УДК 532.527:622.648.24:622.7 DOI: https://doi.org/10.15407/geotm2018.141.086

ДИНАМІКА ВИХРОВИХ СТРУКТУР В НАПІРНИХ ТЕЧІЯХ ГІДРОСУМІШЕЙ ПРИ ПЕРЕРОБЦІ МІНЕРАЛЬНОЇ СИРОВИНИ

[1]Блюсс Б.О. , [2]Лук'янов П.В. , [1]Дзюба С.В.

[1]Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, [2]Національний авіаційний університет МОН України

ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В НАПОРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГИДРОСМЕСЕЙ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ МИНЕРАЛЬНОГО СЫРЬЯ

[1]Блюсс Б.А., [2]Лукьянов П.В. , [1]Дзюба С.В.

[1]Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины, [2]Национальный авиационный университет МОН Украины

VORTEX STRUCTURE DYNAMICS IN THE SLURRY ENFORCED FLOWING AT PROCESSING THE MINERAL RAW MATERIALS

[1] Blyuss B.O., [2]Lukianov P.V., [1]Dziuba S.V.

[1]Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Sciences of Ukraine, [2]National Aviation University MES of Ukraine

Анотація. У статті наведено результати аналізу процесу течії гідросуміші при подачі вихідної пульпи на збагачувальне устаткування, а саме на струменевий зумпф схема якого представлена на рисунку. В основу запропонованої математичної моделі течії в згущуючій лійці в загальному випадку при нестаціонарному режимі її роботи покладено рівняння законів збереження маси і імпульсу окремо для несучої рідини і для твердого компонента в припущенні, що течія одновимірна. При цьому геометричні розміри згущуючої лійки вважаються заданими, та відзначається, що якщо в пульпі містяться досить тонкі класи твердого, то при будь-якому значені діаметрів частинок вони не встигають розвантажитися в основний потік і йдуть в злив. При аналізі режимів роботи згущуючих лійок в технологіях переробки мінеральної сировини звертаємо увагу на те, що рух гідросуміші зазвичай відбувається самопливним чином. При цьому подача гідросуміші в згущуючу лійку відбувається за рахунок насосів, тобто процес напірної течії пульпи. На основі співвідношення, що пов'язує вектори полів швидкості та завихреності, сформульовані загальні кінематичні умови динаміки нестисливої в'язкої бездифузійної течії гідросумішей. Запропоновано динамічні умови компактності – баланси різних сил та фізичних механізмів. У цілому модель компактної структури течії відповідає тим розв'язкам рівнянь балансу певних сил, що узгоджуються із кінематичними умовами компактності. Запропоновано енергетичний підхід для обґрунтування компактності: потужність дисипації в усій області руху рідини дорівнює потужності генерації, що дає можливість визначення розміру області стаціонарної вихрової течії. Усі вихрові структури, розподіли поля швидкості в яких перетворюють дифузійний оператор на нуль, мають однакову властивість – момент пари в'язких сил, що прикладені до внутрішньої та зовнішньої поверхонь елементарного рідкого кільцевого циліндру, рівний нулю, що забезпечує стаціонарність руху. Гідродинамічна модель роботи згущуючої лійки яка запропоновано у статті зводиться до вирішення системи диференціальних рівнянь за глибиною лійки з урахуванням результатів моделювання процесів динаміки вихрових структур в напірних течіях гідросумішей при переробці мінеральної сировини дозволить обґрунтувати раціональні значення технологічних і технічних параметрів діючого на виробництві технологічного устаткування.

Ключові слова: течія гідросумішей, нестаціонарний і стаціонарний режими, динаміка, енергетика, вихровий рух, переробка мінеральної сировини.

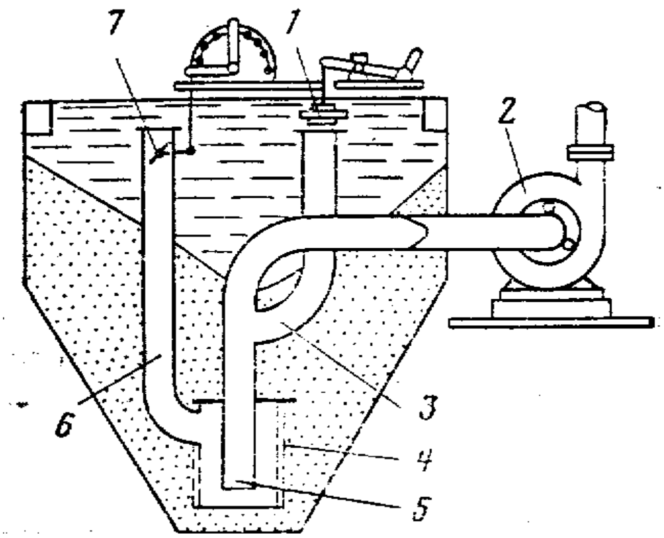
Необхідність підвищення продуктивності збагачувальних фабрик, зниження водо- і енерговитрат і спрощення технологічних рішень при збереженні і навіть збільшенні рівня ефективності розподілу в умовах переробки розсипних руд вимагає застосування збагачувальних апаратів, відмінною рисою яких є потік гідросуміші, який звужується.

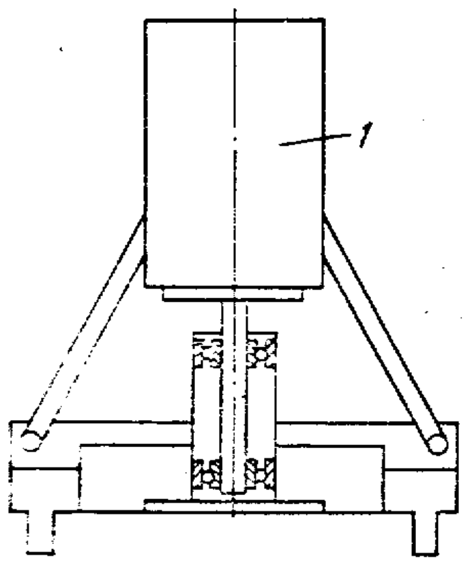
Розподіл мінеральних часток в даних апаратах носить сегрегаційний характер. У нижніх шарах потоку концентруються переважно дрібні зерна більшої щільності, а в верхніх - великі меншої щільності [1]. Завдяки звуженню потоку товщина його збільшується. Дійшовши до нижнього розвантажувального кінця жолоба, шари пульпи, прилеглі до дна, продовжують ковзати по його закругленому кінцю, в той час як верхні шари рухаються по інерції в тому самому напрямку. В результаті цього потік збільшується по висоті, що забезпечує його розсічення на частини, що направляються в окремі приймачі. Суттєвою особливістю роботи розглянутих апаратів є порівняно великий вміст твердого в живленні (50-60% по масі), що визначає сегрегаційний характер розподілу частинок в придонних областях.

Різні пристрої, що працюють на принципі похилого жолоба, який звужується, розглядаються з єдиних позицій, а саме як відповідна частина конусного сепаратора, при цьому рух вважається вісь симетричним і характеризується відстанню уздовж лотка, кутовим зміщенням і кутом, який відлічується в площині, яка перпендикулярна до вісі апарату [1].

Механізм струменевої сепарації - стиснуте осадження або просочування в проміжках в тонкому шарі високої щільності, що аналогічно зворотної класифікації, при якій тонкі важкі частинки витягуються легше, ніж великі важкі. Так як зазвичай важкі мінерали в розсипних рудах не тільки повністю розкриті, а й значно дрібніші, ніж легкі мінерали, тобто вони апріорі, природно попередньо розкласифіковані, то конусні сепаратори ідеально підходять для переробки таких руд. Тому конусні сепаратори стали атрибутом технологій переробки титан-цирконієвих розсипів на фабриках Австралії, США, ПАР та України.

Для забезпечення рівномірності вмісту твердого в живленні використовуються струменеві зумпфи в поєднанні з насосом необхідної подачі (рис. 1).





1 – клапан; 2 – насос; 3, 5, 6 – труби; 4 – коробка; 7 – дросельна заслонка

Рисунок 1 – Струменевий зумпф

Струменевий зумпф в зв'язку з тим, що має значний об'єм, представляє собою бункер для мокрих зернистих матеріалів, що швидко осідають, та які легко і швидко подаються в будь-яку точку технологічного процесу.

Зауважимо, що система регулювання струменевого зумпфа може бути поліпшена при розробці комп'ютерного моделювання технічних процесів для управління його роботою, що дозволить автоматизувати подачу вихідної пульпи оптимальної щільності на конусний сепаратор.

Розглянемо процес течії гідросуміші при подачі вихідної пульпи на збагачувальне устаткування. Геометричні розміри лійки вважаються заданими. Відзначимо, що якщо в пульпі містяться досить тонкі класи твердого, то при будь-якому значені діаметрів частинок вони не встигають розвантажитися в основний потік і йдуть в злив.

Загальний секундний об'єм, який йде в злив через борт лійки, позначимо $Q_{осв}$, а об'ємну долю твердого в зливі $\varphi_{осв}$.

Безпосередньо в воронку надходить секундна витрата

$$Q_1 = Q_{вх} - Q_{осв}, \tag{1}$$

яка при стаціонарному режимі йде на вихід з лійки і на подальшу подачу в технологічні апарати.

За рахунок розвантаження частини частинок з потоку, який йде у злив, що надходить безпосередньо у лійку потік Q_1 більше збагачений твердим продуктом, ніж потік $Q_{вх}$. Неважко бачити, що з потоком Q_1 надходить об'єм твердого

$$Q_{тв} = \varphi_н Q_{вх} - \varphi_{осв} Q_{осв} \tag{2}$$

і об'єм чистої рідини

$$Q_ж = (1-\varphi_н)Q_{вх} - (1-\varphi_{осв})Q_{осв}. \tag{3}$$

Отже, ефективна частка твердого, що надходить безпосередньо у лійку, дорівнює

$$\varphi_{эф} = \frac{\varphi_н Q_{вх} - \varphi_{осв} Q_{осв}}{Q_{вх} - Q_{осв}}. \tag{4}$$

Якщо воронка функціонує з переливом ($Q_{осв}.> 0$), то, так як $\varphi_{осв} < \varphi_н$, ефективна частка $\varphi_{эф}$ буде більшою, чим частка твердого у живленні; при роботі без перелива $Q_{осв}.= 0$ и $\varphi_{эф} = \varphi_н$.

Таким чином, за рахунок перелива відбувається початкове згущення потоку Q_1, що надходить в лійку. Ступінь даного згущення залежить від величини витрати зливу $Q_{осв}$ і частки твердого у ньому $\varphi_{осв}$.

В основу запропонованої математичної моделі течії в згущуючій лійці в загальному випадку при нестаціонарному режимі її роботи покладено рівняння законів збереження маси і імпульсу окремо для несучої рідини і для твердого компонента в припущенні, що течія одновимірна.

Власні швидкості рідини і твердих частинок у лійці будемо позначати відповідно u и v. Закони збереження відповідно маси рідини і твердого мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\varphi)\rho_l S\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\varphi)\rho_l uS\right]=0\,; \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\rho_s S\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\rho_s vS\right)=0\,, \tag{6}$$

де $S(z)$ – площа поперечного перерізу лійки на рівні z; ρ_l и ρ_s – власні значення щільності рідини і твердої фази.

Рівняння (5) і (6) справедливі як в основному каналі згущуючій лійки, так і в патрубках які подають гідросуміш.

Позначимо відносну швидкість осадження частинок через w:

$$w = v - u. \tag{7}$$

Виключаючи з рівнянь (5) і (6) величину $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi S)$, отримаємо наступне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(u+\varphi w)S\right]=0\,, \tag{8}$$

справедливе як при стаціонарній, так і при нестаціонарній течії.

З (8) випливає, що в основному каналі згущуючій лійки при нестаціонарному русі

$$(u+\varphi w)S = f(t)\,, \tag{9}$$

а при стаціонарному

$$(u+\varphi w)S = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Рівняння (10) для двухкомпонентної суміші є аналогом рівняння витрати

$$uS = \mathrm{const},$$

для однорідної нестисливої рідини.

При аналізі режимів роботи згущуючих лійок в технологіях переробки мінеральної сировини звертаємо увагу на те, що рух гідросуміші зазвичай відбувається самопливним чином. При цьому подача гідросуміші в згущуючу лійку відбувається за рахунок насосів, тобто напірної течії пульпи. Проведемо аналіз задачі математичного моделювання процесів динаміки вихрових структур в напірних течіях гідросумішей при переробці мінеральної сировини. Відомо, що розглядати рідину як в’язку або нев’язку - не коректно. Течія рідини може бути в'язкою або нев'язкою. Помилково вважається, що безвихровий рух рідини є автоматично нев'язким. Для підтвердження цього явища розглянемо потенціальну течію - обертання по концентричним колам:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{11}$$

Кутова швидкість частинок рідини, згідно (11), дорівнює:

$$\omega = \frac{V_\theta}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}. \tag{12}$$

Із виразу (12) випливає, що циліндричні шари рідини обертаються з різною кутовою швидкістю, тобто має місце відносне обертання. Дійсно, дотичне напруження, що діє на елемент поверхні, у полярних координатах (r,θ), визначається за формулою [2, 3])

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}\right). \tag{13}$$

Для руху рідини, що описується (11), маємо:

$$\sigma_{r\theta} = \mu\frac{\Gamma}{2\pi}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) = -\mu\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \neq 0. \tag{14}$$

Співвідношення (12) та (14) дають можливість сформулювати наступне твердження: без вихровий рух рідини не є обов'язково ідеальним, тобто нев'язким.

Лише квазітвердотільний рух може бути нев'язким [4]. Таким рухом є абсолютно тверде обертання рідини із сталою кутовою швидкістю

$$V_\theta = \omega_0 r. \tag{15}$$

Дійсно, (15) відповідає відсутності відносного обертання руху шарів і їх тертя – один об одне. Це легко підтверджується підстановкою (15) у (13):

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\omega_0 - \frac{\omega_0 r}{r}\right) = 0. \tag{16}$$

Отже, єдиним нев'язким обертанням рідини, коли усі характеристики течії є функціями лише радіальної координати, є (15) – саме вихровий рух, так як

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{d\left(rV_\theta\right)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r\omega_0 r\right)}{dr} = 2\omega_0 \neq 0.$$

Бездифузійні течії відбуваються, якщо на циліндричну поверхню діє дотичне напруження (13), тоді момент пари сил, що прикладений до рідини, яка міститься усередині циліндричної поверхні радіуса *r*, дорівнює [3]

$$2\pi\mu r^2\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right).$$

Якщо прирівняти швидкість зміни моменту кількості руху рідини у циліндричному шарі (на одиницю його довжини і одиницю товщини) до моменту сил, що діє на нього, отримаємо [3]

$$\frac{\partial\left(2\pi\rho r^2 V_\theta\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{2\pi\mu r^2\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right)\right\}. \tag{17}$$

Із співвідношення (17) і отримується відоме рівняння

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}\right) \tag{18}$$

Рівняння (18) легко узагальнюється і на випадок турбулентної течії. Для цього вираз (13) потрібно замінити на

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial\overline{V_\theta}}{\partial r}-\frac{\overline{V_\theta}}{r}\right)-\rho\overline{V_r'V_\theta'}$$

і замість рівняння (18) отримаємо:

$$\frac{\partial\overline{V_\theta}}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\overline{V_\theta}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{V_\theta}}{\partial r}-\frac{\overline{V_\theta}}{r^2}\right)-\left(\frac{2}{\rho}\overline{V_r'V_\theta'}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{V_r'V_\theta'}\right)\right).$$

Так бездифузійна течія, тобто та, що не змінюється у просторі з часом, є такою, де для будь-якого циліндричного шару рідини завжди має місце рівність нулю сумарного моменту пари сил, що прикладено до внутрішньої та зовнішньої поверхонь. Відомо, що у такому випадку відсутнє прискорення:

$$\frac{\partial\overline{V_\theta}}{\partial t}=0.$$

Отже, всі бездифузійні течії є стаціонарними. При цьому наявність, наприклад, вертикальної дифузії, і це підтверджується чисельними експериментами, амплітуда швидкості зменшується, але при цьому область течії не розширюється (у радіальному напрямку), зберігаючи початкову структуру [5].

При цьому коли діє джерело циркуляції і воно призводить до обертання рідини, то у всіх точках простору, де поле швидкості не описується (5), має місце в'язкий спротив. Тому і вихорі у природі мають скінчені розміри: саме в'язкість не дозволяє їм мати нескінчені розміри. І, якщо порахувати сили тертя, що діють на внутрішню частину області в'язкої течії (границя ядра вихору Штерна, вихор Ренкіна) і на зовнішню, де циркуляція рівна нулю, то отримаємо, як у випадку течії між двома концентричними циліндрами [5], рівнодійну, яка дорівнює нулю.

Використаємо теорему Гельмгольца щодо представлення довільного векторного поля через його дивергенцію та ротор. Дійсно, якщо у певній скінченій області D задані дивергенція та ротор векторного поля, тоді саме поле однозначно знаходиться за ними. Зауважимо, що це теорема є загальною в математиці і не залежить від якогось фізичного процесу, зокрема від моделі рідини (ідеальна, в'язка). Задача визначення поля швидкості за полем завихреності (та дивергенції у випадку стисливої рідини) розглядається різними авторами, яка зводиться до знаходження вихрової нитки тобто області завихреності, розміри яких у тривимірному просторі дорівнюють нулю. У такому розумінні D в [3] і вважається безвихровий рух рідини майже усюди крім вісі обертання рідини.

У загальному випадку (в'язкої чи нев'язкої, ламінарної чи турбулентної) течії нестисливої рідини поле швидкості $\vec{V}$, що породжується полем завихреності, представляється як [3, 6]

$$\vec{V} = rot\vec{\Pi}, \tag{19}$$

де $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\dfrac{rot\vec{V}}{r}d\tau$ – вектор-потенціал.

Таким чином, аби зовні об'ємної рідини D був відсутній рух, необхідно та достатньо щоб там виконувалась рівність

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{rot\vec{V}}{r}d\tau = 0, \text{ або } rot\left(\iiint\limits_{D}\frac{rot\vec{V}}{r}d\tau\right) = 0. \tag{20}$$

Із формули (20) випливає, що вираз у круглих дужках (всередині зовнішнього оператору ротора) повинен бути або рівним нулю, або потенціальною функцією. Складність наведеної формули полягає у тому, що r - відстань від точки простору, у якій визначається поле швидкості до елементарного об'єму інтегрування. Легко зрозуміти, завдяки адитивності інтегралу, що якщо умова (20) виконується для певної області, де містяться вихорі, то вона буде виконуватись і для іншої - більшої області, що містить дану. Отже, якщо на поверхні області вектор швидкості скрізь рівний нулю, то, за умови відсутності вихорів зовні цієї області, маємо також нульову швидкість зовні зазначеної області. Важливо відзначити, що формули перерахунку поля швидкості через поле завихреності, і дівергенції швидкості у випадку стисливої рідини, не обмежуються своїм застосуванням лише ідеальною рідиною, оскільки точковий вихор – це в'язка течія (формула Біо-Савари). Отже, кінематичні умови компактності справедливі принаймні для в'язких бездифузійних течій, коли області завихреності, що генерують зовнішню течію, не змінюються у часі. Це основний недолік сучасної гідромеханіки – відсутність поняття в'язкої бездифузійної течії і, як наслідок, сприйняття її за нев'язку течію.

Для конкретних задач необхідно знати явний вигляд лівої частини (20). Для цього потрібно, по-перше, знати вираз функції ротора у криволінійній системі координат. По-друге, загальний вигляд об'ємного інтегралу у криволінійній системі координат.

Обмежимось ортогональними криволінійними координатними системами із координатами $\left(q_1, q_2, q_3\right)$. Враховуючи, наведене вище, запишемо

$$\iiint_D \frac{rot\vec{V}}{r}d\tau = 4\pi\left(\Pi_1\vec{e}_1 + \Pi_2\vec{e}_2 + \Pi_3\vec{e}_3\right).$$

Компоненти вектор—потенціалу мають наступний скалярний вигляд

$$\Pi_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \left(\frac{\partial H_3V_3}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2V_2}{\partial q_3}\right)H_1\left|r\right|^{-1}dq_1dq_2dq_3, \quad (21)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \left(\frac{\partial H_1V_1}{\partial q_3} - \frac{\partial H_3V_3}{\partial q_1}\right)H_2\left|r\right|^{-1}dq_1dq_2dq_3, \quad (22)$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \left(\frac{\partial H_2V_2}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1V_1}{\partial q_2}\right)H_3\left|r\right|^{-1}dq_1dq_2dq_3. \quad (23)$$

У формулах (21)-(23) H_1, H_2, H_3 -- коефіцієнти Ляме. Отже, вирази (21)-(23) і потрібно підставляти в умову компактності (12).

Динаміка компактної структури течії рідини. Фізику компактності (вихрової) течії зручно тлумачити на підставі змістовних рівнянь переносу кореляцій пульсацій швидкості $\tau_{in} = \overline{v'_i v'_n}$ [5]:

$$\frac{\partial\tau_{in}}{\partial t} + \bar{v}_j\frac{\partial\tau_{in}}{\partial x_j} = -\left(\tau_{ij}\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial x_j} + \tau_{nj}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}\right) - 2\nu\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}\frac{\partial v'_n}{\partial x_j}} +$$

$$+\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{v}'_n}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{v}'_i}{\partial x_n}\right)} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{v'_i v'_n v'_j} + \frac{\delta_{ij}}{\rho}\overline{v'_n p'} + \frac{\delta_{nj}}{\rho}\overline{v'_i p'} - \nu\frac{\partial\tau_{in}}{\partial x_j}\right). \quad (24)$$

Вираз (24) є рівнянням балансу адвекції та сили інерції із сумою доданків, що містяться у правій частині [3]. Ними є у порядку слідування генерація, або породження, турбулентності, є швидкість дисипації, кореляція пульсацій тиску із тензором швидкостей деформацій поля пульсацій цих швидкостей, дифузія як за рахунок пульсацій тиску та швидкості, так і за рахунок в'язкості.

Коли течія є турбулентною, до кожної конкретної задачі застосовується вказаний підхід. І не випадково найпростіший турбулентний вихор, - квазіточковий, - отримується саме як розв'язок рівняння Рейнольдса, у якому момент пар сил в'язких турбулентних напружень у кожній точці течії рівний нулю. Як і у випадку ламінарної течії, квазіточковий турбулентний вихор є стаціонарним [8].

Представлені загальні умови динаміки процесів вихрових структур при течії гідросуміші. Ці умови поширюються принаймні на в'язкий бездифузійний рух рідини. Наведено загальний підхід щодо динаміки течії як руху, що описується балансами та рівновагою різних сил. При цьому рівновага і баланс, що демонструються на прикладі класів бездифузійних течій. Попри певну різноманітність цих балансів, зазначено, що саме відомі моделі найпростіших вихрових течій є когерентними із-за їх бездифузійності, яка є наслідком рівності нулю моменту пари в'язких сил що прикладено до елементарного циліндричного шару рідини – ззовні та в середині. Запропоновано новий підхід щодо визначення розміру вихрової області - на підставі енергетичного балансу між потужністю генерації завихреності та її в'язкої дисипації. У цілому модель компактної вихрової течії це сукупність розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса або Рейнольдса, константи інтегрування яких знаходяться за допомогою кінематичної та енергетичної умов компактності.

В технологіях переробки мінеральної сировини процеси подачі живлення на збагачувальне устаткування передбачає і стаціонарні режими роботи згущуючої лійки. Розрахунок згущуючої лійки при стаціонарному режимі роботи з переливом складається або у визначенні об'ємної частки твердого в подачі на технологічні апарати при заданій частці твердого в живленні, або, навпаки, у визначенні необхідної частки твердого в живленні для забезпечення необхідної частки твердого та витрати у відповідній подачі.

При стаціонарному режимі рівняння нерозривності (5) і (6) і рівняння приймають такий вигляд

$$\frac{d}{dz}\left[(1-\varphi)uS\right]=0, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dz}(\varphi vS)=0, \tag{26}$$

$$u\frac{du}{dz}+\frac{a_0(\varphi)}{\rho_l}\frac{dp}{dz}=a_1(\varphi)g-a_2(\varphi)\frac{C'_f u^2\chi}{S}+a_3(\varphi)\frac{\sigma_s C_x|w|w}{\tau_s}\equiv\Psi_1, \qquad (27)$$

$$v\frac{dv}{dz}+\frac{b_0(\varphi)}{\rho_l}\frac{dp}{dz}=b_1(\varphi)g-b_2(\varphi)\frac{C'_f u^2\chi}{S}-b_3(\varphi)\frac{\sigma_s C_x|w|w}{\tau_s}\equiv\Psi_2. \qquad (28)$$

Із рівнянь (25) і (26) отримаємо, що витрати відповідно рідкої фази q_l і твердого компоненту q_s в кожному поперечному перерізі z = const однакові:

$$(1-\varphi)uS=q_l, \qquad (29)$$

$$\varphi vS=q_s, \qquad (30)$$

При цьому

$$(u+\varphi w)S=q_l+q_s=\mathrm{const}.$$

Із (29) і (30) маємо

$$u=\frac{q_l}{(1-\varphi)S},\quad v=\frac{q_s}{\varphi S}. \qquad (31)$$

Підставляючи останні вирази в рівняння (27) і (28), наведемо їх до виду

$$\frac{u^2}{1-\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{a_0}{\rho_l}\frac{dp}{dz}=\Psi_1+\frac{u^2}{S}\frac{dS}{dz},$$

$$-\frac{v^2}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{b_0}{\rho_l}\frac{dp}{dz}=\Psi_2+\frac{v^2}{S}\frac{dS}{dz}.$$

Вирішуючи ці рівняння щодо $\frac{d\varphi}{dz}$ і $\frac{dp}{dz}$, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dz}=B_0\left(B_1 g+B_2\frac{C'_f u^2\chi}{S}+B_3\frac{\sigma_s C_x|w|w}{\tau_s}+\frac{B_4}{S}\frac{dS}{dz}\right), \qquad (32)$$

$$\frac{1}{\rho_l}\frac{dp}{dz}=\frac{1}{A_0}\left(A_1 g+A_2\frac{C'_f u^2\chi}{S}+A_3\frac{\sigma_s C_x|w|w}{\tau_s}+\frac{A_4}{S}\frac{dS}{dz}\right), \qquad (33)$$

де введено позначення:

$$B_0=\frac{\varphi(1-\varphi)}{\varphi b_0 u^2+(1-\varphi)a_0 v^2};\quad B_1=b_0a_1-a_0b_1;\quad B_2=a_0b_2-b_0a_2;$$

$$B_3 = b_0 a_3 + a_0 b_3; \quad B_4 = b_0 u^2 - a_0 v^2; \quad A_0 = (1-\varphi) a_0 v^2 + \varphi b_0 u^2;$$

$$A_1 = (1-\varphi) a_1 v^2 + \varphi b_1 u^2; \quad A_2 = -\left[(1-\varphi) a_2 v^2 + \varphi b_2 u^2\right];$$

$$A_3 = (1-\varphi) a_3 v^2 - \varphi b_3 u^2; \quad A_4 = u^2 v^2 .$$

Якщо u и v виразити із (31) та підставити в праву частину рівняння (32), то вона буде функцією тільки від φ і заданого розподілу площини поперечного перерізу $S(z)$.

Таким чином, рівняння (32) розглядається як диференціальне рівняння для розподілу об'ємної частки твердого по довжині згущуючої лійки. Якщо відома глибина заповнення лійки H і задано значення φ у верхньому або нижньому її перерезі, то інтегрування рівняння (32) дозволить визначити об'ємну частку твердого по всій довжині лійки. Зауважимо, що рівняння (33) незалежно від рівняння (32), що визначає розподіл тиску по глибині лійки. Якщо в праву частину рівняння (33) підставити u і v із (31), то його права частина буде функцією від $S(z)$ і φ, яка визначається із рівняння (32). Після того, як визначено φ(z) із (32), швидкість рідини u(z) і твердого v(z) знаходиться із (31).

Гідродинамічна модель роботи згущуючої лійки в нестаціонарному і стаціонарному режимах, яка зводиться до вирішення системи диференціальних рівнянь за глибиною лійки з урахуванням результатів математичного моделювання процесів динаміки вихрових структур в напірних течіях гідросумішей при переробці мінеральної сировини дозволить обґрунтувати раціональні значення технологічних і технічних параметрів діючого на виробництві технологічного устаткування, яке при стаціонарному режимі забезпечує практично однорідну течію по всій висоті без зміни концентрації із постачанням визначеної частки твердого на виході.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Блюсс Б.А., Сокил А.М., Гоман О.Г. Проблемы гравитационного обогащения титан-цирконовых песков. Днепропетровск: Поліграфіст, 1999. 190 с.

2. Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. Москва: Мир, 1973, 760 с.

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва: Наука, 1987, 840 с.

4. Лукьянов П.В. Зависимость динамики субмезомасштабного компактного вихря от его внутренней структуры. Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. 2014, №18 (311). С. 32—45

5. Шлигтинг Г. Теория пограничного слоя. Москва: Наука, 1974, 712 с.

6. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1975, 738 p.

7. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних вихорів. Наукові вісті НТТУ КПІ. 2010, №4(72). С. 145—150.

8. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей. Изв. РАН. ФАО. 1992, т. 28 №6. С. 615—624.

9. Рудяк В.Я., Савченко С.О. Моделирование неустойчивости закрученной затопленной струи, индуцирумой вихрестоком. Сибирский журнал индустриальной математики. 2002, Том V, №4(12). С. 139—149.

10. Колисниченко, А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014, №70. 36 с. URL http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014--70

REFERENSES

1. Blyuss B.A., Sokil A.V. and Goman O.G. (1999), *Problemy gravitatsionnogo obogashcheniya titan-tsirkonovykh peskov* [Problems of gravitation enrichment of tytan-cyrkon sands], Poligrafist, Dnepropetrovsk, UA.

2. Batchelor G. K. (1973), *Vvedeniye v dinamiku zhidkosti* [An introduction to Fluid Dynamics], Mir, Moscow, SU.

3. Loytsyansky L.G. (1987), *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas], Nauka, Moscow, SU.

4. Lukianov P.V. (2014), «The effect of internal structure on submesoscale vortex dynamics», *Visnyk Cherkasskogo Universitetu. Section Applied mathematics and informatics*, no. 18 (311), pp. 32—45.

5. Schlihting G. (1974), *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary layer theory], Science, Moscow, SU.

6. Lamb H. (1975), *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

7. Lukianov P.V. (2011), «One-Dimensional Models of Compact Vortices», *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine KPI, no.* 4(72), pp. 145—150.

8. Kozlov V.F. (1992), «Stationary models of baroclinic compensated vortices», *News of the Russian academy of sciences. Atmosphere and Ocean Physics,* Vol. 28, no. 6, pp. 615—624.

9. Rudyak V.Y. and Savchenko S.O. (2002), «Modelling of swirl submerged jet induced by vortex drain», *Sib. Journal of Industrial Mathematics*., no. 4 , pp. 139—149.

10. Kolisnichenko, A.V. (2014), «On inverse energy cascade in spiral turbulence of astrophysical non-magnetic disk», *Preprints of Keldysh IPM,* Vol. 70, 36 p. URL http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014--70.

Про авторів

Блюсс Борис Олександрович**,** доктор технічних наук, професор, завідувач відділу геодинамічних систем та вібраційних технологій, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України (ІГТМ НАН України), Дніпро, Україна, bblyuss@gmail.com

Лук'янов Павло Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент кафедри гідрогазових систем, Національний авіаційний університет Міністерства освіти і науки України, Київ, Україна, pvl1967eddy@gmail.com

Дзюба Сергій Володимирович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник відділу геодинамічних систем та вібраційних технологій, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України (ІГТМ НАН України), Дніпро, Україна, sergejdzuba@gmail.com

About the authors

Blyuss Borys Oleksandrovych, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.) Professor, Head of Department of Geodynamic System and Vibration Tehnologies, M.S. Poljakov Institute of Geotechnical Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NAS of Ukraine), Dnipro, Ukraine, bblyuss@gmail.com

Lukianov Pavlo Volodymyrovych**,** Candidate of Physics and Mathematics Sciences (Ph.D..), Senior Researcher, Accosiate Professor in Hydro Gas Systems Depertment, of National Aviation University MES of Ukraine, Kyiv, Ukraine, pvl1967eddy@gmail.com

Dziuba Serhii Volodymyrovych, Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Senior Researcher in Department of Geodynamic System and Vibration Tehnologies, M.S. Poljakov Institute of Geotechnical Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NAS of Ukraine), Dnipro, Ukraine, sergejdzuba@gmail.com

Аннотация. В статье приведены результаты анализа процесса течения гидросмеси при подаче исходной пульпы на обогатительное оборудование, а именно струйный зумпф схема которого представлена на рисунке. В основу предложенной математической модели течения в сгущающей воронке в общем случае при нестационарном режиме ее работы положены уравнения законов сохранения массы и импульса отдельно для несущей жидкости и для твердого компонента в предположении, что течение одномерное. При этом геометрические размеры сгущающей воронки считаются заданными, и отмечается, что если в пульпе содержатся достаточно тонкие классы твердого, то при любом значении диаметров частиц они не успевают разгрузиться в основной поток и идут в слив. При анализе режимов работы сгущающихо воронок в технологиях переработки минерального сырья обращаем внимание на то, что движение гидросмеси обычно происходит самотеком. При этом подача гидросмеси в сгущающую воронку происходит за счет насосов, то есть напорное течения пульпы. На основе соотношений, связывающих векторы полей скорости и завихренности, сформулированы общие кинематические условия динамики несжимаемой вязкой бездиффузионного течения гидросмесей. Предложено динамические условия компактности - балансы различных сил и физических механизмов. В целом модель компактной структуры течения соответствует тем решениям уравнений баланса определенных сил, которые согласуются с кинематическими условиями компактности. Предложено энергетический подход для обоснования компактности: мощность диссипации во всей области движения жидкости равна мощности генерации, что дает возможность определения размера области стационарного вихревого течения. Все вихревые структуры, распределения поля скорости в которых превращают диффузный оператор в ноль, имеют одинаковые свойства - момент пары вязких сил, приложенных к внутренней и внешней поверхностям элементарного жидкого кольцевого цилиндра, равны нулю, что обеспечивает стационарность движения. Гидродинамическая модель работы сгущающей воронки, что предложено в статье сводится к решению системы дифференциальных уравнений по глубине воронки с учетом результатов моделирования процессов динамики вихревых структур в напорных течениях гидросмесей при переработке минерального сырья позволяет обосновать рациональные значения технологических и геометрических параметров действующего на

производстве технологического оборудования.

Ключевые слова: течение гидросмеси, нестационарный и стационарный режимы, динамика, энергетика, вихревое движение, переработка минерального сырья.

Abstract. The article presents results of analysis of the slurry flowing process when initial pulp is fed to the concentration equipment, namely, the jet dipping. The basis of the proposed mathematical model of flow in a condensing funnel in the general case at nonstationary mode of its operation is the equation of the law of mass and momentum conservation separately for the carrier fluid and for the solid component under assumption that the flow is one-dimensional. In this case, the condensing funnel geometric dimensions are considered to be given, and it is noted that if the pulp contains rather thin solids, then, at any given diameter of particles, they do not have time to disperse into the main stream and, therefore, they flow into discharge system. In the analysis of modes of condensing funnels operating in the mineral processing technologies, the authors draw their attention to the fact that slurry usually flows by gravity, but to the thickening funnel, it is fed by pumps, that is, here it is a process of the pulp pressure flowing. On the basis of the relation that binds velocity vectors and vorticity fields, general kinematic conditions are formulated for the dynamics of not-compressed viscous not-diffusive flow of slurry. Dynamic conditions of compactness are proposed, that is a balance of various forces and physical mechanisms. In the whole, model of compact structure of flow corresponds to those solutions of the force-balance equations, which are in harmony with kinematic conditions of compactness. Energy approach is proposed for compactness substantiation: dissipation power in the entire region of the liquid motion equals to generation power, and it makes possible to determine dimension of the region with stationary vortex flow. All vortex structures, in which distributions of velocity fields convert the diffusion operator into zero, feature the same property: moment of viscous-force pair applied to the inner and outer surfaces of elementary liquid ring cylinder, is equal to zero and, thus, provides stationary motion. The proposed in the article hydrodynamic model of condensing funnel operation is reduced to the solution of differential equation system for the depth of the funnel with taking into account results of simulation of processes of the vortex structure dynamics in the slurry pressure flows at processing of mineral raw materials and helps to validate rational values of technological and geometric parameters of process equipment operating in the industries.

Keywords: slurry flow, non-stationary and stationary modes, dynamics, energy, vortex motion, mineral processing.

Стаття надійшла до редакції 20.07.2018.
Рекомендовано до друку д-ром техн. наук В.П. Надутим