

Е. И. Беспалова, Н. П. Борейко

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ СОСТАВНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ РАЗНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. An approach to determining the frequencies and modes of free vibrations is proposed for the compound systems of shells of revolution with different geometry and relative thickness. The shells are made of isotropic, orthotropic, and anisotropic materials with one plane of elastic symmetry and are continuously and (or) discretely inhomogeneous across the thickness. This approach includes the construction of a mathematical model of vibrations based on the classical Kirchhoff – Love theory, refined Timoshenko type theory, 3D elasticity theory (partial case), and numerical-analytical technique of solving the associated 2D (3D) problems by reducing their dimensionality and using the methods of successive approximations and step-by-step search in combination with the orthogonal-sweep method. The examples of solving the problems from various fields of engineering are presented.

Key words: compound shells of revolution, frequencies and modes of free vibrations, classical, refined and 3D elasticity theory, numerical-analytical technique.

Введение.

Расчетные схемы многих конструкций современной техники представлены упругими системами из соосных сопряженных оболочек вращения различных геометрических форм и структур, изготовленных из традиционных и новых композитных материалов. К ним относятся резервуары высокого давления, защитные покрытия ядерных реакторов, корпуса ракет, аппаратов подводного погружения, емкости различного назначения и пр. Требования надежности и долговечности указанных конструкций охватывают широкий круг исследований, включая анализ их динамических характеристик. Знание спектра собственных частот в низкочастотном его участке позволяет отследить резонансные режимы работы сложных объектов и в условиях действия реальных нагрузок предотвратить возникновение аварийных ситуаций.

Эталонными по этой тематике являются исследования колебаний отдельных однородных оболочек нулевой или постоянной гауссовой кривизны из изотропных и ортотропных материалов, которые известны из справочной литературы. Из последних работ по колебаниям отдельных оболочечных элементов следует отметить [7, 11, 16, 22].

При сопряжении в единой системе разнородных оболочек, отличающихся геометрией, толщиной, структурой по толщине и т.п., возникает ряд дополнительных вопросов постановочного и реализационного плана. Они связаны, в частности, с выбором модели деформирования, формулировкой условий сопряжения и рациональной их реализацией в процессе решения соответствующих задач.

Отметим, что колебания составных оболочек исследованы для систем, состоящих из цилиндров, конусов, кольцевых пластин, а также элементов сферического класса, в основном, в рамках моделей Доннелла – Муштари – Флюгге, классической модели Кирхгофа – Лява и значительно реже – с учетом деформаций поперечного сдвига согласно модели Тимошенко – Миндлина – Нагди [8, 14, 18, 19, 21]. Эти исследования ограничены, преимущественно, случаями изотропных и ортотропных материалов.

Так, в [12] проведено экспериментальное и аналитическое исследование резонансных частот изотропной системы цилиндр – усеченный конус в зависимости от угла конусности конического элемента. Аналогичная система при разных граничных условиях в случае однородной и дискретно неоднородной по толщине структуры изучена в [8] и [18]. Система из двух сопряженных изотропных конусов, включающая как частные случаи системы цилиндр – конус, цилиндр – пластина, конус – пластина, исследована в [19]. Кольцевая пластина в соединении с круговым цилиндром или конусом рассмотрена, соответственно, в [9] и [15]. В [10] проведен анализ собственных частот слоистой конструкции из трех элементов – цилиндра и двух конусов, моделирующих фрагмент космического корабля. В [20] исследованы колебания системы сфера – цилиндр – сфера, как расчетной схемы герметической капсулы, а в [17] рассмотрена система конус – цилиндр – сфера с кольцевыми подкреплениями.

Математический аппарат исследования в данных работах базируется на использовании метода конечных элементов в различных его модификациях, смешанных рядов с аппроксимацией тригонометрическими функциями в окружном направлении и ортогональными полиномами по образующей, метода Релея – Ритца с выбором разных систем базисных функций [10, 14, 17, 18, 21]. В отдельных статьях решение получено в аналитическом виде (например, в [12, 19, 20]).

В данной работе рассмотрен подход к определению частот и форм свободных колебаний составных анизотропных систем из оболочек вращения разной геометрии и структуры из композитных материалов (одна и три плоскости упругой симметрии). Подход включает постановку задачи по оболочечным моделям Кирхгофа – Лява, Тимошенко – Миндлина и по пространственной теории упругости (частные случаи), а также численно-аналитическую методику решения соответствующих задач на собственные значения с автоматическим удовлетворением условиям сопряжения.

§1. Объект исследования, исходные положения, постановка задачи.

В качестве объекта исследования выбрана система, состоящая, в общем случае, из J сопряженных между собой соосных оболочек вращения разной геометрии и структуры. Каждая составная оболочка рассматривается как отдельный j -ый участок ($j = \overline{1, J}$) единой оболочечной системы, координатная (или срединная, в частном случае) поверхность которой образована вращением некоторой плоской однозначной кусочно гладкой кривой вокруг прямолинейной оси Oz (рис. 1, а).

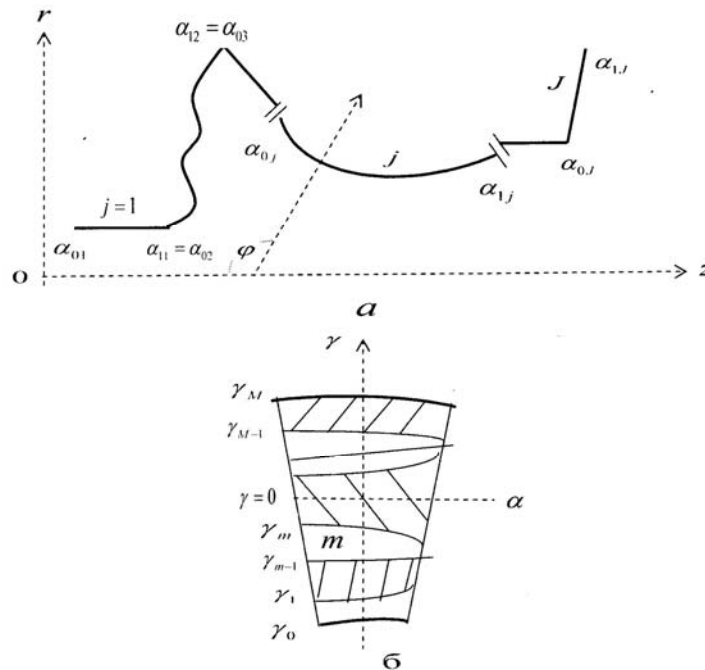


Рис. 1

Положение произвольной точки этой поверхности определяется в ортогональной сопряженной системе координат (α, θ) , где $\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0_j}, \alpha_{1_j})\}$ ($j = \overline{1, J}$) изменяется по меридиану-образующей, а θ – есть центральный угол сечения $z = \text{const}$. Координатная поверхность $\gamma = 0$, как некоторая исходная поверхность отсчета по толщине оболочек, выбирается неформальным образом, а переменная γ отсчитывается по нормали к этой поверхности (рис. 1, б).

Оболочки по толщине γ могут быть тонкими или нетонкими (средней толщины), однослойными или состоять из M слоев постоянной или переменной по меридиану толщины. Смежные m -ый и $(m+1)$ -й слои контактируют между собой по поверхности $\gamma = \gamma_m(\alpha)$ ($m = \overline{1, M-1}$), а внешние ограничивающие поверхности $\gamma = \gamma_0(\alpha)$ и $\gamma = \gamma_M(\alpha)$ являются свободными от нагружения.

На торцах оболочечной системы $\alpha = \alpha_{0_1}$ и $\alpha = \alpha_{1_J}$ принимаются произвольные однородные физически непротиворечивые граничные условия.

Предполагается, что в пределах каждого отдельного j -го участка системы ($j = \overline{1, J}$), т.е. для каждой составляющей оболочки ее геометрические параметры, толщины и физико-механические свойства материала задаются гладкими функциями переменной α .

Исследование колебаний таких составных систем проводится при следующих допущениях.

1. Колебания являются малыми, незатухающими, гармоничными во времени и синфазными.

2. На линиях сопряжения $\alpha_{1_{j-1}} = \alpha_{0_j}$ ($j = \overline{2, J}$) двух смежных $(j-1)$ -го и j -го участков формулируются условия равновесия статических и условия неразрывности кинематических характеристик напряженно-деформированного состояния оболочек в общей системе координат (r, θ, z) .

3. Смежные m -ый и $(m+1)$ -й слои контактируют между собой без отрыва и проскальзывания.

4. Материалы слоев работают в упругой стадии деформирования и могут быть изотропными, ортотропными (три плоскости упругой симметрии) или анизотропными, когда в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной.

5. Математическая модель исследования формулируется на основе известных допущений классической теории Кирхгофа – Лява и сдвиговой теории первого порядка по Тимошенко (уточненная теория Тимошенко) для всего пакета слоев в целом. Дополнительно, на основе пространственной постановки теории упругости рассматривается вспомогательная задача для кругового неоднородного по толщине цилиндра при специальных условиях на торцевых плоскостях.

6. Учитываются инерционные силы, связанные с поступательным смещением элемента координатной поверхности (классическая теория) и дополнительно с его вращением (уточненная теория).

В рамках принятых допущений задача о свободных колебаниях описанных составных оболочек сводится к определению нетривиального решения однородной двумерной краевой задачи следующего вида:

система дифференциальных уравнений в частных производных –

$$\frac{\partial \bar{N}}{A \partial \alpha} = \left(\sum_{q=0}^{qq} B_q \frac{\partial^q}{\partial \theta^q} + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{N}; \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0_j}, \alpha_{1_j})\} \quad (j = \overline{1, J}), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1.1)$$

условия совместной работы на линиях сопряжения –

$$S^{j-1} \bar{N} \Big|_{\alpha_{1_{j-1}}} = S^j \bar{N} \Big|_{\alpha_{0_j}}; \quad \alpha = \alpha_{1_{j-1}} = \alpha_{0_j} \quad (j = \overline{2, J}); \quad (1.2)$$

граничные условия на торцевых контурах системы –

$$R_{01}\vec{N} = 0; \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (1.3)$$

$$R_{1J}\vec{N} = 0; \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (1.4)$$

условия периодичности в окружном направлении –

$$\vec{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \vec{N}(\alpha, \theta) \quad (1.5)$$

(в обозначении точки α_{pj} первый индекс p соответствует началу $p=0$ и концу $p=1$ j -ой оболочки, второй индекс $j = \overline{1, J}$ – номеру оболочки).

Здесь A – параметр Лямэ, связанный с приращениями дуги координатной линии $\theta = \text{const}$ равенством $ds_\alpha = A d\alpha$,

$$\vec{N} = \{N_i(\alpha, \theta, t)\} = \begin{cases} \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \mathcal{G}_\alpha\}, \\ (i = \overline{1, 8}; qq = 4) \text{ – классическая теория;} \\ \{N_\alpha, N_{\alpha\theta}, Q_\alpha, M_\alpha, H, u, v, w, \psi_\alpha, \psi_\theta\}; \\ (i = \overline{1, 10}; qq = 2) \text{ – уточненная теория} \end{cases} \quad (1.6)$$

– неизвестная вектор-функция с указанными компонентами напряженно-деформированного состояния (НДС): $\hat{S}_\alpha = N_{\alpha\theta} + k_\theta H$, $\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + k_\theta \frac{\partial H}{\partial \theta}$ – приведенные сдвиговое и перерезывающее усилия; N_α , $N_{\alpha\theta}$, Q_α – тангенциальное, сдвиговое и перерезывающее усилия в сечении $\alpha = \text{const}$; M_α , H – изгибающий и крутящий моменты в этом же сечении; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности по направлениям α, θ, γ ; $\mathcal{G}_\alpha = -\frac{\partial w}{A \partial \alpha} + k_\alpha u$ – угол поворота нормали; ψ_α, ψ_θ – полные углы поворота прямолинейного элемента в сечениях $\theta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$; k_α, k_θ – кривизны соответствующих координатных линий; qq – высший порядок производной в окружном направлении; C , S^{j-1} , S^j и R_{01}, R_{1J} – матрицы, характеризующие инерционные свойства системы, условия сопряжения на линиях $\alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j}$ и граничные условия на контурах $\alpha = \alpha_{01}$ и $\alpha = \alpha_{1J}$, соответственно; t – временная переменная.

Техника построения систем дифференциальных уравнений в квазидивергентной форме и получение коэффициентов матриц $B_q = \{b_{mn}^q(\alpha)\}$ ($q = \overline{0, qq}$) подробно изложены в работах [3, 4].

Для частного класса упругих тел, а именно, полых неоднородных по толщине круговых цилиндров при специальных условиях на торцевых плоскостях, исследование свободных колебаний в пространственной постановке приводит к одномерной трехмерной краевой задаче аналогичного вида:

система дифференциальных уравнений в частных производных –

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \gamma} = \left(\sum_{q_1=0}^2 B_{zq_1} \frac{\partial^{q_1}}{\partial z^{q_1}} + \sum_{q_2=0}^2 B_{\theta q_2} \frac{\partial^{q_2}}{\partial \theta^{q_2}} + B_{z\theta} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{\sigma}; \quad (1.7)$$

$$\gamma \in (\gamma_0, \gamma_M), \quad z \in (0, l) \quad \theta \in [0, 2\pi];$$

условия совместной работы на линиях контакта слоев –

$$\bar{\sigma}^- = \bar{\sigma}^+; \quad \gamma = \gamma_m \quad (m = \overline{1, M-1}); \quad (1.8)$$

граничные условия на лицевых поверхностях –

$$R_0 \bar{\sigma} = 0; \quad \gamma = \gamma_0; \quad (1.9)$$

$$R_M \bar{\sigma} = 0; \quad \gamma = \gamma_M; \quad (1.10)$$

специальные условия на торцевых плоскостях –

$$\sigma_z = u_\gamma = u_\theta = 0; \quad z = 0; \quad z = l; \quad (1.11)$$

условия периодичности в окружном направлении –

$$\bar{\sigma}(\gamma, z, \theta + 2\pi) = \bar{\sigma}(\gamma, z, \theta). \quad (1.12)$$

Выше приняты обозначения:

$$\bar{\sigma} = \{\sigma_n(z, \theta, \gamma, t)\} = \{\sigma_\gamma, \tau_{z\gamma}, \tau_{\theta\gamma}, u_\gamma, u_z, u_\theta\} \quad (n = \overline{1, 6}) \quad (1.13)$$

– искомая вектор-функция, компоненты которой имеют следующий смысл: $\sigma_\gamma, \tau_{z\gamma}, \tau_{\theta\gamma}$ – нормальные и касательные напряжения в плоскости $\gamma = \text{const}$; u_γ, u_z, u_θ – перемещения по соответствующим координатным направлениям; коэффициенты матриц $B_{zq_1}, B_{\theta q_2}, B_{z\theta}$, ($q_1, q_2 = 0, 1, 2$) получаем по известной технике на основе уравнений пространственной теории упругости анизотропного тела [6]; C – матрица, характеризующая инерционные свойства материала слоев; знаки « \leftarrow » и « \rightarrow » в $\bar{\sigma}^-, \bar{\sigma}^+$ (1.7) означают, что вектора относятся к $(m-1)$ -ому и m -ому слою, соответственно; матрицами R_0, R_M задаются граничные условия на лицевых поверхностях цилиндра.

§2. Методика решения.

Для определения нетривиального решения двумерных однородных краевых задач вида (1.1) – (1.5) или трехмерных задач вида (1.7) – (1.12) предлагается численно-аналитическая методика, состоящая в понижении их размерности до одномерного случая тем или иным рациональным аналитическим способом (этап 1) и решение полученных одномерных задач эффективными численными методами (этап 2).

Этап 1. На первом этапе методики, учитывая гармоничность рассматриваемых колебаний во времени и периодичность их форм по окружной переменной (1.5), представим искомую вектор-функцию (1.6) в следующем виде:

$$\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}(\alpha) e^{i(k\theta + \omega t)}, \quad (2.1)$$

где $i^2 = -1$; k – параметр волнообразования по переменной θ , равный числу волн, полностью укладываемых в этом направлении; ω и $\bar{N}_k = \{N_{nk}(\alpha)\}$ – искомые частота и соответствующая ей амплитудная вектор-функция формы колебаний по переменной α .

Такое представление позволяет разделить переменные в (1.1) – (1.5) и свести исходную двумерную задачу о колебаниях составных оболочек к последовательности одномерных однопараметрических задач на собственные значения относительно комплексной вектор-функции $\bar{N}_k = \bar{N}_k^i + i\bar{N}_k^n$ ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\frac{d\bar{N}_k}{Ad\alpha} = \left(\sum_{q=0}^{qq} (ik)^q B_q - \omega^2 C \right) \bar{N}_k; \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}); \quad (2.2)$$

$$S^{j-1} \bar{N}_k \Big|_{\alpha_{j-1}} = S^j \bar{N}_k \Big|_{\alpha_{0j}}; \quad \alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j} \quad (j = \overline{2, J}); \quad (2.3)$$

$$R_{01}\bar{N}_k = 0; \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad R_{1J}\bar{N}_k = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}. \quad (2.4)$$

В действительной форме задача (2.2) – (2.4) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_k'}{Ad\alpha} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{q=0}^{qq} (ik)^q B_q - \omega^2 C \right) \bar{N}_k' - \operatorname{Im} \left(\sum_{q=0}^{qq} (ik)^q B_q \right) \bar{N}_k''; \\ \frac{d\bar{N}_k''}{Ad\alpha} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{q=0}^{qq} (ik)^q B_q \right) \bar{N}_k' + \operatorname{Re} \left(\sum_{q=0}^{qq} (ik)^q B_q - \omega^2 C \right) \bar{N}_k''; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J});$$

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Re}(S^{j-1})\bar{N}_k' - \operatorname{Im}(S^{j-1})\bar{N}_k'' \right) \Big|_{\alpha_{j-1}} &= \left(\operatorname{Re}(S^j)\bar{N}_k' - \operatorname{Im}(S^j)\bar{N}_k'' \right) \Big|_{\alpha_{0j}}; \\ \left(\operatorname{Im}(S^{j-1})\bar{N}_k' + \operatorname{Re}(S^{j-1})\bar{N}_k'' \right) \Big|_{\alpha_{j-1}} &= \left(\operatorname{Im}(S^j)\bar{N}_k' + \operatorname{Re}(S^j)\bar{N}_k'' \right) \Big|_{\alpha_{0j}}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j} \quad (j = \overline{2, J});$$

$$\operatorname{Re}(R_{01})\bar{N}_k' - \operatorname{Im}(R_{01})\bar{N}_k'' = 0; \quad \operatorname{Im}(R_{01})\bar{N}_k' + \operatorname{Re}(R_{01})\bar{N}_k'' = 0; \quad \alpha = \alpha_{01};$$

$$\operatorname{Re}(R_{1J})\bar{N}_k' - \operatorname{Im}(R_{1J})\bar{N}_k'' = 0; \quad \operatorname{Im}(R_{1J})\bar{N}_k' + \operatorname{Re}(R_{1J})\bar{N}_k'' = 0; \quad \alpha = \alpha_{1J}. \quad (2.7)$$

Эта задача относительно вектор-функции, содержащей действительные \bar{N}_k' и мнимые \bar{N}_k'' составляющие комплексной вектор-функции $\bar{N}_k = \bar{N}_k' + i\bar{N}_k''$, имеет 16-ый и 20-ый порядок, соответственно, для классической и уточненной оболочечных моделей.

Следует отметить, что если вместо функций $N_\alpha, \hat{Q}_\alpha, u, w$ в случае классической модели оболочек (1.6) ввести новые искомые функции N_r, N_z, u_r, u_z

$$N_r = \cos \varphi N_\alpha + \sin \varphi \hat{Q}_\alpha; \quad N_z = \sin \varphi N_\alpha + \cos \varphi \hat{Q}_\alpha;$$

$$u_r = \cos \varphi u + \sin \varphi w; \quad u_z = \sin \varphi u - \cos \varphi w,$$

то матрицы сопряжения S^{j-1}, S^j в (1.2) будут единичными. N_r и N_z – соответственно, радиальное и осевое усилия; u_r и u_z – аналогичные перемещения; φ – угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения. Единичными будут эти матрицы и в случае уточненной модели Тимошенко (1.6) при аналогичной замене искоемых функций.

Такого же рода преобразования применяются и к решению вспомогательной трехмерной задачи (1.7) – (1.12) о свободных колебаниях полого неоднородного по толщине цилиндра. Принимая во внимание, как и в задаче (1.1) – (1.5), гармоничность колебаний во времени, периодичность форм колебаний в окружном направлении (1.12) и специальные условия типа шарнирного опирания на торцах цилиндра (1.11), представим искомую вектор-функцию $\bar{\sigma}$ (1.13) в виде

$$\bar{\sigma} = \{\sigma_n(z, \theta, \gamma, t) = \sum_{m=1,2,\dots} \sum_{k=0,1,\dots} \sigma_{nmk}(\gamma) e^{i(\beta_m z + k\theta + \omega t)}\}, \quad (2.8)$$

где $\beta_m = m\pi/l$, m – параметр волнообразования, равный числу полуволн, полностью укладываемых по длине цилиндра; k и ω имеют тот же смысл, что и в (2.1), а

$\bar{\sigma}_{mk} = \{\sigma_{nmk}(\gamma)\}$, $n = \overline{1,6}$ – амплитудная вектор-функция формы колебаний по толщине цилиндра.

В результате, исходная трехмерная задача (1.7) – (1.12) сводится к последовательности двухпараметрических одномерных задач на собственные значения относительно комплексной вектор-функции $\bar{\sigma}_{mk} = \bar{\sigma}'_{mk} + i\bar{\sigma}''_{mk}$ ($m = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{d\bar{\sigma}_{mk}}{d\gamma} = \left(\sum_{q_1=0}^2 (i\beta_m)^{q_1} B_{zq_1} + \sum_{q_2=0}^2 (ik)^{q_2} B_{\theta q_2} - \beta_m k B_{z\theta} - \omega^2 C \right) \bar{\sigma}_{mk}; \quad \gamma \in (\gamma_0, \gamma_M); \quad (2.9)$$

$$\bar{\sigma}_{mk}^- = \bar{\sigma}_{mk}^+; \quad \gamma = \gamma_m \quad (m = \overline{1, M-1}); \quad (2.10)$$

$$R_0 \bar{\sigma}_{mk} = 0; \quad \gamma = \gamma_0; \quad (2.11)$$

$$R_M \bar{\sigma}_{mk} = 0; \quad \gamma = \gamma_M. \quad (2.12)$$

Эта задача, аналогично задаче (2.2) – (2.4), может быть представлена в действительной форме для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка относительно вектора, содержащего действительную $\bar{\sigma}'_{mk}$ и мнимую $\bar{\sigma}''_{mk}$ компоненты искомой комплексной вектор-функции $\bar{\sigma}_{mk} = \bar{\sigma}'_{mk} + i\bar{\sigma}''_{mk}$.

Построением одномерных задач на собственные значения вида (2.5) – (2.7) или (2.9) – (2.12) завершается реализация первого этапа используемой численно-аналитической методики, второй этап которой связан с решением полученных задач.

Этап 2. Все полученные задачи можно представить в следующей единой унифицированной форме относительно неизвестной вектор-функции $\bar{Y} = \{y_i(x)\}$ ($i = \overline{1, 2n}$):

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = (A - \lambda C) \bar{Y}; \quad x \in (x_0, x_J); \quad (2.13)$$

$$S_j \bar{Y}^- = S_{j+1} \bar{Y}^+; \quad x = x_j \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (2.14)$$

$$R_0 \bar{Y} = 0; \quad x = x_0; \quad (2.15)$$

$$R_J \bar{Y} = 0; \quad x = x_J. \quad (2.16)$$

Знаки «-» и «+» в векторах \bar{Y}^- , \bar{Y}^+ – обозначают их значения слева и справа от точки $x = x_j$; $A = \{a_{im}(x)\}$ ($i, m = \overline{1, 2n}$) – квадратная матрица $2n$ -го порядка с переменными коэффициентами; R_0, R_J – прямоугольные матрицы порядков $n \times 2n$.

Для определения неизвестного числового параметра λ (собственное значение) и соответствующего ему нетривиального решения задачи (2.13) – (2.16) (собственная вектор-функция) в работе используются два метода: метод последовательных приближений в варианте обратной итерации (метод Релея) [5] и метод пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метод) [13]. Оба метода реализуются в сочетании с методом ортогональной прогонки решения линейных одномерных краевых задач [1, 2].

Метод пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метод). Суть метода состоит в определении таких значений λ , при которых однородная краевая задача (2.13) – (2.16) имела бы нетривиальное решение $\bar{Y} \neq 0$. Для интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений (2.13) при заданных граничных условиях (2.15), (2.16) и дополнительных условиях (2.14) используется численный метод ортогональной прогонки С.К. Годунова [1, 2]. Согласно этому методу решение $\bar{Y}(x, \lambda)$ двухточечной задачи (2.13) – (2.16) представляется в виде следующей комбинации решений задач Коши $\bar{U}_q(\alpha, \lambda)$:

$$\bar{Y}(\alpha, \lambda) = \sum_{q=1}^n b_q \bar{U}_q(\alpha, \lambda). \quad (2.17)$$

Задачи Коши формулируются для однородной системы уравнений (2.13), а в качестве начальных условий выбираются набор n ($q = \overline{1, n}$) линейно-независимых векторов, удовлетворяющих граничным условиям (2.15). Для решения этих задач ($q = \overline{1, n}$) используется одношаговый численный метод Кутты – Мерсона пятой степени. При этом дополнительные условия (2.14) для каждой задачи Коши ($q = \overline{1, n}$), а в силу представления (2.17), и для краевой задачи в целом реализуются автоматически. С целью получения устойчивого решения краевой задачи в виде (2.17) в ряде точек интервала интегрирования x_j -точках ортогонализации – проводится последовательное ортонормирование полученных векторов-решений $\bar{U}_q(\alpha, \lambda)$ по процедуре Грамма – Шмидта

$$\bar{Z}_q(x_j, \lambda) = \frac{1}{\delta_{qq}} (\bar{U}_q(x_j, \lambda) - \sum_{i=1}^{q-1} \delta_{qi} \bar{Z}_i(x_j, \lambda)) \quad (q = \overline{1, n}). \quad (2.18)$$

Здесь $\delta_{qi} = (\bar{U}_q, \bar{Z}_i)$ ($i < q$), $\delta_{qq} = \sqrt{(\bar{U}_q, \bar{U}_q) - \sum_{i=1}^{q-1} \delta_{qi}^2}$, (\bar{a}, \bar{b}) – операция скалярного произведения векторов \bar{a} и \bar{b} .

Таким образом, в каждой точке ортогонализации x_j решение системы (2.13), удовлетворяющее левому граничному условию (2.15), можно представить в виде

$$\bar{Y}(x_j, \lambda) = Z(x_j, \lambda) \bar{B}(x_j),$$

где $Z(x_j, \lambda)$ – матрица порядка $2n \times n$, столбцы которой суть компоненты векторов $\bar{Z}_q(x_j, \lambda)$; $\bar{B} = \{b_q\}$ – неизвестный вектор-столбец произвольных постоянных в представлении (2.17).

Для определения компонент вектора $\bar{B} = \{b_q\}$ используется граничное условие (2.16) на втором краю интервала интегрирования ($x = x_j$). В силу однородности этого условия определение ненулевого вектора $\bar{B} \neq 0$, а, следовательно, и нетривиального решения однородной задачи (2.13) – (2.16), сводится к определению нулей характеристического детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \det(R_j Z(x_j, \lambda)) = 0. \quad (2.19)$$

Алгоритм определения нулей выражения (2.19) реализован стандартным образом: путем перебора значений λ определялись два последовательных значения λ_v и λ_{v+1} , удовлетворяющих условию $\Delta(\lambda_v) \Delta(\lambda_{v+1}) \leq 0$, затем с помощью половинного деления или интерполяционных приемов интервал $(\lambda_v, \lambda_{v+1})$ стягивался до получения $\lambda \in (\lambda_v, \lambda_{v+1})$ с заданной точностью.

Метод последовательных приближений. Основные положения этого метода применительно к однородной линейной краевой задаче (2.13) – (2.16) состоят в следующем [5]. На m -ом шаге приближения путем введения новой искомой функции $\bar{Y} = \bar{V}^{(m)}$ и $\lambda \bar{Y} = \bar{V}^{(m-1)}$ и сдвигом спектра собственных значений на величину τ исходная однородная задача на собственные значения (2.13) – (2.16) сводится к неоднородной краевой задаче вида ($m = 1, 2, \dots$):

$$\frac{d\bar{V}^{(m)}}{dx} = (A - \tau C) \bar{V}^{(m)} - C \bar{V}^{(m-1)} \quad x \in (x_0, x_j); \quad (2.20)$$

$$S_j \bar{V}^{(m)-} = S_{j+1} \bar{V}^{(m)+}; \quad x = x_j \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (2.21)$$

$$R_0 \bar{V}^{(m)} = 0; \quad x = x_0; \quad (2.22)$$

$$R_j \bar{V}^{(m)} = 0; \quad x = x_j, \quad (2.23)$$

которая решается методом ортогональной прогонки.

По найденным решениям $\bar{V}^{(m)}$ строится числовая последовательность

$$\lambda_m = \frac{(\bar{V}^{(m)}, C\bar{V}^{(m-1)})}{(\bar{V}^{(m)}, C\bar{V}^{(m)})},$$

сходящаяся к минимальному собственному значению λ ($\lambda_m \rightarrow \lambda$) при выбранном τ и функциональная последовательность векторов $\bar{V}^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$), сходящаяся к соответствующей собственной вектор-функции \bar{Y} : $\bar{V}^{(m)} \rightarrow \bar{Y}$, $m = 1, 2, \dots$.

Завершением построения численно-аналитической методики решения двумерных задач на собственные значения является реализация пошагового $\Delta(\lambda)$ -метода и метода последовательных приближений.

На основе разработанного подхода исследование частотных характеристик составных оболочечных систем предлагается проводить в такой последовательности.

1. Определить собственные частоты на основе классической модели оболочек с использованием метода последовательных приближений (метода Релея).

2. Уточнить полученные значения собственных частот на основе предложенной Тимошенко модели с использованием метода пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метода).

3. При наличии в системе толстостенных элементов или (и) элементов сложной неоднородной структуры по толщине оценить возможности приближенных моделей на примере смоделированной цилиндрической оболочки заданной структуры с привлечением пространственной постановки задачи.

§3. Анализ собственных частот составных оболочечных систем.

В качестве примера использования предложенного подхода приводится решение трех задач. Первая из них является модельной и иллюстрирует возможности оболочечных моделей Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Миндлина в сравнении с результатами по пространственной постановке задачи, в двух других рассмотрены оболочечные системы, близкие к реальным конструкциям.

Задача 1. Здесь на элементарном примере однородной по образующей цилиндрической оболочки анализируется применимость методики в зависимости от двух факторов: неоднородности (вариант 1) и податливости (вариант 2) физико-механических свойств оболочки по толщине.

1. Рассмотрена трехслойная цилиндрическая оболочка длины $2l$ ($s \in [-l; l]$), радиусом срединной поверхности R_0 и общей толщиной Δ (s – длина дуги образующей). Слои оболочки расположены симметрично относительно срединной поверхности и выполнены из изотропного материала с разными упругими свойствами. Наружные слои толщины h имеют модуль упругости $E = E_0$, плотность $\rho = \rho_0$ и коэффициент Пуассона μ , для внутреннего слоя толщины H имеем $E = E_0/d$, $\rho = \rho_0/d$, при том же коэффициенте Пуассона. По занимаемому объему внутренний слой равен четырем наружным ($H = 4 \times 2h$). Степень неоднородности такой слоистой структуры характеризуется параметром d или $\eta = \lg d$. Значение $\eta = 0$ соответствует однородной изотропной оболочке из материала наружных слоев. Возрастание параметра η при фиксированных свойствах материала наружных слоев соответствует одновремен-

ному снижению жесткости и плотности материала внутреннего слоя, так что с изменением η скорость распространения упругих волн всего цилиндра в целом сохраняется. На торцах цилиндра $s = \pm l$ принимаются условия шарнирного опирания.

Результаты расчета собственных частот цилиндра ($R_0 = 100l_0$, $2l/R_0 = 2$, $\mu = 0,3$)

представлены на рис. 2 в виде зависимости $f = f(k) = \frac{\omega(k)l_0}{2\pi} 10^3 \sqrt{\rho_0/E_0}$ Гц для раз-

ных моделей деформирования – классической, уточненной модели Тимошенко и трехмерной постановки теории упругости (обозначения соответственно *Kir*, *Tim* и *3D*), оболочек разной относительной толщины $\Delta/R_0 = 0,05; 0,1; 0,2$ и разной степени неоднородности по толщине η (l_0 – характерный линейный размер цилиндра). Для однородных оболочек $\eta = 0$ зависимости $f = f(k)$ представлены на рис. 2, а, б, в, соответственно, для тонких $\Delta/R_0 = 0,05$, средней толщины $\Delta/R_0 = 0,1$ и толстых $\Delta/R_0 = 0,2$ цилиндров, на рис. 2, г, д, е для этих же толщин при $\eta = 1$, т.е. когда свойства слоев различаются на порядок. Приведенные значения частот соответствуют форме колебаний в виде одной полуволны по образующей и k ($k \in [0,10]$) узловым диаметрам в окружном направлении.

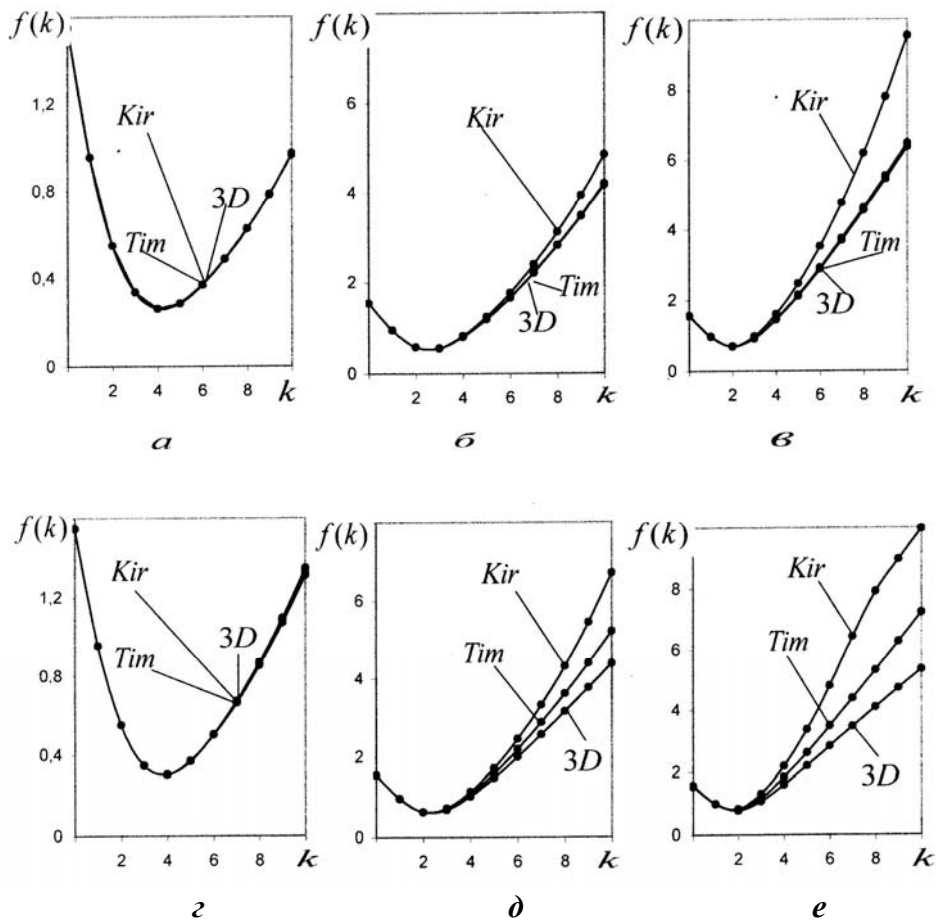


Рис. 2

Как следует из приведенных зависимостей, для однородных оболочек – тонких (рис. 2, а), средней толщины (рис. 2, б) и толстых (рис. 2, в) расчеты по модели Тимошенко в рассмотренном диапазоне низших частот практически совпадают с расче-

тами по пространственной постановке, в то время как максимальная погрешность классической модели для толстых оболочек может приближаться к 50%.

При различии в свойствах материала наружных и внутреннего слоев на порядок ($\eta = 1$) значения частот для тонких оболочек (рис. 2, *з*) по всем моделям совпадают. Для оболочек средней толщины (рис. 2, *д*) максимальное различие данных по модели Тимошенко по сравнению с расчетами в пространственной постановке составляет порядка 20%, а классической – порядка 50%. Для толстых цилиндров (рис. 2, *е*) эти различия увеличиваются, соответственно, до 35% и 85%.

При расчете минимальной частоты ($k = 2$) и частот в ближайшей ее окрестности различия для приведенных моделей деформирования не превышает 5% для цилиндров разной относительной толщины, включая толстые.

Таким образом, для получения значений высших частот для толстых оболочек с погрешностью менее 40% недостаточно использования модели Тимошенко, и тем более классической.

2. Подобные примерные оценки применяемых моделей проводились и для материалов разной податливости на поперечный сдвиг. В данном исследовании наружные слои предыдущего трехслойного цилиндра остаются изотропными, а внутренний слой принимается ортотропным со следующими характеристиками: $E_1 = 25 \cdot 10^{-2} E_0$, $E_2 = 7,7 \cdot 10^{-2} E_0$, $G_{12} = 2,88 \cdot 10^{-2} E_0$, $G_{13} = G_{23} = 2,88 \cdot 10^{-2} E_0$, $\mu = 0,24$, $\rho = \rho_0$.

Степень податливости материала по толщине будем характеризовать параметром податливости β при фиксированном значении модуля сдвига G_{12} : $G_{13} = G_{23} = 10^\beta G_{12}$ (при $\beta \gg 1$ материал является жестким по толщине, при $\beta \leq 0$ податливость материала в поперечном направлении равна или больше, чем в координатной плоскости, а при $\beta = 1$ различие между соответствующими жесткостями равно порядку).

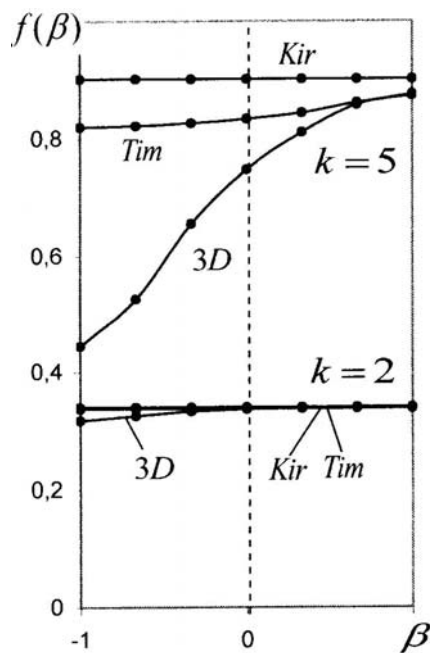


Рис. 3

Результаты расчета для цилиндра средней толщины $\Delta / R_0 = 0,1$ по трем рассмотренным моделям представлены на рис. 3 в виде зависимости частотного параметра $f = f(\beta) = \frac{\omega(\beta)l_0}{2\pi} 10^3 \sqrt{\rho_0 / E_0}$ Гц от параметра податливости $\beta \in [-1, 0; 1, 0]$ для минимальной частоты $k = 2$ и более высокой частоты $k = 5$ при одной полуволне вдоль образующей цилиндра ($m = 1$).

Значения минимальной частоты в рассмотренном диапазоне параметра податливости β , полученные по классической модели, близки к соответствующим расчетам по двум другим моделям деформирования и погрешность результата для наиболее податливого материала ($\beta = -1$) не превосходит 5%. Для более высокой частоты ($m = 1$, $k = 5$) наблюдается существенное различие между значениями по оболочечным моделям по сравнению с результатами по пространственной постановке. Для наиболее податливого материала ($\beta = -1$) расчеты по модели Тимошенко уточняют результаты классической теории на 10%, в то время как от расчетов в трехмерной постановке они завышены почти вдвое. При $\beta = 0$ (сдвиговые жесткости во всех координатных плоскостях одинаковы) различие между расчетами по моделям Тимошенко и трехмерной

ливого материала ($\beta = -1$) расчеты по модели Тимошенко уточняют результаты классической теории на 10%, в то время как от расчетов в трехмерной постановке они завышены почти вдвое. При $\beta = 0$ (сдвиговые жесткости во всех координатных плоскостях одинаковы) различие между расчетами по моделям Тимошенко и трехмерной

снижается до 15%, а для «жестких» на поперечный сдвиг материалов ($\beta = 1$) различия между результатами по всем моделям находятся в пределах 0,5%.

Задача 2. Рассмотрена оболочечная система типа корпуса космического аппарата, состоящая из следующих 4-х составляющих (рис. 4):

- 1) элемент сферической оболочки радиуса R_{sph} , длины l_{sph} с центром на оси вращения;
- 2) первая усеченная коническая оболочка с радиусами R_{con10} (начальный), $R_{con11} = R_{cyl}$ (конечный) и длиной l_{con1} ;
- 3) цилиндр радиуса $R_{cyl} = R_{con11}$ и длины l_{cyl} ;
- 4) вторая усеченная коническая оболочка с радиусами $R_{con20} = R_{cyl}$ (начальный), R_{con21} (конечный) и длиной l_{con2} .

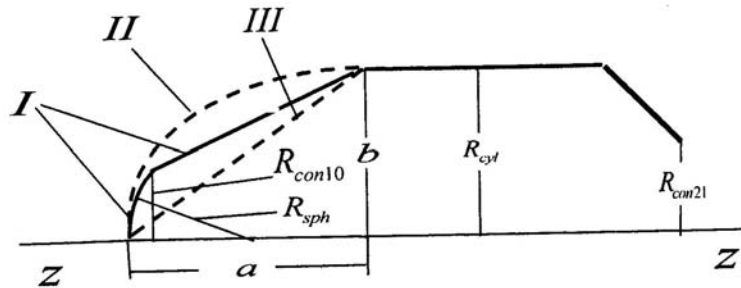


Рис. 4

Кроме этой основной (базовой) системы – системы I – рассмотрены случаи, когда вместо ее первых двух элементов принимаются следующие:

эллиптическая оболочка с полуосями a (по оси z) и $b = R_{cyl}$ (по оси r), центром на оси вращения и центральным углом $\alpha \in (0, \alpha_1]$, отсчитываемым от оси вращения по часовой стрелке (система II, штриховая кривая);

замкнутая коническая оболочка с радиусом R_{cyl} при основании и длиной l_{con3} (система III, штриховая линия).

Две остальные составляющие базовой системы – цилиндр и вторая коническая оболочка – остаются неизменными.

Все элементы рассмотренных систем являются трехслойными оболочками симметричного строения относительно срединной поверхности с толщиной наружных слоев h и общей толщиной Δ . Слои оболочек являются изотропными с модулем упругости $E = E_0$, коэффициентом Пуассона μ и плотностью $\rho = \rho_0$ для наружных слоев и $E = 0,1E_0$ при тех же значениях μ и ρ для внутреннего слоя. В начале первой оболочки – (сферической для системы I, эллиптической для системы II и конической для системы III) принимаются условия симметрии (или свободного края), второй торцевой контур считается защемленным.

Расчеты собственных частот приведены для таких исходных данных:

$$R_{sph} = 1,0l_0; l_{sph} / R_{sph} = 1,047; R_{con10} / R_{sph} = 0,866; R_{con11} / R_{sph} = 2,0; l_{con1} / R_{sph} = 1,4141;$$

$$R_{cyl} / R_{sph} = R_{con20} / R_{sph} = 2,0; R_{con21} / R_{sph} = 1,5; l_{con2} / R_{sph} = 1,118; 2h / R_{sph} = 0,2 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta / R_{sph} = 2,0 \cdot 10^{-2}; a / R_{sph} = 1,5; b / R_{sph} = 2,0; l_{con3} / R_{sph} = 2,5; \alpha_1 = \pi / 2; \mu = 0,3.$$

Уточнения значений собственных частот приведенных систем, связанные с применением модели Тимошенко и использованием пошагового метода расчета, находятся в пределах 0,5%.

Результаты исследования в виде частотной зависимости $f = f(k) = \frac{\omega(k)l_0}{2\pi} 10^2 \sqrt{\rho_0 / E_0} \Gamma_{\Pi}$ представлены на рис. 5, а, б, в для систем I, II и III, соответственно.

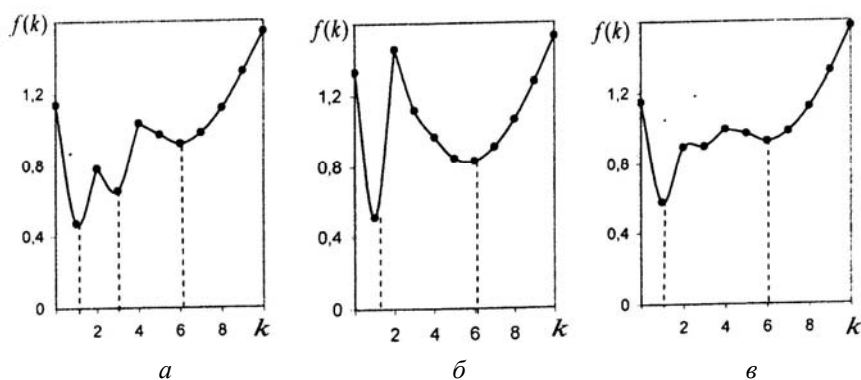


Рис. 5

Приведенные условные кривые $f = f(k)$ иллюстрируют влияние изменения геометрии начального участка оболочечной системы на исследуемую зависимость. Общим для всех кривых является наличие двух локальных минимумов при $k=1$ (антисимметричная форма колебаний) и при $k=6$ (форма колебаний с 6-ью узловыми диаметрами в окружном направлении). При этом система I имеет явно выраженный минимум еще и при $k=3$, а система III – очень близкие частоты при $k=2$ и $k=3$ (некоторое плато). Таким образом, все три случая, когда начальный участок представлен сферическим и коническим элементами (I), сплюснутым по оси Oz полуэллипсом ($a/b=0,75$) (II) и замкнутым конусом (III), качественно отличается между собой по зависимости $f = f(k)$.

Значения локальных минимальных частот при $k=k^*$ для рассмотренных систем приведены в табл. 1. Абсолютный минимум для всех систем имеет место при $k^*=1$.

Таблица 1

| $f_{\min} = f_{\min}(k^*) \cdot 10^2$ | | | |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|
| k^* | 1 | 3 | 6 |
| I | 0,471 | 0,652 | 0,925 |
| II | 0,515 | | 0,828 |
| III | 0,582 | 0,892 | 0,924 |

Таким образом, изменение геометрии отдельного составляющего элемента системы влияет не только количественно на собственные частоты (см. табл. 1), но и на качественный характер исследуемой зависимости (рис. 5, а, б, в).

Задача 3. В качестве объекта сложной структуры по толщине выбрана расчетная схема пневматической шины, представленная на рис. 6, а. Образующая внутренней поверхности оболочки-шины принимается за исходную координатную поверхность $\gamma=0$ и ее половина ввиду симметрии относительно вертикальной оси моделируется 8-ю элементами торо-сферического типа с координатами центра r_{0j}, z_{0j} , радиусами окружностей R_j и длинами дуг составляющих оболочек s_j . Указанные геометрические параметры ($j=1, 8$) приведены в табл. 2.

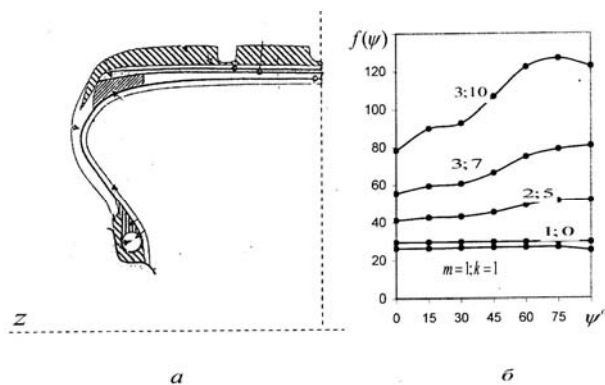


Рис. 6

Таблица 2

| Геометрические параметры | | | | |
|--------------------------|--------------------------------|------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| № обол. (j) | $r_{0j} \cdot 10^2, \text{ м}$ | $z_{0j} \cdot 10, \text{ м}$ | $R_j \cdot 10, \text{ м}$ | $s_j \cdot 10, \text{ м}$ |
| 1 | 0 | -0,227 | 2,830 | 1,300 |
| 2 | -0,299 | -0,875 | 3,480 | 0,785 |
| 3 | 0,438 | 1,980 | 2,400 | 1,320 |
| 4 | 1,830 | 1,720 | 1,280 | 1,760 |
| 5 | 3,900 | 2,090 | 0,473 | 0,893 |
| 6 | 4,010 | 2,110 | 0,449 | 2,910 |
| 7 | 4,870 | 2,160 | 0,352 | 2,710 |
| 8 | -0,602 | 2,320 | 0,924 | 2,810 |

На граничном контуре принимаются условия жесткого закрепления, а в центре – условия симметрии.

Каждая оболочка состоит из разного количества слоев с разными физико-механическими свойствами. Так, по всей образующей системы оболочек ($j = \overline{1,8}$) внутренний слой (каркас) образован волокнами одного и того же резинокордного материала; для оболочек $j = \overline{1,4}$ следующий слой (брекер) состоит из двух перекрестно армированных под углами $\pm\psi$ резинокордов; оболочки $j = 1; 3; 4; 5$ имеют дополнительный слой резины (протектор). Расположение слоев шины, их толщины в начале каждой оболочки (h_{0j}) и упругие характеристики материалов приведены в табл. 3.

Таблица 3

| № обол. (j) | № слоя (m) | $h_{0j} \cdot 10^3, \text{ м}$ | $E_1, \text{ МПа}$ | $E_2, \text{ МПа}$ | μ_{12} | $G_{12}, \text{ МПа}$ | $G_{13} = G_{23}, \text{ МПа}$ | $\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$ |
|-----------------|----------------|--------------------------------|--------------------|--------------------|------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | 1 | 0,75 | $5,81 \cdot 10^2$ | $1,18 \cdot 10$ | 0,42 | 4,33 | 3,01 | 1,00 |
| | 2 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| | 3 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| | 4 | 5,86 | 5,00 | 5,00 | 0,49 | 1,68 | 1,68 | 1,00 |
| 2 | 1 | 0,75 | $5,81 \cdot 10^2$ | $1,18 \cdot 10$ | 0,42 | 4,33 | 3,01 | 1,00 |
| | 2 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| | 3 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| 3,4 | 1 | 0,75 | $5,81 \cdot 10^2$ | $1,18 \cdot 10$ | 0,42 | 4,33 | 3,01 | 1,00 |
| | 2 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| | 3 | 1,40 | $1,84 \cdot 10^3$ | 7,36 | 0,47 | 2,08 | 1,88 | 1,54 |
| | 4 | 6,05 | 5,00 | 5,00 | 0,49 | 1,68 | 1,68 | 1,00 |
| 5 | 1 | 0,75 | $5,81 \cdot 10^2$ | $1,18 \cdot 10$ | 0,42 | 4,33 | 3,01 | 1,00 |
| | 2 | 5,78 | 5,00 | 5,00 | 0,49 | 1,68 | 1,88 | 1,00 |
| 6,7,8 | 1 | 0,75 | $5,81 \cdot 10^2$ | $1,18 \cdot 10$ | 0,42 | 4,33 | 3,01 | 1,00 |

Заметим, что укладка 2-го и 3-его слоев резинокорда осуществляется по геодезической к образующей внутренней поверхности шины.

Для оценки возможностей приближенных оболочечных моделей относительно учета заданной структуры по толщине используется, как предусмотрено общей схемой исследования, сравнение с результатами пространственной постановки задачи. Для этого рассмотрена цилиндрическая оболочка длины $l_{cyl} = 0,6\text{м}$, радиуса $R_{cyl} = 0,26\text{м}$ с такой же структурой по толщине, что и заданная шина в центральном сечении (табл. 3, $j = 1, m = \overline{1,4}$). Результаты сравнения для частоты $f = \omega / 2\pi$ при углах укладки $\psi = \pm 65^\circ$ представлены в табл. 4 с указанием погрешности приближенных моделей по отношению к результатам 3D постановки.

Таблица 4

| $k; m$ | модели | | |
|--------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | Kir | Tim | 3D |
| | $f; \varepsilon, \%$ | $f; \varepsilon, \%$ | $f; \varepsilon, \%$ |
| 0;1 | 5,247; 0,75 | 5,230; 0,42 | 5,208 |
| 4;1 | 0,702; 1,30 | 0,695; 0,30 | 0,693 |

Как видно из табл. 4, при расчете собственных частот данной четырехслойной структуры погрешность приближенных моделей находится в пределах 2%. Заметим, что эти оценки являются лишь ориентировочными при анализе колебаний оболочек, моделирующих реальные шины.

Для данной составной оболочечной системы исследуется зависимость нескольких низших частот от угла укладки армирующих слоев $\pm\psi$. Эти данные представлены на рис. 6, б в виде зависимости $f = f(\psi)$ в диапазоне изменения $\pm\psi \in [0^\circ; 90^\circ]$ для разных частот с формами колебаний с m полуволнами по образующей системы и k узловыми диаметрами в окружном направлении. Как видно из приведенных графиков, изменение угла армирования средних слоев в оболочках $j = 1,4$ практически не влияет на минимальную ($m = 1; k = 1$) и осесимметричную ($m = 1; k = 0$) частоты системы в целом. В то же время, для более высоких частот ($m = 3, k = 7; m = 3, k = 10$) их значения могут существенно (до 50%) возрасти.

Заключение.

Предложен подход к определению частот и форм свободных колебаний составных систем из оболочек вращения разной геометрии и относительной толщины, непрерывно и (или) дискретно неоднородных по толщине, из изотропных, ортотропных и анизотропных материалов с одной плоскостью упругой симметрии.

Подход включает построение математической модели колебаний на основе классической теории Кирхгофа – Лява, уточненной теории типа Тимошенко, пространственной теории упругости (частный случай) и численно-аналитическую методику решения соответствующих двумерных (трехмерных) задач на основе понижения их размерности и использования методов последовательных приближений и пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метода). Оба последних метода реализуются в сочетании с методом ортогональной прогонки решения одномерных линейных краевых задач, обеспечивающего автоматическое удовлетворение условиям сопряжения отдельных оболочек

На модельных задачах иллюстрируются возможности оболочечных моделей в зависимости от податливости физико-механических свойств и степени неоднородности материала по толщине. Показано, что при расчете минимальной частоты и частот в ближайшей ее окрестности различия для приведенных моделей деформирования не превышает 5% для неоднородных цилиндров разной относительной толщины, включая толстые.

На примере составных оболочечных систем, близких к реальным конструкциям, анализируется влияние изменения их геометрических параметров и структуры на низшие частоты колебаний. Показано, что в ряде случаев изменение этих характеристик может привести к качественному изменению исследуемых зависимостей.

Р Е З Ю М Е: Запропоновано підхід до визначення частот і форм вільних коливань спряжених систем з оболонок обертання різної геометрії і відносної товщини, неперервно і (або) дискретно неоднорідних за товщиною, з ізотропних, ортотропних та анізотропних матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Підхід включає побудову математичної моделі коливань на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява, уточненої теорії типу Тимошенка, просторової теорії пружності (частинний випадок) і чисельно-аналітичну методику розв’язання відповідних двовимірних (тривимірних) задач на основі зниження їх розмірності і використання методів послідовних наближень і покорокового пошуку в поєднанні з методом ортогональної прогонки. Наведено приклади розв’язання задач з різних областей техніки.

1. Беллман Р.Е., Калаба Р.Е. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4).
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
6. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
7. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Frequencies and Modes of Natural Vibrations of Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 164 – 172.
8. Caresta M., Kessissoglou N.J. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells // J. of Sound and Vibration. – 2010. – **329**. – P. 733 – 784.
9. Cheng L., Nicolas J. Free vibration analysis of a cylindrical shell–circular plate system with general coupling and various boundary conditions // J. of Sound and Vibration. – 1992. – **155**. – P. 231 – 247.
10. Chronopoulos D., Ichchou M., Troclet B., Bareille O. Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell // Composite Structures. – 2014. – **107**. – P. 149 – 159.
11. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A. Free Vibrations of Non-Thin Cylindrical Shells of Variable Thickness with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 668 – 679.
12. Hu W.C.L., Raney J.P. Experimental and analytical study of vibrations of joined shells // AIAA Journal. – 1967. – **5**, N.5. – P. 976 – 981.
13. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I Gewöhnliche Differentialgleichungen. – 6th verbesserte-auflage. – Leipzig, 1959. – 576 p.
14. Lee Y.S., Yang M.S., Kim Y.S., Kim J.H. A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures // Computers Structures. – 2002. – **80**: 27 – 30. – P. 2405 – 2414.
15. Liang, S., Chen H.L. The natural vibration of a conical shell with an annular end plate // J. of Sound and Vibration. – 2006. – **294**. – P. 927 – 943.
16. Marchuk A.V., Gnedash S.V., Levkovsky S.A. Free and Forced Vibrations of Thick-Wall Anisotropic Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 181 – 195.
17. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua Y. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach // Int. J. of Mech. Sciences. – 2013. – **69**. – P. 72 – 84.
18. Patel B.P., Ganapathi M., Kamat S. Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells // J. Sound and Vibration. – 2000. – **237**. – P. 920 – 930.
19. Shakouri M., Kouchakzadeh M.A. Free vibration analysis of joined conical shells: Analytical and experimental study // J. of Thin-Walled Structures. – 2014. – **85**. – P. 350 – 358.
20. Shang X.C. Exact analysis for free vibration of a composite shell structure- hermetic capsule // Appl. Math. Mech. (English Edition). – 2001. – **22**. – P. 1035 – 1045.
21. Su Z., Jin G. Vibration analysis of coupled conical-cylindrical-spherical shells using a Fourier spectral element method // J. Acoust. Soc. Am. – 2016. – 140 (5). – P. 3925 – 3940.
22. Susheel C.K., Rajeev Kumar T.K., Vishal Singh Chauhan. Nonlinear vibration analysis of piezo-laminated functionally graded cylindrical shell // Int. J. of Nonlinear Dynamics and Control. – 2017. – **1**, N 1. – P. 27 – 50.

Поступила 27.10.2017

Утверждена в печать 22.11.2018