

Л. В. Мольченко¹, И. И. Лоос²

**ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ
ГИБКИХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА**

*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net*

Abstract. The equations of thermomagnetoelasticity are constructed for shells of revolution in the non-stationary magnetic field with allowance for the Joule heat. The thermomagnetoelasticity of a truncated conic shell is analyzed in the axisymmetric statement with allowance for the Joule heat.

Key words: magnetic field, Joule heat, Lorentz force, conical shell.

Введение.

Действие переменных магнитных полей на металлические упругие элементы вызывает появление объемных электродинамических сил и джоулевой температуры, которые при соответствующих параметрах полей вызывают большие деформации конструкций [1, 3, 6, 7, 9 – 15]. Отметим, что учет пондеромоторных сил и джоулевого тепла является определяющим в связанных задачах магнитоупругости.

Строгий анализ физико-механических процессов при электромагнитном взаимодействии включает уравнения движения упругого тела и уравнения электродинамики для области тела (внутренняя задача), а также уравнения электродинамики для вакуума (внешняя задача).

Развитие современной техники, эксплуатация которой связана с взаимодействием различных физических факторов, обуславливает необходимость создания и разработки теории сопряженных полей тонких оболочек. Существенное место среди оболочек занимают вопросы изучения движения гибких оболочек вращения переменной жесткости с учетом электромагнитных эффектов.

В данной работе предложена теория и методика решения задач магнитоупругости оболочек вращения переменной жесткости в геометрически нелинейной постановке при действии джоулевого нагрева. На основании предложенной методики проведено исследование напряженного состояния гибкой конической оболочки с учетом джоулевого тепла.

1. Постановка задачи. Двумерные нелинейные уравнения магнитоупругости гибких оболочек вращения.

Рассмотрим нелинейную задачу магнитоупругости о напряженно-деформируемом состоянии (НДС) проводящих гибких оболочек вращения переменной жесткости, находящихся под действием нестационарного магнитного поля и произвольной механической нагрузки. Принимаем, что изотропная упругая оболочка изготовлена из материала с конечной проводимостью σ и находится во внешнем магнитном поле \vec{H}_0 .

Кроме того, оболочка является проводником равномерно распределенного электрического тока плотности \vec{J}_{cm} .

Пространственные уравнения магнитоупругости в дифференциальной форме в лагранжевых переменных имеют вид [1, 5, 15]

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{rot } \vec{H} = \vec{J}; \text{div } \vec{B} = 0; \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho(\vec{F} + \vec{F}^\wedge) + \text{div } \overset{\wedge}{\sigma},$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{H} – напряженность магнитного поля; \vec{B} – магнитная индукция; \vec{J} – плотность электрического тока; ρ – плотность материала; \vec{F} – объемная механическая сила; \vec{F}^\wedge – объемная сила Лоренца; $\overset{\wedge}{\sigma}$ – тензор внутренних напряжений.

Закон Ома и сила Лоренца, с учетом стороннего тока \vec{J}_{cm} , соответственно, имеют вид

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm} + \sigma[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}]; \quad \rho \vec{F}^\wedge = \vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}] \vec{B}.$$

При построении приближенных (двумерных в материальных переменных) уравнений движения и уравнений электродинамики теории тонких оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке используем гипотезы Кирхгофа – Лява и гипотезы о характере распределения электромагнитного поля [1, 5].

Таким образом, при построении приближенных уравнений магнитоупругости гибких оболочек, которые находятся в магнитном поле, используем следующую группу электромагнитных гипотез:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= E_\alpha(\alpha, \beta, t); E_\beta = E_\beta(\alpha, \beta, t); E_\gamma = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} B_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} B_\beta; \\ J_\alpha &= J_\alpha(\alpha, \beta, t); J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t); J_\gamma = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$H_\alpha = \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-); H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-); H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t).$$

Здесь H_i^\pm ($i = \alpha, \beta, \gamma$) – известные составляющие напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки; (α, β, γ) – ортогональные криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим гибкие изотропные оболочки вращения переменной толщины, координатная поверхность которых замкнута в окружном направлении. За координатную поверхность выбираем срединную поверхность оболочки и отнесем ее в недеформированном состоянии к криволинейной ортогональной системе координат s, θ , где s – длина меридиана; θ – центральный угол в параллельном круге. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат s, θ, γ .

Используя вариационный принцип, учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы (1), уравнения магнитоупругости гибких оболочек вращения принимают такой вид [5]:

уравнения магнитоупругости:

$$\frac{\partial(rN_s)}{\partial s} - \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(F_s + \rho F_s^\wedge) = r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r (F_\theta + \rho F_\theta^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial (r Q_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - r \frac{N_s}{R_s} - \sin \varphi N_\theta + r (F_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial (r M_s)}{\partial s} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s - r S \mathcal{G}_\theta &= 0; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \mathcal{G}_\theta - r S \mathcal{G}_s &= 0; \quad -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right); \\
\sigma \left[E_s - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h}; \\
\sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] &= -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};
\end{aligned} \tag{2}$$

выражения деформаций через перемещения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2; \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\
\chi_{s\theta} &= \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} \\
&\quad \left(\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v \right);
\end{aligned} \tag{3}$$

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
N_s &= D_N [\varepsilon_{ss} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = D_N [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{ss} - (1 + \nu) \varepsilon_T]; \\
S &= D_N \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon_{s\theta}; \quad H = D_M (1 - \nu) \chi_{s\theta};
\end{aligned} \tag{4}$$

$$M_s = D_M [\chi_{ss} + \nu \chi_{\theta\theta} - (1 + \nu) \chi_T]; \quad M_\theta = D_M [\chi_{\theta\theta} + \nu \chi_{ss} - (1 + \nu) \chi_T],$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma;$$

$$D_N = \frac{Eh(s, \theta)}{1 - \nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3(s, \theta)}{12(1 - \nu^2)}.$$

Для составляющих сил Лоренца ρF_s^\wedge имеем формулы:

$$\begin{aligned}
\rho F_s^{\wedge} &= -hJ_{scm}B_{\gamma} - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} B_{\gamma} + \\
&+ \sigma h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)(B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)(B_s^+ - B_s^-) \right] - \right. \\
&\left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-}{\mu} B_{\gamma}; \\
\rho F_{\theta}^{\wedge} &= hJ_{ocm}B_{\gamma} + \sigma hE_{\theta}B_{\gamma} + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] + \right. \\
&\left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)(B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)(B_s^+ - B_s^-) \right] \right\}; \\
\rho F_{\gamma}^{\wedge} &= 0,5h \left[J_{ocm}(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - J_{ocm}(B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - \\
&- 0,5\sigma hE_{\theta}(B_s^+ + B_s^-) + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial w}{\partial t} \left[0,25(B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{(B_{\theta}^+)^2 - (B_{\theta}^-)^2}{\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что в случае использования канонических координат в теории оболочек вращения коэффициенты Ламе срединной поверхности $A=1$; $B=r(s)$, а также $dr/ds = \cos \varphi$, где φ – угол между осью вращения и нормалью к оболочке; $r(s)$ – радиус параллельного круга; $h = h(s, \theta)$ – толщина оболочки.

В соотношениях (2 – 5) введены следующие обозначения: N_s, N_{θ} – нормальное и тангенциальное усилия; S – сдвигающее усилие; Q_s, Q_{θ} – поперечные усилия; M_s, M_{θ}, H – изгибные и крутящий моменты соответственно; u, v, w – компоненты вектора перемещения; E_s, E_{θ} – составляющие напряженности электрического поля; B_{γ} – нормальная составляющая магнитной индукции; $B_s^{\pm}, B_{\theta}^{\pm}$ – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $\vartheta_s, \vartheta_{\theta}$ – углы поворота нормали; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; R_s – главный радиус кривизны; μ – коэффициент магнитной проницаемости; α – коэффициент линейного температурного расширения, $T(s, \theta, \gamma, t)$ – температура тела.

К полученным уравнениям необходимо присоединить начальные и граничные условия.

2. Методика исследования гибких оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях.

При определении НДС токонесущих оболочек в магнитном поле краевую задачу формулируем в смешанном виде, когда в качестве разрешающих функций выбираются некоторые усилия, моменты, перемещения и компоненты электромагнитного поля. Выбор в качестве искомым именно таких функций позволит в дальнейшем рассматри-

вать широкий класс граничных условий без усложнения вычислительной схемы решения краевой задачи. Дифференциальная система уравнений в основных функциях, описывающая НДС токонесущих оболочек в магнитном поле при учете геометрической нелинейности, разрешается относительно первой производной искомых функций по одной из координат.

Выбирая в качестве разрешающих функций, например, $u, v, w, \hat{S}, \hat{Q}_s, \mathcal{G}_s, M_s, H, B_\gamma, E_\theta$, после соответствующих преобразований разрешающая система в векторном виде представляется так [5]:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left(s, \theta, t, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right) \quad (6)$$

с граничными и начальными условиями, соответственно;

$$B_1(\vec{N}(s_0, \theta, t)) = \vec{b}_1; \quad B_2(\vec{N}(s_1, \theta, t)) = \vec{b}_2;$$

$$\vec{N} = 0; \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

где $\vec{N} = (u, v, w, \hat{S}, \hat{Q}_s, \mathcal{G}_s, M_s, H, B_\gamma)^T$ – в общем случае, нелинейная вектор-функция;

B_1, B_2 – известные прямоугольные матрицы; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – заданные векторы.

Полученная система представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений десятого порядка в частных производных с переменными коэффициентами.

Для разделения переменных по времени применим неявную схему Ньюмарка интегрирования уравнений магнитоупругости [5, 12 – 14]. Неявные схемы, в основном, абсолютно устойчивы и позволяют выполнить расчеты с большим временным шагом, однако часто приводят к значительному сглаживанию волновых профилей. Поэтому неявные схемы целесообразно применять в задачах с достаточно гладкими решениями.

Учитывая, что система уравнений (6) является смешанной системой гиперболо-параболического типа, величину шага по времени Δt следует выбирать, руководствуясь соотношениями

$$\Delta t < \min \left\{ \frac{\Delta s / C_M}{0,5 \Delta s^2 \sigma \mu / \rho^2} \right\}. \quad (7)$$

Здесь C_M – скорость распространения магнитоупругих возмущений; Δs – шаг по переменной S .

С учетом схемы Ньюмарка разрешающую систему магнитоупругости (6) на соответствующем временном слое можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F}_1 \left(s, \theta, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4} \right) \quad (8)$$

с граничными условиями

$$D_1(\vec{N}(s_0, \theta)) = \vec{d}_1; \quad D_2(\vec{N}(s_2, \theta)) = \vec{d}_2, \quad (9)$$

где D_1, D_2 – заданные прямоугольные матрицы; \vec{d}_1, \vec{d}_2 – заданные векторы. Краевая задача (8), (9) должна быть дополнена начальными условиями.

На втором этапе двумерную задачу заменяем одномерной (разделяем переменные по θ с помощью метода прямых [3, 5], предполагая, что коэффициенты системы разрешающих уравнений и разрешающие функции – достаточно гладкие функции коор-

динаты θ . Производные по этой координате заменяем их конечно-разностными аналогами. Разделяя интервал изменения координаты θ на n полос, двумерную задачу (8), (9) аппроксимируем нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10n$ для взаимосвязанных функций \vec{N}^i ($i = 1, 2, 3$).

Подставляя в систему (8) и граничные условия (9) вместо производных по координате θ конечно-разностные аналоги, получаем нелинейную систему $10n$ -го порядка, которая в конечных разностях имеет вид

$$\frac{d\vec{N}_1}{ds} = \vec{F}_2(s, \vec{N}_1) \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$\vec{G}_1(\vec{N}_1(s_0)) = \vec{g}_1; \vec{G}_2(\vec{N}_1(s_1)) = \vec{g}_2, \quad (11)$$

где

$$\vec{N}_1 = \{u^1, v^1, w^1, N^1, \hat{S}^1, \hat{Q}^1, M^1, \vartheta^1, B_\gamma^1, E_\theta^1, u^2, v^2, \dots, E_\theta^2, u^n, v^n, \dots, E_\theta^n\}^T.$$

Система уравнений (10) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $10n$ -го порядка с переменными коэффициентами.

Следующий этап преобразования нелинейной краевой задачи магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [2], с помощью которого исходная краевая задача (10), (11) приводится к последовательности линейных краевых задач

$$\frac{d\vec{N}_1^{k+1}}{ds} = \vec{F}_2(s, \vec{N}_1^{k+1}, \vec{N}_1^k); \quad (12)$$

$$\vec{G}_1(\vec{N}_1^k) \vec{N}_1^{k+1}(s_0) = \vec{g}_1(\vec{N}_1^k); \vec{G}_2(\vec{N}_1^k) \vec{N}_1^{k+1}(s_1) = \vec{g}_2(\vec{N}_1^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\vec{N}_1^{k+1}, \vec{N}_1^k$ – соответственно, решения на $(k+1)$ -ой и k -ой итерациях.

На каждом шаге итерационного процесса коэффициенты правой части линейной системы дифференциальных уравнений (12), элементы матриц G_1, G_2 и компоненты векторов \vec{g}_1, \vec{g}_2 граничных условий зависят от количества шагов по координате s и временной переменной t , а также от решения линейной задачи на предыдущем шаге.

В дальнейшем каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [4, 5].

На первом по времени шаге за начальное приближение в итерационном процессе выбираем решение линейной краевой задачи. На следующих шагах – за начальное решение выбираем решение, полученное на предыдущем шаге. Выбор такой схемы существенно уменьшает количество итераций, необходимых для решения задачи.

Изложенная методика позволяет упростить алгоритмизацию вычислительного процесса и решения нелинейных двумерных задач магнитоупругости оболочек вращения.

3. Термодинамические соотношения для определения джоулевой температуры.

Сформулируем уравнения динамической термомагнитоупругости при учете джоулевой температуры, которая возникает в гибкой оболочке при действии на нее магнитного поля в микросекундном диапазоне (переходной процесс) [3, 6, 8].

При расчете температуры $T(s, \theta, \gamma, t)$ используем уравнение баланса тепла в виде $C_v = (\partial T / \partial t) Q_{дж}$, где $Q_{дж} = \vec{J} \vec{J} / \sigma$ – джоулево тепло, выделяющееся в результате циркуляции в оболочке вихревых токов; C_v – удельная теплоемкость.

Плотность магнитной энергии на единицу объема запишем в виде функции $W = 0,5(\vec{B}\vec{H})$, а количество тепла, выделяемого током \vec{J} в единицу времени (мощность джоулева тепла на единицу массы) определяется формулой

$$\dot{Q}_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}. \quad (13)$$

Представим магнитное давление P в виде суммы двух составляющих $P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T)$, где $P_\chi(\rho)$ – составляющая давления, зависящая только от плотности ρ ; $P_T(\rho, T)$ – тепловая составляющая, зависящая от температуры и плотности. Также представим приращение внутренней энергии в виде энергии (без учета температуры и тепловой составляющих), т.е.

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

где

$$\rho dU_\chi = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de; \quad \rho dU_T = 3P_T de + \rho dQ_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad}T) dt; \quad (14)$$

здесь λ_T – коэффициент теплопроводности.

Примем далее, что приращение тепловой энергии пропорционально приращению температуры, т.е. $dU_T = C_\varepsilon(T)dT$; $U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T)dT$, где C_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации. Тогда уравнение (14) можем использовать для вычисления температуры

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad}T). \quad (15)$$

Учитывая, что удельная теплоемкость металлов для температур выше T_0 вплоть до точки плавления изменяется незначительно (не более чем на 5 – 10 % от среднего значения), тепловую энергию можно представить в виде

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T)dT \approx C_\varepsilon^{cp}(T - T_0) + U_{T0}; \quad U_{T0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T)dT,$$

где C_ε^{cp} – среднее значение теплоемкости на интервале $[T_0, T]$.

Следуя [6], уравнение (15) преобразуется в известное уравнение теплопроводности с источником джоулева тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{cp}} \dot{Q}_{дж} + \alpha_T \Delta T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{cp}} \quad (\lambda_T = \text{const}), \quad (16)$$

где α_T – коэффициент тепловой диффузии.

Используя выражение для расчета джоулева тепла, оценим величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в зависимости от величины магнитной индукции \vec{B} . Используя (13) и уравнение Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}$, из соображений теории размерности и на основании (16) имеем

$$\tilde{T} \approx \tilde{T}_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{cp}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \tilde{B}^2 / \mu, \quad (17)$$

где $\alpha_D = 1/\sigma\mu$ – коэффициент магнитной диффузии. В качестве характерного времени принято время диффузии магнитного поля на расстояние \tilde{L} , т.е. $\tilde{t} = \tilde{L}/\alpha_D$. Так как $\alpha_T/\alpha_D \ll 1$ для металлов (например, для алюминия при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ – $\alpha_T/\alpha_D \approx 4,3 \cdot 10^{-6}$; для нержавеющей стали – $\alpha_T/\alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$), то из символического уравнения (17) следует, что процессом теплопроводности в переходном режиме можно пренебречь.

Таким образом, учитывая оценку членов уравнения (16), получаем приближенное уравнение для определения температуры, возникающей в результате джоулева нагрева, в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_\varepsilon^{cp}} Q_{дж} . \quad (18)$$

Как известно, при действии на оболочку магнитного поля в ней возникают объемные силы Лоренца $\rho \vec{F}^\Lambda = \vec{J} \times \vec{B}$. Исходя из уравнений для магнитной энергии оболочки и используя тождество $\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \nabla \vec{A} = 0,5 \nabla (\vec{A} \vec{A})$, выражение для пондеромоторных сил запишем в виде

$$\rho \vec{F}^\Lambda = \vec{J} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{H} \nabla \vec{B} - \frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k ,$$

где $\frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k$ – член силы Лоренца, отвечающий джоулеву нагреву оболочки; \vec{G}^k – базовый вектор; ∇ – оператор в лагранжевой метрике; ξ^k – лагранжевые переменные ($k = 1, 2, 3$).

Таким образом, влияние джоулева тепла учитывается как в уравнениях магнитоупругости, так и в формуле для силы Лоренца.

Исходя из уравнения (18), имеем

$$\frac{h}{2} Q_{дж} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{cp} dT_{II} + \lambda_F (T_{II} - T_C) dt , \quad (19)$$

где T_{II} – температура на поверхности оболочки; T_C – температура срединной поверхности оболочки; λ_F – коэффициент теплоотдачи.

Выражение температуры при изменении вдоль γ принимает вид

$$T = T_{II} + \frac{Q_{дж} h^2}{8\lambda_T} \left[1 - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] .$$

Исходя из симметрии задачи для оболочек вращения, на срединной поверхности тепловой поток $q = 0$ при $\gamma = 0$; на поверхности – $q = Q_{дж} h/2$ и $T = T_{II}$.

С учетом (19) выражение для определения температуры принимает вид

$$T = T_C + \frac{Q_{дж} h^2}{8\lambda_T} \left[1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \dot{T}_{II} .$$

Компоненты электрического тока с учетом стороннего тока имеют вид

$$J_s = J_{cms} + \sigma \left[E_s + 0,5 \frac{\partial W}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right] ;$$

$$J_\theta = J_{cm\theta} + \sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \quad (J_\gamma = 0).$$

В качестве иллюстрации предложенной методики рассмотрим осесимметричную магнитоупругую задачу для гибкой усеченной конической оболочки с учетом джоулевого тепла.

4. Разрешающая система уравнений магнитоупругости гибкой конической оболочки с учетом джоулевой температуры.

Рассмотрим осесимметричную нелинейную краевую задачу магнитоупругости о НДС гибкой конической оболочки постоянной толщины с учетом джоулева тепла. Оболочка – упругая изотропная, изготовленная из алюминия (рис. 1). Полагаем, что на поверхности $\gamma = \pm h/2$ оболочки осуществляется теплообмен по закону Ньютона –

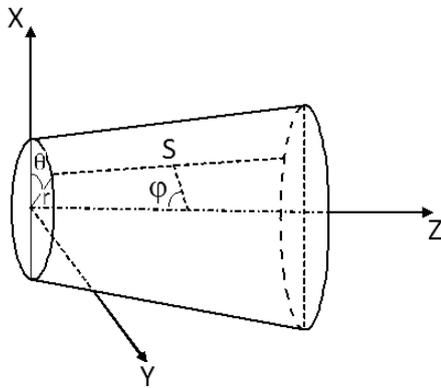


Рис. 1

Рихмана (с коэффициентом теплообмена λ_F) с внешней средой, имеющей температуру 0°C . Также оболочка является проводником стороннего электрического тока плотности \vec{J}_{cm} .

Пусть задача магнитостатики для возмущенного состояния решена, т.е. известны векторы магнитной индукции начального состояния для внешней и внутренней областей. За координатную плоскость выбираем срединную поверхность оболочки, отнесенную к системе координат s, θ , координата γ отсчитывается по нормали к срединной плоскости.

Принимая, что все компоненты возмущенного электромагнитного поля и поля перемещений не зависят от координаты θ , примем [5]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad v = 0; \quad E_s = 0; \quad B_\theta = 0; \quad f_\theta = 0; \quad \rho f_\theta^\wedge = 0; \quad A = 1; \quad B = r.$$

При построении разрешающей системы термомангнитоупругости усеченной гибкой конической оболочки выбраны в качестве искомым функций следующие [3, 5]:

$$u, w, J_s, N_s, M_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

Разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений магнитоупругости осесимметричной изотропной конической оболочки с учетом джоулевой температуры принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1-v^2}{Eh} N_s - \frac{v \cos \varphi}{r} u - \frac{v \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} g_s^2 + (1+v) \varepsilon_T;$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -g_s, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1-v^2)}{Eh^3} M_s - \frac{v \cos \varphi}{r} g_s;$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} \left[(v-1) N_s + Eh \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s + h J_{ocT} B_\gamma -$$

$$-\sigma h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{Eh \cos \varphi}{r} \varepsilon_r + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_s}{\partial s} = & -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_s + Eh \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\ & -0,5hJ_{ocT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma h \left[-0,5E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \right. \\ & \left. + \frac{h}{12} \frac{\partial g_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{Eh \sin \varphi}{r} \varepsilon_r + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} = & \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu - 1) M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] + Q_s + N_s g_s - \\ & - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] g_s; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\mu \sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta,$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = & \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma^2 \left[E_\theta^2 + 0,06 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\ & + \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \dot{T}_H; \quad \chi_T = 0. \end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений (20) является нелинейной смешанной гипербо-ло-параболической системой восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим случай, когда оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической силы $F_\gamma = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t$ Н/м² и внешнего электрического тока $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м². Толщина оболочки постоянная и принимает значения $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м и $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м.

Граничные условия заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = 0; M_s = 0; Q_s = -200; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t \text{ при } s = s_0; \\ u = 0; w = 0; M_s = 0; B_\gamma = 0 \text{ при } s = s_1. \end{aligned}$$

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s = 0 \text{ м}; s_1 = 0,4 \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1};$$

$$\nu = 0,3; \alpha = 2,36 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}; \varphi = \pi / 10;$$

$$\rho = 2670 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \sigma = 3,13 \cdot 10^7 (\text{Ом} \times \text{м})^{-1};$$

$$C_\varepsilon^{\text{сп}} = 820 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}; \lambda_r = 228 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}; \lambda_F = 225 \text{ Вт/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

Решение задачи получено на интервале $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, временной шаг интегрирования $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 2 представлено распределение $w(s)$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с. Кривая 1 соответствует толщине оболочки $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, а кривая 2 – $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м.

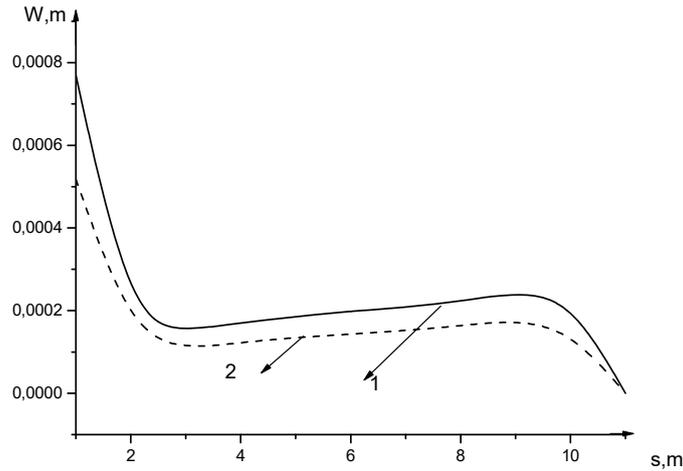


Рис. 2

Максимальные отношения прогиба к толщине оболочки $w/h = 1,54$ при $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м и $w/h = 0,74$ – при $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м. Таким образом, прогиб оболочки при толщине $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м соответствует линейной теории, т.е. дальнейшее увеличение толщины оболочки не представляет интереса со стороны рассматриваемой задачи.

На рис. 3 представлены графики температуры $T(t)$ при $s = 0$ м для толщин, указанных выше.

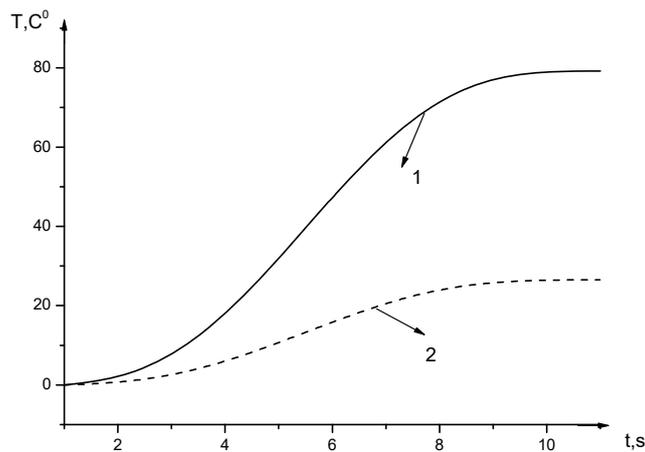


Рис. 3

Как видно из графиков, максимальная температура оболочки при толщине $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м (кривая 1) равняется $79,2^\circ\text{C}$ при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с; максимальная температура оболочки толщиной $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м (кривая 2) равняется $26,5^\circ\text{C}$.

Отметим, что представленные на рис. 2, 3 результаты отвечают механическим и температурным процессам, происходящим в металлических оболочках в микросекундном диапазоне.

В таблице приведены значения $E_\theta(t)$ при $s = 0$ м. Как видно, приведенные величины напряженности электрического поля мало отличаются для рассматриваемых толщин оболочек.

| | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 0,993 | 1,981 | 2,765 | 3,269 | 3,442 | 3,269 | 2,765 | 1,981 | 0,992 | -0,103 |
| 2 | 1,030 | 2,020 | 2,807 | 3,314 | 3,482 | 3,314 | 2,804 | 2,020 | 1,030 | -0,069 |

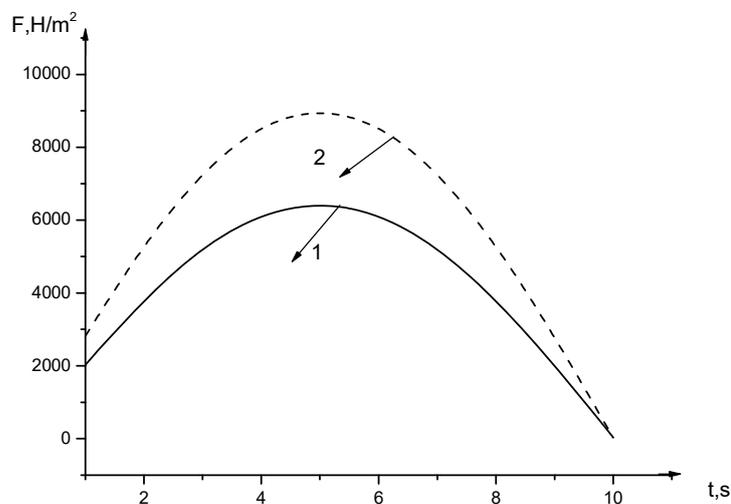


Рис. 4

На рис. 4 показано распределение нормальной составляющей силы Лоренца для соответствующих толщин оболочки в зависимости от времени при $s = 0$ м. Отметим, что значения силы Лоренца для оболочки толщины $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м меньше, чем ее значение при толщине $h = 7 \cdot 10^{-4}$ м, что не противоречит теории тонких оболочек.

Заключение.

На основании полученных нелинейных уравнений термомагнитоупругости с использованием предложенной методики можно определять термонапряженное состояние гибких оболочек вращения с учетом джоулевого нагрева. Предложенная методика позволяет рассматривать различные варианты физико-механических параметров оболочек вращения в геометрически-нелинейной постановке. Нелинейные задачи термомагнитоупругости весьма актуальны с точки зрения технических приложений.

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрена задача осесимметричной усеченной гибкой конической оболочки с учетом джоулевого нагрева. Проанализированы полученные результаты.

РЕЗЮМЕ. Побудовані рівняння термомагнитоупругості для гнучких оболонок обертання з врахуванням джоулевого нагріву в нестационарному магнітному полі. Проаналізовано термопружність зрізаної гнучкої конічної оболонки в осесиметричній постановці з врахуванням джоулевого тепла.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будак В. Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. Монография. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1963. – 16, вып. 5(99). – С. 171 – 174.
5. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости: Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с. (укр).
6. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32 – 47.
7. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – Наука, 1976. – 613 с.
8. Bian Yu-Hong Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 120.
9. Elhajar R., Saponara V., Muliana A. Smart composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press. – 2013. – 430 p.
10. Green A.E., Naghdi P.M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates // Phil. Trans. Roy. Soc. – London. – 1983. – A309. – P. 559 – 610.
11. Hutter K., Van de Ven A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer, 2007. – 382 p.
12. Mol'chenko L.V., Loos I.I. The Stress State of a Flexible Orthotropic Spherical Shell Subject to External Current and Mechanical Force in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 5. – P. 528 – 533.
13. Mol'chenko L.V., Loos I.I., Fedorchenko L.M. Deformation of a Flexible Orthotropic Spherical Shell of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – P. 56 – 61.
14. Mol'chenko L.V., Fedorchenko L. N., Vasilieva L. Yu. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Sells of Revolution with Joule Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54. – N 3. – P. 306 – 314.
15. Moon F.C. Magneto-solid mechanics. – New York: John Wiley & Sons Inc. – 1984. – 448 p.

Поступила 14.02.2018

Утверждена в печать 22.11.2018