\ + ic_1^* \int_{-1}^1 \tilde{h}_{22}(\xi - \eta) \bar{\chi}^*(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{h}_{12}(\xi - \eta) \chi^*(\eta) d\eta + \\ + ic_2^* \int_{-1}^{\xi} [\bar{\chi}^*(\eta) - \chi^*(\eta)] d\eta = c_2^* \theta(\xi) \quad (-1 < \xi < 1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

а условия (1.2), (1.3) представим в таком виде:

$$\left[ \int_{-1}^{\xi} \chi^*(\eta) d\eta \right]_{\xi=1} = i/2, \quad (2.4)$$

где  $\tilde{h}_{ij}(y_1)$ ,  $c_1 = c_1(n_j, m_j, l_j, c_{44}, \lambda_1)$ ;  $c_2 = c_2(n_j, m_j, l_j, c_{44}, \lambda_1)$  – функции, которые определяют вид упругого потенциала и в каждом конкретном случае определяются, согласно формул [3, 4, 16].

### §3. О решении основного уравнения.

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (2.3) при условии (2.4).

Решение уравнения (2.3) ищем в виде рядов по полиномам Якоби

$$\chi^*(\xi) = w^{-1}(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1). \quad (3.1)$$

Здесь  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) \Big|_{n=0}^{\infty}$  – многочлены Якоби, ортогональные на отрезке  $[-1; 1]$  с весом

$$w^{-1}(\xi) = (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta; \quad (3.2)$$

$\alpha = -0,5 - i\alpha_1$ ;  $\beta = -0,5 + i\alpha_1$ ;  $\alpha_1 = \ln \psi(\lambda_1) / 2\pi$ ,  $\psi(\lambda_1)$  – функция, которая определяет начальное деформированное состояние и определяется для конкретных потенциалов с учётом формул [1, 16];  $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$  – неизвестные комплексные коэффициенты, подлежащие вычислению.

Подставляя  $\chi^*(\xi)$  (3.1) в сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (2.3), используя ортогональность многочленов Якоби [15], методику [14, 16, 17], после ряда преобразований для вычисления неизвестных коэффициентов  $\chi_n$ ,  $\bar{\chi}_n$ , получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$l_m X_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (K_{m,n}^{(1)} X_n + K_{m,n}^{(2)} \bar{X}_n) = -[P_m + K_m^{(1)} X_0 + K_m^{(2)} \bar{X}_0] \quad (m = 1, 2 \dots), \quad (3.3)$$

где введены такие обозначения:

$$l_m = \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(m-\beta)}{(m!)^2 \operatorname{sh}\pi\alpha_1}; \quad K_{m,n}^{(1)} = P_{m,n}^{(12)} - P_{m,n}^{(11)} + P_{m,n}^{(13)}; \quad K_{m,n}^{(2)} = P_{m,n}^{(22)} + P_{m,n}^{(23)};$$

$$K_m^{(1)} = P_m^{(11)} + P_m^{(12)} + P_m^{(13)}; \quad K_m^{(2)} = P_m^{(22)} + P_m^{(23)}; \quad P_m = i\lambda_2^* \int_0^1 w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$P_{m,n}^{(1j)} = \frac{(2-j)\lambda_1^* + (j-1)i}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \tilde{h}_{1j}(\xi-\eta) \bar{w}(\eta) P_{n-1}^{(-\beta, -\alpha)}(\eta) d\eta \right] w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$P_{m,n}^{(j3)} = \frac{\lambda_2^*}{2} \int_{-1}^1 \left[ (2-j)(i-\xi^2) P_{m-1}^{(-\beta, -\alpha)}(\xi) + (j-1)[w(\xi)]^2 P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) \right] P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$P_m^{(1j)} = \frac{\pi(2-j)\lambda_1^* + (j-1)i}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \tilde{h}_{1j}(\xi-\eta) w^{-1}(\eta) d\eta \right] w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$P_m^{(j3)} = \lambda_2^* \int_{-1}^1 [(2-j)H_0(\xi) + (j-1)\bar{H}_0(\xi)] w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2);$$

$$P_{m,n}^{(22)} = \frac{\lambda_1^*}{2} \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \tilde{h}_{22}^*(\xi-\eta) w(\eta) P_{n-1}^{(-\beta, -\alpha)}(\eta) d\eta \right] w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$P_m^{(22)} = \lambda_1^* \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \tilde{h}_{22}^*(\xi-\eta) [\bar{w}(\eta)]^{-1} d\eta \right] w(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi) d\xi;$$

$$H_0(\xi) = [(3-2i\alpha_1)w(\xi)]^{-1} (1+\xi^2) F(1, 3; (5/2) - i\alpha_1; (1+\xi)/2);$$

$\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция;  $F(a, b, c, y)$  – гипергеометрическая функция Гаусса;  $h_{ij}^*(y_1)$ ,  $\tilde{h}_{ij}^*(y_1)$  – функции, которые определяют вид упругого потенциала и в каждом конкретном случае определяются согласно формулам [3, 4, 16].

Коэффициент  $X_0$ , входящий в правую часть системы (3.3), определяется из граничного условия (2.4) и в результате непосредственно получаем формулу

$$X_0 = \frac{\text{ch} \pi \alpha_1}{2\pi} i. \quad (3.4)$$

Если учесть квазирегулярность системы и асимптотические формулы Дарбу для многочленов Якоби [7, 16], в случае  $\text{Re}(\alpha, \beta) > -1$  можно показать, что

$$S_m = P_m^* m^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} \left[ |K_{m,n}^{(1)}| + |K_{m,n}^{(2)}| \right]$$

и свободные члены  $d_m = l_m^* m^\varepsilon \left[ \|P_m\| + |K_m^{(1)} X_0| + |K_m^{(2)} \bar{X}_0| \right]$ , где  $l_m^* = (ml_m)^{-1} = 0(1)$  имеют, по крайней мере, порядок  $O(m^{-0,5+\varepsilon})$ , если  $m \rightarrow \infty$ .

Такие оценки дают возможность утверждать, что система вполне квазирегулярна для произвольных значений физических и геометрических параметров широкого класса конструкционных материалов; соответственно, её можно решить известными численными методами.

Для получения числовых результатов используем систему (3.3) и решения (3.1). Из последнего, используя метод последовательных приближений и асимптотические формулы Дарбу для полиномов Якоби [5, 6, 16] получим довольно удобные для вычислений выражения для тангенциальных и нормальных контактных напряжений:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\xi) = & -\frac{\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \frac{\text{sh} \pi \alpha_1}{2\pi(1+c_2)(1-2c_2)} \left( \cos \left[ \frac{\varphi(\xi)}{2} \right] [\text{ch} \pi \alpha_1 \ln 2(1-\sqrt{1-\xi^2}) + \varphi_3(\xi)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{sh} \pi \alpha_1 \sin \left[ \frac{\varphi(\xi)}{2} \right] \varphi_4(\xi) \right) - (\varphi_1(\xi) \sin[\varphi(\xi)] + \varphi_2(\xi) \cos[\varphi(\xi)]) \right\} \quad (-1 < \xi < 1); \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\xi) = & \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \frac{\text{sh} \pi \alpha_1}{2(1+c_2)(1-2c_2)} \left( \sin \left[ \frac{\varphi(\xi)}{2} \right] \cdot [\text{ch} \pi \alpha_1 \ln 2(1-\sqrt{1-\xi^2}) + \varphi_3(\xi)] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{sh} \pi \alpha_1 \cos \left[ \frac{\varphi(\xi)}{2} \right] \varphi_4(\xi) \right) + (\varphi_1(\xi) \cos[\varphi(\xi)] - \varphi_2(\xi) \sin[\varphi(\xi)]) \right\} \quad (-1 < \xi < 1); \quad (3.6) \end{aligned}$$

функции  $\varphi_i(\xi)$  определяем, используя формулы

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= R_\nu \left[ \sum_{n=0}^1 X_n P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) + \sum_{n=2}^1 \left( X_n - \frac{L_n^{(1)}}{\sqrt{n}} \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) d\xi \right]; \\ \varphi_2(\xi) &= I_m \left[ \sum_{n=0}^1 X_n P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) + \sum_{n=2}^1 \left( X_n - \frac{L_n^{(1)}}{\sqrt{n}} \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) d\xi \right]; \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\varphi_3(\xi) = \ln 2 \left( 1 + \sqrt{1-\xi^2} + 2(\text{ch} \pi \alpha_1 - 7) \sqrt{1-\xi^2} \right);$$

$$\varphi_4(\xi) = \pi \text{sqn}(\arcsin \xi) - (\arcsin \xi + 2\xi); \quad \varphi(\xi) = \alpha_1 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Эти формулы дают возможность определить безразмерные величины контактных напряжений для упругих потенциалов конкретной структуры, а именно: гармонического потенциала; потенциала Бартенева – Хазановича, потенциала Трелоара (для неогуковских материалов).

На основании формул (3.6) выполнен численный анализ [8, 9], результаты которого представлены в виде графиков (рис. 2, 3). На графиках показано распределение контактных напряжений под накладкой для потенциалов простейшей структуры: гармонического потенциала (рис. 2), потенциала Бартенева – Хазановича (рис. 3), а для потенциала Трелоара результаты (графики) качественно совпадают с данными (рис. 3) и отличаются только количественно.

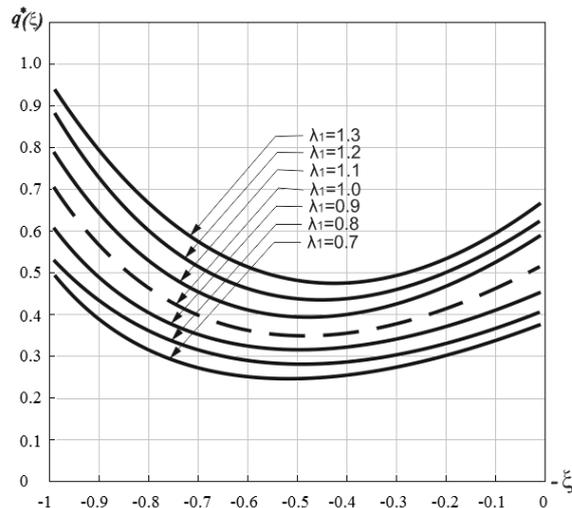


Рис. 2

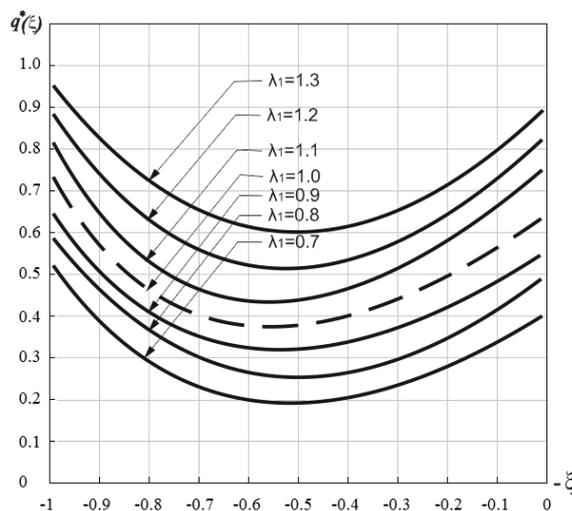


Рис. 3

Здесь  $q^*(\xi)$  – безразмерные контактные тангенциальные напряжения. Значение  $\lambda_1 = 1$  (на графиках пунктирная линия) – соответствует классической теории упругости и совпадает с результатами работы [5];  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$  – соответствует начальным напряжениям сжатия;  $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$  – соответствует начальным напряжениям растяжения ( $t$  – безразмерная координата начального напряжённого состояния в упругих полосах с начальными напряжениями).

### Заключення.

В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від скінченного стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими напруженнями. Проведено дослідження в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язок задачі відносно тангенціальних контактних напружень зведено до сингулярного інтегро-диференційного рівняння, розв'язок якого визначено у вигляді ряду з поліномами Якобі. В подальшому, після ряду перетворень, отримана цілком квазірегулярна нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої визначається за допомогою відомих числових методів. Початкові напруження в пружних смугах істотно впливають на закон розподілу контактних напружень, а саме: при стиску контактні напруження значно зменшуються (при розтягу – збільшуються), а переміщення при стиску значно зростають (при розтягу – зменшуються). Більш істотний вплив (кількісного характеру) початкові напруження мають у високоеластичних матеріалах, в порівнянні з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має аналогічний характер.

РЕЗЮМЕ. В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від скінченного стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими напруженнями. Проведено дослідження в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язок задачі відносно тангенціальних контактних напружень зведено до сингулярного інтегро-диференційного рівняння, розв'язок якого визначено у вигляді ряду з поліномами Якобі. В подальшому, після ряду перетворень, отримана цілком квазірегулярна нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої визначається за допомогою відомих числових методів. Початкові напруження в пружних смугах істотно впливають на закон розподілу контактних напружень, а саме: при стиску контактні напруження значно зменшуються (при розтягу – збільшуються), а переміщення при стиску значно зростають (при розтягу – зменшуються). Більш істотний вплив (кількісного характеру) початкові напруження мають у високоеластичних матеріалах, в порівнянні з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має аналогічний характер.

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища шк., 1995. – 305 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
3. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями / Пр. 4-го Міжнародного симпозиуму з трибофатики (ISTF), 23 – 27 вересня 2002 р. – Тернопіль (Україна) / Відп. ред. В.Т.Троценко. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. – С. 426 – 431.
4. Діхтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 3. – С. 63 – 70.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
6. Akopyan V.N., Mirzoyan S.A., Mkhitarjan S. M. The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 176 – 186.
7. Aleksandrov V.M. Optimal control of linear systems with interval constraints // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 55:5 (2015). – P. 758 – 775.
8. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 7. – P. 744 – 765.
9. Bosakov S.V. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 6. – P. 651 – 663.

10. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231–252.
11. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
12. *Guz A.N.* Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 1 – 11.
13. *Dikhtyaruk N.N.* Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses // *Scientific journal of the Ternopil National Technical University.* – 2016 – **83**, N 3. – P. 51 – 61.
14. *Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N.* A Prestressed Elastic Strip with Elastic Reinforcements // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 11. – P. 1354 – 1360.
15. *Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N.* Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P 149 – 155.
16. *Moses O.P., Adewale A.O., Olusegun O.A.* Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces // *World J. of Engineering and Technology.* – 2016. – **4**, N 1. – p. 51 – 58.
17. *Yaretskaya N.A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
18. *Yaretskaya N.A.* The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer // *Bulletin of NAS of Ukraine.* – 2014. – N 1. – P. 57 – 62.
19. *Yuan W.K., Long J.M., Ding Y., Wang G.F.* Micro / Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension // *J. of Applied Mechanics.* – 2017. – **84**, N 1. – P. 011012, Paper No: JAM-16-1460.

Поступила 15.01.2018

Утверждена в печать 22.11.2018