

А. Л. Рачинская<sup>1</sup>, Е. А. Румянцева<sup>2</sup>

**ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ  
НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

*Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова,  
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65082, Украина;*

*e-mail: <sup>1</sup> rachinskaya@onu.edu.ua; <sup>2</sup> alenarumyantseva1@gmail.com*

**Abstract.** An optimal by braking processing speed of dynamically asymmetric body is studied. This study is carried out in a non-dimensional form that makes it possible to obtain a multi-parameter system of motion equations. In the three-dimensional space, the vector hodograph of the angular momentum is modeled under different values of the system parameters. It is concluded that the optimal braking of body in the proposed statement some relationships among the problem parameters are needed.

**Key words:** rotation, time-optimal deceleration, vector hodograph, angular momentum, resistant medium, viscous fluid.

**Введение.**

Исследование задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки остается актуальным на протяжении многих десятилетий. Это обусловлено ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Стремительное развитие IT-технологий позволяет не только применять новые методики исследования задач, но и проводить моделирование исследуемых процессов.

Разработка собственных пакетов для моделирования механических процессов позволяет проводить исследования движения твердого тела относительно неподвижной точки под действием различных силовых факторов, а также их совокупности. Для каждого силового фактора строится необходимая физическая и математическая модели, а также исследуется вопрос взаимодействия силовых факторов. Для обобщения полученных результатов необходимо строить модели в безразмерном виде, выбирая в качестве масштаба характерные параметры задачи.

Одной из важных характеристик вращательного движения твердого тела относительно неподвижной точки является вектор кинетического момента. Голограф данного вектора является пространственной кривой, которая позволяет исследовать характер движения твердого тела и определить необходимые соотношения между параметрами модели для получения оптимального режима в управлении твердым телом.

Движение твердого тела относительно неподвижной точки в [4 – 7, 10 – 12, 14] складывается из движения Эйлера – Пуансона вокруг вектора кинетического момента и движения самого вектора кинетического момента. Если на тело не действуют моменты приложенных сил, то оно совершает некоторое движение, которое называется невозмущенным и является движением Эйлера – Пуансона. В реальных условиях на тело действуют возмущающие моменты внешних и внутренних сил, в частности, силы сопротивления внешней среды и внутренние диссипативные силы. Такое движение называется возмущенным.

Работы [4 – 7, 10 – 12, 14] посвящены исследованию возмущенных движений твердого тела под действием моментов сил разной физической природы. В монографии В.В. Белецкого [5] проводится описание методов исследования движения под действием гравитационных, магнитных, аэродинамических моментов и моментов сил

светового давления. В статье Ф.Л.Черноусько [11] рассматривается движение твердого тела с полостью (квazitвердого тела), заполненной жидкостью большой вязкости. В работе Л.Д.Акуленко и Д.Д.Лещенко [4] изучено вращение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде. Известны работы, в которых изучались частные случаи интегрирования уравнений движения [6, 7, 10, 14].

Повышающиеся требования к качеству функционирования летательных и космических аппаратов приводят к построению законов управления движениями сложных нелинейных систем и их оптимизации. Некоторые работы с использованием различных методов посвящены оптимальному управлению движением твердого тела относительно центра масс [1, 12].

### §1. Цель исследования, постановка проблемы и её решение.

Основная цель исследования – моделирование годографа вектора кинетического момента при различных значениях параметров возмущающих моментов для определения соотношения этих параметров в случае оптимального торможения вращения квазитвердого тела относительно центра масс.

Для реализации поставленной цели были поставлены следующие задачи:

построение математической модели оптимального торможения вращения квазитвердого тела относительно центра масс в среде с сопротивлением;

численный эксперимент при различных значениях параметров возмущающих моментов;

трехмерное моделирование годографа вектора кинетического момента.

В данной статье представлены результаты исследования последней из вышеупомянутых задач, а именно моделирование годографа вектора кинетического момента квазитвердого тела.

**Моделирование годографа вектора кинетического момента квазитвердого тела.** Рассматривается динамически несимметричное квазитвердое тело, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству  $A_1 > A_2 > A_3$ . На основе подхода [1, 13] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси  $(Ox_i, i = 1, 2, 3)$ , связанной с квазитвердым телом системы координат (уравнения Эйлера), могут быть представлены в виде [11, 14, 1, 13]

$$J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] = M^u + M^r + M^c. \quad (1.1)$$

Здесь  $M^u$  – вектор управляющего момента сил;  $M^r$  – момент сил диссипации;  $M^c$  – момент сил вязкой жидкости в полости тела,  $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции тела,  $\omega = (p, q, r)$  – вектор абсолютной угловой скорости.

Кинетический момент тела определяется стандартным образом

$$G = J\omega; \quad G = (G_1, G_2, G_3); \quad G_1 = A_1 p; \quad G_2 = A_2 q; \quad G_3 = A_3 r,$$

где  $G = |G| = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}$  его величина.

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращения

$$\omega(t_0) = \omega^0; \quad \omega(T) = 0; \quad T \rightarrow \min_u; \quad |u| \leq 1.$$

Требуется найти квазиоптимальный закон управления в виде синтеза  $u = u(t, \omega)$ , соответствующую ему траекторию  $\omega(t, t_0, \omega^0)$  и время быстродействия  $T = T(t_0, \omega^0)$ .

В работе предполагается, что движение квазитвердого тела происходит в среде с сопротивлением, которое моделируется моментом вида

$$M^r = -LJ\omega.$$

Здесь  $L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – тензор сопротивления среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено тремя парами приложенных сил. При этом, проекции момента этих пар на главные оси инерции тела являются величинами  $\varepsilon\lambda_1 A_1 p$ ,  $\varepsilon\lambda_2 A_2 q$ ,  $\varepsilon\lambda_3 A_3 r$  [3, 4, 7, 10], где  $\varepsilon \ll 1$ .

Далее предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е.  $\mathcal{G} \gg 1$  ( $\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$ ). Форма полости принимается близкой к сферической, тогда, следуя [2], для тензора вязких сил  $\tilde{P}$  имеем выражение

$$\tilde{P} = P_* \text{diag}(1, 1, 1); \quad P_* = \frac{8\pi\rho a^7}{525\mathcal{G}}; \quad P_* = \varepsilon P.$$

Здесь  $\rho$ ,  $\mathcal{G}$  – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно,  $a$  – радиус полости.

Тензор  $\tilde{P}$ , зависящий только от формы полости, характеризует внутренний диссипативный момент сил в квазистатическом приближении, обусловленный вязкой жидкостью в полости. Для простоты в уравнениях (1.1) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной  $P_* > 0$ . Компоненты этого тензора имеют вид  $\tilde{P}_{ij} = P_* \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера (такой вид тензор  $\tilde{P}$  имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет собой значительные вычислительные трудности.

Величина управляющего момента сил  $M^u$  предполагается малой порядка  $\varepsilon$ . Компоненты управляющих моментов на оси  $Ox_i$  представлены в виде произведений постоянных  $b_i$ , имеющих размерность момента сил, на малый параметр  $\varepsilon$  и безразмерные управляющие функции  $u_i$ , подлежащие определению,  $M_i^u = \varepsilon b_i u_i$ .

Выражения  $\varepsilon b_{1,2,3}$  характеризуют эффективность системы управления по каждой из связанной осей.

Известно [1], что при  $b_i = b$  ( $b > 0$ ), где параметр  $b$  может быть функцией времени, оптимальный по быстродействию закон торможения имеет вид:  $M_i = -G_i G^{-1}$ . Движение в этом частном случае системы управления было изучено в [1].

Если величины  $b_i$  близки, то указанный закон торможения будет квазиоптимальным [1, 12].

Для прикладных задач представляет интерес исследование движения квазитвердого тела с заданным законом управления достаточно простого вида [1, 12]:

$$M_1 = -\varepsilon b_1 \frac{A_1 p}{G}; \quad M_2 = -\varepsilon b_2 \frac{A_2 q}{G}; \quad M_3 = -\varepsilon b_3 \frac{A_3 r}{G}.$$

Момент сил вязкой жидкости в полости  $M^c$  с учетом внешних силовых факторов согласно [11] определяется следующим образом:

$$M^c = \varepsilon P \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}; \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} m_1 = & p \left( \lambda^2 + \frac{b_1^2}{G^2} \right) + \frac{b_1 + \lambda G}{A_1} \left( \frac{\alpha_{33} (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2)}{1 - \alpha_{33}^2} q + r \alpha_{32} \right) + \frac{qr}{A_1} (A_3 - A_2) \left( \frac{b_1}{G} + 3\lambda \right) + \\ & + \frac{2\lambda b_1}{G} p + \frac{qr}{GA_1} (b_2 (A_1 + A_3 - A_2) - b_3 (A_1 + A_2 - A_3)) + \\ & + \frac{p}{A_1 A_2 A_3} \left[ q^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1) \right]. \end{aligned}$$

Выражения для  $m_2$ ,  $m_3$  получаются из  $m_1$  в (1.2) циклической перестановкой величин  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . При этом, коэффициенты,  $\lambda^2 + b_i^2/G^2$ ,  $\lambda + b_i/G$ ,  $2\lambda b_i/G$  в  $m_i (i = 1, 2, 3)$  остаются неизменными, а слагаемые, содержащие  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2$ , имеют подобный вид. Направляющие косинусы  $\alpha_{ij}$  выражаются через углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  по известным формулам [5].

Без учета влияния  $M^u$  и  $M^r$  на  $M^c$  с точностью до величины первого порядка малости  $\varepsilon$  момент сил вязкой жидкости в полости имеет вид

$$M^c = \frac{\varepsilon P}{A_1 A_2 A_3} \begin{pmatrix} p \left[ q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \\ q \left[ r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) \right] \\ r \left[ p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) \right] \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Ограничимся указанным выражением в первом приближении. Упрощенные на основе выражения (1.3) уравнения управляемого движения (1.1) в проекциях на главные центральные оси инерции имеют вид

$$A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2) q r = -\varepsilon b_1 \frac{A_1 p}{G} - \varepsilon \lambda A_1 p + \frac{\varepsilon P}{A_1 A_2 A_3} p \left[ q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right]; \quad (1.4)$$

$$A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3) p r = -\varepsilon b_2 \frac{A_2 q}{G} - \varepsilon \lambda A_2 q + \frac{\varepsilon P}{A_1 A_2 A_3} q \left[ r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_2 - A_1)(A_1 - A_3 + A_2) \right];$$

$$A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1) p q = -\varepsilon b_3 \frac{A_3 r}{G} - \varepsilon \lambda A_3 r + \frac{\varepsilon P}{A_1 A_2 A_3} r \left[ p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) \right].$$

Для численного исследования годографа вектора кинетического момента квазитвердого тела приведем систему (1.4) к безразмерному виду. В качестве характерных параметров задачи выберем момент инерции твердого тела относительно оси  $x_1 - A_1$ , начальную скорость вращения твердого тела  $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ . Введем безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$  и безразмерные величины  $\tilde{p} = p/\omega_0$ ,  $\tilde{q} = q/\omega_0$ ,  $\tilde{r} = r/\omega_0$ ,  $\tilde{A}_2 = A_2/A_1$ ,  $\tilde{A}_3 = A_3/A_1$ ,  $\tilde{G} = G/G_0$ .

Введем обозначения для соотношений величин коэффициентов управляющего момента

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon b_1}{b_3}; \quad \chi_2 = \frac{\varepsilon b_2}{b_3},$$

для величин коэффициентов момента диссипации –

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\varepsilon \lambda_1}{\omega_0}; \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{\varepsilon \lambda_2}{\omega_0}; \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{\varepsilon \lambda_3}{\omega_0}$$

и характерные числа задачи

$$\sigma_1 = \frac{b_3}{G_0 \omega_0} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{A_1 P \rho \omega_0}{A_2 A_3 \mathcal{G}} \quad (\sigma_2 \sim \varepsilon).$$

В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -\tilde{r}\tilde{q}(\tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) - \chi_1 \sigma_1 \frac{\tilde{p}}{G} - \tilde{\lambda}_1 \tilde{p} + \sigma_2 \tilde{p} \left[ \tilde{q}^2 \tilde{A}_2 (1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + 1) + \tilde{r}^2 \tilde{A}_3 (1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_3 - \tilde{A}_2 + 1) \right]; \\ \tilde{A}_2 \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{r}(1 - \tilde{A}_3) - \chi_2 \sigma_1 \tilde{A}_2 \frac{\tilde{q}}{G} - \tilde{\lambda}_2 \tilde{A}_2 \tilde{q} + \\ &+ \sigma_2 \tilde{q} \left[ \tilde{r}^2 \tilde{A}_3 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_3 - 1 + \tilde{A}_2) + \tilde{p}^2 (\tilde{A}_2 - 1)(1 - \tilde{A}_3 + \tilde{A}_2) \right]; \\ \tilde{A}_3 \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{q}(\tilde{A}_2 - 1) - \sigma_1 \tilde{A}_3 \frac{\tilde{r}}{G} - \tilde{\lambda}_3 \tilde{A}_3 \tilde{r} + \\ &+ \sigma_2 \tilde{r} \left[ \tilde{p}^2 (\tilde{A}_3 - 1)(1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) + \tilde{q}^2 \tilde{A}_2 (\tilde{A}_3 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_2 - 1 + \tilde{A}_3) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Имеем многопараметрическую систему дифференциальных уравнений, численное исследование которой позволит построить и проанализировать годограф вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  квазитвердого тела.

## §2. Результаты исследования и их анализ.

В случае  $\chi_1 = \chi_2 = 1$  для  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  и  $\sigma_2 = 0$  известен закон изменения модуля вектора кинетического момента и время торможения твердого тела [2, 3]. В этом случае годограф вектора кинетического момента имеет вид, представленный на рис. 1. На рисунке представлены два годографа вектора кинетического момента.

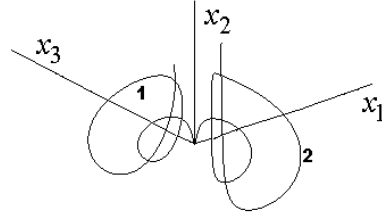


Рис. 1

Кривая 1 построена для твердого тела с геометрией масс  $\tilde{A}_2 = 0,8$  и  $\tilde{A}_3 = 0,6$ . В начальный момент времени проекции вектора угловой скорости на оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют значения:  $\tilde{p}_0 = 0,5$ ;  $\tilde{q}_0 = 0,25$  и  $\tilde{r}_0 \approx 1,404$ . Для характерного числа выбрано значение  $\sigma_1 = 0,01$  и коэффициенты сопротивления  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,01$ . Кривая 2 получена для твердого тела с геометрией масс  $\tilde{A}_2 = 0,85$  и  $\tilde{A}_3 = 0,75$ . В начальный момент времени проекции вектора угловой скорости на оси  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют значения  $\tilde{p}_0 = 0,6$ ;  $\tilde{q}_0 = 0,8$  и  $\tilde{r}_0 \approx 0,56$ . Для характерного числа выбрано значение  $\sigma_1 = 0,005$  и коэффициенты сопротивления  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,001$ .

В первом расчетном случае годограф вектора кинетического момента охватывает ось  $x_3$ , а во втором – ось  $x_1$ . Поворот вектора происходит около указанных осей на протяжении всего времени торможения. В первом расчетном случае в начальный момент времени выполняется неравенство  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$ , а во втором –  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$ , что и определяет ось годографа вектора кинетического момента.

Из неравенства  $\tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$  можно получить соотношение между проекциями угловой скорости на оси  $x_1$  и  $x_3$

$$\tilde{p}^2 > \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2. \quad (2.1)$$

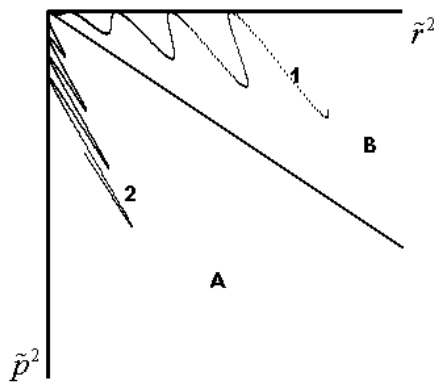


Рис. 2

$\tilde{r}$ . На рис. 2 в одном масштабе представлены кривые, образованные точками с координатами  $\left(\tilde{p}^2, \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2\right)$  согласно проведенному численному эксперименту. Кривая 1 (рис. 2) соответствует годографу 1 (рис. 1), кривая 2 – годографу 2. Из рис. 2 видно, что на протяжении всего времени торможения твердого тела кривые сохраняют свое расположение в соответствующих квадрантах: кривая 1 находится в полуквадранте В, что соответствует вращению твердого тела около оси  $x_3$ ; кривая 2 находится в полуквадранте А, что соответствует вращению твердого тела около оси  $x_1$ .

Исследование движения твердого тела проводится для  $\sigma_1 \geq 0,005$ , так как для меньших  $\sigma_1$  (при  $\sigma_2 = 0$ ) влияние управляющего момента мало, что упрощает модель исследования до движения твердого тела в среде с сопротивлением. Такое исследование было проведено в [8].

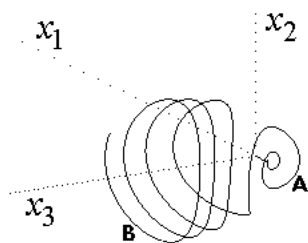


Рис. 3

Проведено численное исследование для различных значений коэффициентов управляющего момента при выполнении неравенства  $\chi_1 < \chi_2 < 1$  для твердого тела, кинематические и геометрические характеристики которого в начальный момент времени удовлетворяют неравенству  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$ . Исследование показало, что практически во всех расчетных случаях получен годограф вектора кинетического момента подобный представленному на рис. 3.

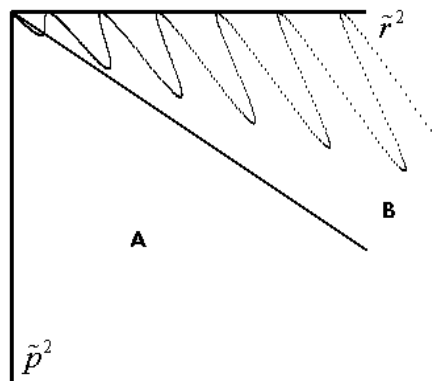


Рис. 4

Кривая соответствует расчетному случаю  $\tilde{p}_0 = 0,5$ ;  $\tilde{q}_0 = 0,25$ ;  $\sigma_1 = 0,01$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,001$ ;  $\chi_1 = 0,1$ ;  $\chi_2 = 0,2$  и геометрии масс  $\tilde{A}_2 = 0,8$ ;  $\tilde{A}_3 = 0,6$ . Изначально кривая годографа охватывает ось наименьшего момента инерции  $x_3$ , затем при убывании модуля вектора кинетического момента наблюдается поворот самого вектора к оси наибольшего момента инерции  $x_1$ , около которой и происходит торможение твердого тела. Рис. 4 иллюстрирует ось годографа вектора кинетического момента при движении твердого тела в процессе торможения.

При увеличении коэффициентов управляющего момента область годографа из квадранта А уменьшается. Установлено, что для коэффициента управляющего момента  $\chi_2 \leq 1$  всегда есть значения  $\chi_1 < \chi_2$ , при которых вектор кинетического момента совершает поворот от оси наименьшего момента инерции  $x_3$  к оси  $x_1$ .

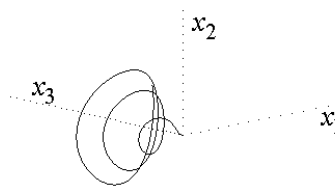


Рис. 5

Численное исследование годографа вектора кинетического момента было проведено для твердого тела с коэффициентами управляющего момента вида  $\chi_1 > \chi_2 > 1$  для твердого тела с той же геометрией масс, что и в предыдущем расчете. Кривая (рис. 5) соответствует расчетному случаю  $\tilde{p}_0 = 0,5$ ;  $\tilde{q}_0 = 0,25$ ;  $\sigma_1 = 0,01$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,001$ ;  $\chi_1 = 1,4$ ;  $\chi_2 = 1,2$ .

Получено, что годограф вектора кинетического момента всегда остается в квадранте В, что представлено на рис. 6.

Проводился численный эксперимент при различных значениях коэффициентов управляющего момента для твердого тела, кинематические и геометрические характеристики которого в начальный момент времени удовлетворяют неравенству  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$ . В этом случае годограф вектора кинетического момента в начальный момент времени охватывает ось наибольшего момента инерции  $x_1$ .

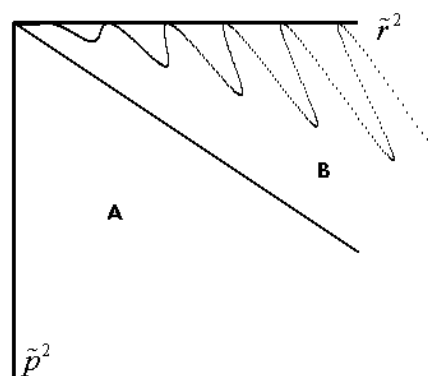


Рис. 6

Если выполняется неравенство  $\chi_1 < \chi_2 < 1$ , то годограф вектора всегда остается около

оси  $x_1$ , т.е. в полуквадранте А, подобно кривой 2 (рис. 1). В случае неравенства  $\chi_1 > \chi_2 > 1$  для коэффициентов управляющего момента наблюдается поворот от оси  $x_1$  к оси  $x_3$ , т.е. переход от полуквадранта А к полуквадранту В.

Проведенное численное исследование позволяет сделать вывод, что в случае малого момента сопротивления среды, при движении твердого тела под действием управляющего момента в задаче оптимального по быстрдействию торможения мгновенная ось вращения относительно центра масс стремится занять положение оси с наименьшим управляющим моментом.

При моделировании сопротивления среды с параметрами

$$0,001 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad (2.2)$$

в уравнениях (1.5) в случае управляющего момента с коэффициентами  $\chi_1 < \chi_2 < 1$  характер поведения годографа кинетического момента подобен кривой рис. 3. При этом наблюдается уменьшение времени торможения и более быстрый поворот к оси  $x_1$  по сравнению с  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,001$ . Например, при параметрах рис. 3 для коэффициентов момента сопротивления  $\lambda_1 = 0,001$ ;  $\lambda_2 = 0,002$ ;  $\lambda_3 = 0,005$  (среда с малым сопротивлением) уменьшение времени торможения происходит на 4% и времени поворота на 33%.

Проводился численный эксперимент годографа вектора кинетического момента в среде с параметрами

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0,001 \quad (2.3)$$

при управляющем моменте с неравенством  $\chi_1 < \chi_2 < 1$ . Было получено, что для любой комбинации параметров  $\chi_1$  и  $\chi_2$  существует комбинация параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , при которых годограф принимает вид кривой, представленной на рис. 5. Так же ис-

следованы случаи комбинаций параметров  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0,001$ ,  $\chi_1 > \chi_2 > 1$  и  $0,001 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ,  $\chi_1 > \chi_2 > 1$ .

Проведенное численное исследование показало, что в среде с сопротивлением, параметры которого удовлетворяют неравенству (2.2), необходимо проводить оптимальное торможение твердого тела управляющим моментом с коэффициентами  $\chi_1 < \chi_2 < 1$ . В случае выполнения неравенства (2.3) – с коэффициентами  $\chi_1 > \chi_2 > 1$ .

Проведено исследование влияния момента сил вязкой жидкости в полости квазитвердого тела на годограф вектора кинетического момента. Ранее установлено, что при возмущенном движении тела под влиянием только момента сил вязкой жидкости в полости независимо от начального положения вектор кинетического момента стремится к оси максимального момента инерции, т.е. тело стремится к стационарному движению [9].

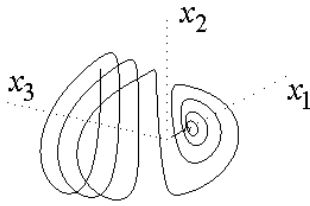


Рис. 7

Совместное влияние управляющего момента и момента сил вязкой жидкости приводит к годографам вектора кинетического момента таких же видов, как представлено ранее, что зависит от соотношения безразмерных коэффициентов  $\chi_i (i = 1, 2)$ , геометрии масс квазитвердого тела и от значений проекций вектора кинетического момента в начальный момент времени. Годограф кинетического момента для квазитвердого тела с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$ , при коэффициентах

управляющего момента с неравенством  $\chi_1 < \chi_2 < 1$ , при выполнении в начальный момент времени неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$ , всегда будет подобен годографу на рис. 7, а для неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$  – на рис. 8.

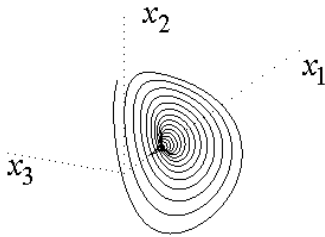


Рис. 8

Проведенное численное исследование для различных начальных условий движения тела, для квазитвердых тел с разной геометрией масс и для различных значений коэффициентов управления позволило сделать следующий вывод. Для квазитвердых тел с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$  рекомендуется проводить оптимальное торможение тела управляющим моментом с коэффициентами  $\chi_1 > \chi_2 > 1$  при выполнении в начальный момент времени неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$ , а для квазитвердых тел с геометрией масс  $A_1 < A_2 < A_3$  – с

коэффициентами управляющего момента  $\chi_1 < \chi_2 < 1$  при выполнении в начальный момент времени неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$ .

Влияние сопротивления среды на характер годографа вектора кинетического момента твердого тела подробно изучено в [8]. В случае движения в среде с сопротивлением квазитвердого тела с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$  так же получены годографы, изображенные на рис. 7 и 8. Годограф, представленный на рис. 7, имеет место для случая  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0,001$ , при выполнении в начальный момент времени неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$ , а для неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$  в начальный момент времени, годограф представлен на рис. 8.

Таким образом, получено, что движение квазитвердого тела с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$  при выполнении неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$  в начальный момент времени независимо от модели сопротивления среды всегда будет характеризоваться поворотом оси вращения тела: от оси минимального момента инерции  $x_3$  к оси максимального момента инерции  $x_1$ .



Для среды с большим сопротивлением торможение тела может происходить быстрее, чем поворот к оси максимального момента инерции  $x_1$ .

При выполнении в начальный момент времени неравенства  $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$  для квазитвердого тела с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$  в среде с сопротивлением, для которой коэффициенты проекций момента сопротивления удовлетворяют неравенству  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0,001$ , торможение твердого тела будет проходить без поворота оси вращения квазитвердого тела, так как годограф вектора кинетического момента изначально охватывает ось наибольшего момента инерции  $x_1$ . Аналогичное исследование было проведено для тела с геометрией масс  $A_1 < A_2 < A_3$ .

#### **Выводы.**

В случае оптимального торможения квазитвердого тела в среде с сопротивлением для процесса торможения вращательного движения тела без поворота оси вращения всегда можно определить значения коэффициентов управляющего момента  $\chi_1 > \chi_2 > 1$  для тела с геометрией масс  $A_1 > A_2 > A_3$  или  $\chi_1 < \chi_2 < 1$  – для тела с геометрией масс  $A_1 < A_2 < A_3$ .

Теоретическое значение представленного исследования определяется тем, что был предложен новый метод определения характера годографа вектора кинетического момента квазитвердого тела посредством использования квадрантов неравенства (2.1).

Представленный нами метод позволит заменить более трудоемкий метод графического построения трехмерного годографа вектора кинетического момента.

Предлагаемая стратегия разработана для практического применения в системах управления ориентацией и стабилизацией движения квазитвердых тел, спутников, ракетно-космической техники, космических аппаратов.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших научных разработках, посвященных анализу оптимального торможения квазитвердых тел в гравитационном поле.

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено оптимальне за швидкодією гальмування динамічно несиметричного тіла. Дослідження проводяться в безрозмірному вигляді, що дозволяє отримати багатопараметричну систему рівнянь руху. Моделюється годограф вектора кінетичного моменту в тривимірному просторі при різних значеннях параметрів системи. Зроблено висновок, що для оптимального гальмування тіла в запропонованій постановці необхідні певні співвідношення між параметрами задачі.

1. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
2. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д., Рачинская А.Л., Зинкевич Я.С. Возмущенные и управляемые движения твердого тела. – Одесса: Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, 2013. – 288 с.
3. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Леценко Д.Д. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. № 1. – С. 16 – 21.
4. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. № 3. – С. 5 – 13.
5. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
6. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
7. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. II. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
8. Рачинская А.Л. Вращение твердого тела в среде с сопротивлением // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2014. – Т. 19, вип. 3 (23). – С. 84 – 92.
9. Рачинская А.Л. Движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Космические исследования. – 2015. – 53, № 6. – С. 516 – 520.
10. Смольников Б.А. Обобщение эйлера случая движения твердого тела // ПММ. – 1967. – 31, вып. 4. – С. 735 – 736.
11. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // ЖВМ и МФ. – 1965. 5. – С. 1049 – 1070.
12. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
13. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
14. Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. Control of Fluid Containing Rotating Rigid Bodies. – New York: CRC Press, 2013. – 160 p.

Поступила 26.12.2017

Утверждена в печать 22.05.2018