В.Ф.Мейш[1], Н.В.Майбородина[2]

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НОРМАЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

[1]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина,
e-mail: vfmeish@gmail.com;
[2]ОП НУБиП Украины «Нежинский агротехнический институт»,
ул. Шевченко 10, 16600, Нежин, Украина.

Abstract. A statement of problems on the forced non-axisymmetric vibrations of stiffened ellipsoidal shells under nonstationary loads is presented. A numerical algorithm of solving is constructed and the obtained results are analysed.

Key words: supported ellipsoidal shell, geometrically nonlinear theory, numerical method, nonstationary vibrations.

Введение.

Проблема вынужденных колебаний подкрепленных оболочек достаточно хорошо изучена. Согласно обзорных работ и монографий, в основном рассмотрены осесимметричные и неосесимметричные гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1]. Результаты по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках достаточно широко представлены в работе [2]. Практически отсутствуют работы по изучению динамического поведения подкрепленных оболочек более сложной формы. В этом направлении можно выделить следующие работы [4, 16 – 18], в которых представлены результаты по вынужденным колебаниям оболочек более сложной формы, в частности эллипсоидальных подкрепленных оболочек [4, 16]. Следует отметить, что большинство работ по динамике эллипсоидальных оболочек на сегодняшний день выполнено для задач гармонических, свободных колебаний и устойчивости (случай гладких оболочек) [7 – 15, 19, 20]. Интерес представляют исследования по изучению неосесимметричных колебаний подкрепленных оболочек более сложной геометрии с учетом дискретного расположения ребер при действии нестационарных нагрузок.

В данной работе приведены уравнения неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленной эллипсоидальной оболочки. При рассмотрении обшивки и подкрепляющих ребер используется уточненная модель оболочек и стержней, в которой принимаются гипотезы Тимошенко [2]. Для вывода уравнений колебаний использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. Численный метод решения динамических уравнений основан на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем для уравнения с разрывными коэффициентами. В качестве числового примера рассмотрена задача неосесимметричных колебаний поперечно подкрепленной эллипсоидальной оболочки при действии распределенной внутренней нагрузки.

§1. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную упругую структуру, которая представляет собой дискретно подкрепленную поперечными и продольными ребрами эллипсоидальную оболочку. Каноническое уравнение гладкого эллипсоида вращения имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\,, \tag{1.1}$$

где величины a, b – полуоси эллипса.

Параметрические уравнения эллипсоида имеют вид [3]:

$$x=a\sin\alpha_1\cos\alpha_2\,; \quad y=a\sin\alpha_1\sin\alpha_2\,; \quad z=b\cos\alpha_1\,, \tag{1.2}$$

где параметры α_1,α_2 – гауссовы криволинейные координаты, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, а α_2 – окружному.

С учетом соотношений (1.2), получены выражения для компонент метрики и формы срединной поверхности оболочки [3], а также коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны срединной поверхности эллипсоидальной оболочки в следующем виде:

$$\begin{gathered} A_1=a(\cos^2\alpha_1+k^2\sin^2\alpha_1)^{1/2};\; A_2=a\sin\alpha_1\,; \quad k=b/a\,; \\ k_1=\frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1+k^2\sin^2\alpha_1)^{-3/2};\; k_2=\frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1+k^2\sin^2\alpha_1)^{-1/2}\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

При построении математической модели процесса динамического деформирования конструкции используем геометрически нелинейный вариант теории оболочек, основанной на гипотезах Тимошенко, в основу которого положены следующие предположения: изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1,s_2,z) задается аппроксимацией вида

$$\begin{gathered} u_1^z(s_1,s_2,z)=u_1(s_1,s_2)+z\varphi_1(s_1,s_2)\,;\; u_2^z(s_1,s_2,z)=u_2(s_1,s_2)+z\varphi_2(s_1,s_2)\,; \\ u_3^z(s_1,s_2,z)=u_3(s_1,s_2),\; z\in\left[-h/2,h/2\right], \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\bar{U}=(u_1,u_2,\; u_3,\varphi_1,\varphi_2)^T$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; s_1, s_2 – длины дуг в меридиальном и окружном направлениях.

При построении математической модели деформирования i-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1, исходим из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Деформированное состояние i-го подкрепляющего ребра определяется через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U}_i=(u_{1i},u_{2i},$ $u_{3i},\varphi_{1i},\varphi_{2i})^T$. При этом используется следующая аппроксимация перемещений по сечению i-го подкрепляющего ребра

$$\begin{gathered} u_{1i}^{yz}\left(s_1,y,z\right)=u_{1i}(s_1)+z\varphi_{1i}(s_1)\,; \\ u_{2i}^{yz}\left(s_1,y,z\right)=u_{2i}(s_1)+z\varphi_{2i}(s_1)\,;u_{3i}^{yz}\left(s_1,y,z\right)=u_{3i}(s_1)\,. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i-го ребра, направленного вдоль оси α_1, и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записываем в виде [2]

$$u_{1i}(s_1) = u_1\left(s_1, s_{2i}\right) \pm h_{ci}\varphi_1(s_1, s_{2i})\,;$$

$$u_{2i}(s_1) = u_2\left(s_1, s_{2i}\right) \pm h_{ci}\varphi_2(s_1, s_{2i}); \tag{1.6}$$

$$u_{3i}(s_1) = u_3\left(s_1, s_{2i}\right),\ \ \varphi_{1i}(s_1) = \varphi_1\left(s_1, s_{2i}\right),\ \ \varphi_{2i}(s_1) = \varphi_2\left(s_1, s_{2i}\right),$$

где $h_{ci} = 0{,}5\left(h + h_i\right)$ – расстояние от срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения i-го ребра; h_i – высота i-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1; s_{2i} – координата линии проектирования центра тяжести поперечного сечения i-го ребра на координатную срединную поверхность обшивки.

При построении математической модели деформирования j-го подкрепляющего ребра, направляемого вдоль оси α_2, исходим из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Деформированное состояние j-го подкрепляющего ребра определяем через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$. При этом используем следующую аппроксимацию перемещений по сечению j-го подкрепляющего ребра:

$$u_{1j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = u_{1j}(s_2) + z\varphi_{1j}(s_2);\ \ u_{2j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = u_{2j}(s_2) + z\varphi_{2j}(s_2)\,;$$

$$u_{3j}^{xz}\left(x, s_2, z\right) = u_{3j}(s_2)\,. \tag{1.7}$$

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения j-го ребра, направленного вдоль оси α_2, и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записываем в виде [2]:

$$u_{1j}(s_2) = u_1\left(s_{1j}, s_2\right) \pm h_{cj}\varphi_2(s_{1j}, s_2)\,;\ \ u_{2j}(s_2) = u_2\left(s_{1j}, s_2\right) \pm h_{cj}\varphi_1(s_{1j}, s_2)\,;$$

$$u_{3j}(s_2) = u_3\left(s_{1j}, s_2\right);\ \ \varphi_{1j}(s_2) = \varphi_2\left(s_{1j}, s_2\right);\ \ \varphi_{2j}(s_2) = \varphi_1\left(s_{1j}, s_2\right), \tag{1.8}$$

где $h_{cj} = 0{,}5\left(h + h_j\right)$ – расстояние от срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения j-го; h_j – высота j-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2; α_{1j} – координата линии проектирования центра тяжести поперечного сечения j-го ребра на координатную срединную поверхность обшивки.

В уравнениях (1.6), (1.8) знак «+» соответствует случаю внешнего подкрепления, а знак «–» соответствует случаю внутреннего подкрепления ребрами.

Для вывода уравнений движения дискретно подкрепленной структуры используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [2], согласно которому

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\varPi - K\right) + \delta A\right]dt = 0 \tag{1.9}$$

$$\left(\varPi = \varPi_0 + \sum_{i=1}^{n_1}\varPi_i + \sum_{j=1}^{n_2}\varPi_j\,;\quad K = K_0 + \sum_{i=1}^{n_1}K_i + \sum_{j=1}^{n_2}K_j\right), \tag{1.10}$$

где $\varPi_0, K_0$ – потенциальная и кинетическая энергия обшивки; $\varPi_i, K_i$ – потенциальная и кинетическая энергия соответствующего i-го подкрепляющего ребра; $\varPi_j, K_j$ –

потенциальная и кинетическая энергия соответствующего j-го подкрепляющего ребра; A – работа внешних сил.

Выражения для δK и $\delta\Pi$ имеют такой вид:

$$\delta\Pi = \delta\Pi_0 + \sum_{i=1}^{n_1}\delta\Pi_i + \sum_{j=1}^{n_2}\delta\Pi_j\ ; \quad \delta K = \delta K_0 + \sum_{i=1}^{n_1}\delta K_i + \sum_{j=1}^{n_2}\delta K_j;$$

$$\delta\Pi_0 = \iint_S \left[T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + \right.$$

$$\left. + M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22} + H\delta\left(\tau_1 + \tau_2\right)\right]ds\ ;$$

$$\delta\Pi_i = \int_{l_1}\left[T_{11i}\delta\varepsilon_{11i} + T_{12i}\delta\varepsilon_{12i} + T_{13i}\delta\varepsilon_{13i} + M_{11i}\delta\chi_{11i} + M_{12i}\delta\chi_{12i}\right] dl_1\ ; \qquad (1.11)$$

$$\delta\Pi_j = \int_{l_2}\left[T_{21j}\delta\varepsilon_{21j} + T_{22j}\delta\varepsilon_{22j} + T_{23j}\delta\varepsilon_{23j} + M_{21j}\delta\kappa_{21j} + M_{22j}\delta\kappa_{22j}\right] dl_2\ ;$$

$$\delta K_0 = \rho h \iint_S \left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\delta\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\delta\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t}\delta\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)dS\right];$$

$$\delta K_i = \rho_i h_i \int_{l_1}\left[\frac{\partial u_{1i}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial u_{2i}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial u_{3i}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{3i}}{\partial t} + \frac{I_{1i}}{F_i}\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial t} + \frac{I_{cri}}{F_i}\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial t}\right]dl_1;$$

$$\delta K_j = \rho_j h_j \int_{l_2}\left[\frac{\partial u_{1j}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{1j}}{\partial t} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{2j}}{\partial t} + \frac{\partial u_{3j}}{\partial t}\delta\frac{\partial u_{3j}}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{crj}}{F_j}\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t} + \frac{I_{2j}}{F_j}\frac{\partial\varphi_{2j}}{\partial t}\delta\frac{\partial\varphi_{2j}}{\partial t}\right]dl_2.$$

После стандартного выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта обшивка (i-ое ребро) и обшивка (j-ое ребро) (1,6), (1.8) и их интегрального представления [2], функционал (1.11) представим в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S\left\{\left\{\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - L_1(\overline{U}) + \sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2} - L_{1i}(\overline{U}_i)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} - L_{1j}(\overline{U}_j)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2j})\right\}\delta u_1 +$$

$$+\left\{\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - L_2(\overline{U}) + \sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2} - L_{2i}(\overline{U}_i)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} - L_{2j}(\overline{U}_j)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2j})\right\}\delta u_2 + \qquad (1.12)$$

$$+\left\{\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - L_3(\overline{U}) + \sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2} - L_{3i}(\overline{U}_i)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} - L_{3j}(\overline{U}_j)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2j})\right\}\delta u_3 +$$

$$+\left\{\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}-L_4(\overline{U})+\sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i F_i\left(\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}+\frac{I_{1i}}{F_i}\frac{\partial^2\varphi_{1i}}{\partial t^2}\right)-L_{4i}(\overline{U}_i)\right]\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}+\frac{I_{crj}}{F_j}\frac{\partial^2\varphi_{1j}}{\partial t^2}\right)-L_{4j}(\overline{U}_j)\right]\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right\}\delta\varphi_1+$$

$$+\left\{\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}-L_5(\overline{U})+\sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i F_i\left(\frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}+\frac{I_{kri}}{F_i}\frac{\partial^2\varphi_{2i}}{\partial t^2}\right)-L_{5i}(\overline{U}_i)\right]\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2}+\frac{I_{2j}}{F_j}\frac{\partial^2\varphi_{2j}}{\partial t^2}\right)-L_{5j}(\overline{U}_j)\right]\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right\}\delta\varphi_2\right\}dS+$$

$$+\int_{\Gamma_1}\left\{\left[T_{11}+\sum_{i=1}^{n_1}T_{11i}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\right]\delta u_1+\left[(S+k_2H)+\sum_{i=1}^{n_1}T_{12i}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\right]\delta u_2+\right.$$

$$+\left[T_{13}+\sum_{i=1}^{n_1}T_{13i}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\right]\delta u_3+\left[M_{11}+\sum_{i=1}^{n_1}(M_{11i}\pm h_iT_{11i})\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\right]\delta\varphi_1+$$

$$\left.+\left[H+\sum_{i=1}^{n_1}(M_{22i}\pm h_iT_{12i})\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\right]\delta\varphi_2\right\}dl_1+$$

$$+\int_{\Gamma_2}\left\{\left[S+k_1H+\sum_{j=1}^{n_2}T_{21j}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right]\delta u_1+\left[T_{22}+\sum_{j=1}^{n_2}T_{22j}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right]\delta u_2+\right.$$

$$+\left[T_{23}+\sum_{j=1}^{n_2}T_{23i}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right]\delta u_3+\left[H+\sum_{j=1}^{n_2}(M_{21j}\pm h_jT_{21j})\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right]\delta\varphi_1+$$

$$\left.\left.+\left[M_{22}+\sum_{j=1}^{n_2}(M_{22j}\pm h_jT_{22j})\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\right]\delta\varphi_2\right\}dl_2\right\}dt-$$

$$-\iint_S\left[\rho h\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\delta u_1+\frac{\partial u_2}{\partial t}\delta u_2+\frac{\partial u_3}{\partial t}\delta u_3\right)+\rho\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\delta\varphi_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\delta\varphi_2\right)\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2}dS-$$

$$-\int_{l_1}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left[\rho_i h_i\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial t}\delta u_{1i}+\frac{\partial u_{2i}}{\partial t}\delta u_{2i}+\frac{\partial u_{3i}}{\partial t}\delta u_{3i}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\rho_i\left(I_{1i}\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial t}\delta\varphi_{1i}+I_{cri}\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial t}\delta\varphi_{2i}\right)\right]\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})\Bigg|_{t_1}^{t_2}\right\}dl_1-$$

$$-\int_{l_2}\left\{\sum_{j=1}^{n_2}\left[\rho_j h_j\left(\frac{\partial u_{1j}}{\partial t}\delta u_{1j}+\frac{\partial u_{2j}}{\partial t}\delta u_{2j}+\frac{\partial u_{3j}}{\partial t}\delta u_{3j}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\rho_j\left(I_{crj}\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t}\delta\varphi_{1j}+I_{2j}\frac{\partial\varphi_{2j}}{\partial t}\delta\varphi_{2j}\right)\right]\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})\Bigg|_{t_1}^{t_2}\right\}dl_2=0,$$

при этом

$$\int_z \left(\varepsilon_{13}^z - \frac{\sigma_{13}^z}{G_{13}} \right) f_1(z) = 0\,; \quad \int_z \left(\varepsilon_{23}^z - \frac{\sigma_{23}^z}{G_{23}} \right) f_1(z) = 0\,,$$

где

$$L_1(\overline{U}) = \frac{1}{A_1A_2}\left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[A_1(S+k_1H)\right] + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(S+k_2H)\right\} + k_1T_{13}\,;$$

$$L_2(\overline{U}) = \frac{1}{A_1A_2}\left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[A_2(S+k_2H)\right] - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(S+k_1H) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1T_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_{11}\right\} + k_2T_{23}\,;$$

$$L_3(\overline{U}) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_{13}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1T_{13})\right] - k_1T_{11} - k_2T_{22}\,; \tag{1.13}$$

$$L_4(\overline{U}) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H) + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H\right] - T_{13}\,;$$

$$L_5(\overline{U}) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1M_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}\right] - T_{23}\,;$$

$$L_{1i}(\overline{U}_i) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11i}}{\partial\alpha_1} + k_{1i}T_{13i}\,; \quad L_{2i}(\overline{U}_i) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12i}}{\partial\alpha_1}\,; \quad L_{3i}(\overline{U}_i) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13i}}{\partial\alpha_1} - k_{1i}T_{11i}\,; \tag{1.14}$$

$$L_{4i}(\overline{U}_i) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11i}}{\partial\alpha_1} - T_{13i} \pm h_i\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11i}}{\partial\alpha_1} + k_{1i}T_{11i}\right); \quad L_{5i}(\overline{U}_i) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(M_{12i} \pm h_iT_{12i}\right);$$

$$L_{1j}(\overline{U}_j) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{21j}}{\partial\alpha_2}\,; \quad L_{2j}(\overline{U}_j) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22j}}{\partial\alpha_2} + k_{2j}T_{23j}\,; \quad L_{3j}(\overline{U}_j) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{23j}}{\partial\alpha_2} - k_{2j}T_{22j}\,; \tag{1.15}$$

$$L_{4j}(\overline{U}_j) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(M_{21j} \pm h_jT_{21j}\right); \quad L_{5j}(\overline{U}_j) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22j}}{\partial\alpha_2} - T_{23j} \pm h_j\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22j}}{\partial\alpha_2} + k_{2j}T_{23j}\right).$$

В соотношениях (1.11): $l_1 = A_1 d\alpha_1$; $l_2 = A_2 d\alpha_2$; Γ_1, Γ_2 – краевые контуры, которые ограничивают оболочку и совпадают с координатными линиями.

После стандартных преобразований получаем три группы уравнений.

Уравнения колебаний оболочки в гладкой области:

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{22}\right] + k_1\overline{T}_{13} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{21}) = \rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{21}\right] + k_2\overline{T}_{23} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{22}) = \rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2\overline{T}_{13}) - k_1T_{11} - k_2T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1\overline{T}_{23}) = \rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\,, \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{22}\right] - T_{13} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1M_{21}) = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 M_{12})+\frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{21}\right]+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 M_{22})-T_{23}=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}.$$

Уравнения колебания i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1:

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1}+k_{1i}T_{13i}+[S]_i=\rho_i F_i\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\pm h_{ci}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right);$$

$$\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1}+[T_{22}]_i=\rho_i F_i\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\pm h_{ci}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right);\ \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1}-k_{1i}T_{11i}+[T_{23}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};\quad(1.17)$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1}-T_{13i}\pm h_{ci}\left(\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1}+k_{1i}T_{13i}\right)+[H]_i=\rho_i F_i\left(\pm h_{ci}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\left(h_{ci}^2+\frac{I_{1i}}{F_i}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right);$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1}\pm h_{ci}\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1}+[M_{22}]_i=\rho_i F_i\left(\pm h_{ci}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(h_{ci}^2+\frac{I_{cri}}{F_i}\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right).$$

Уравнения колебания j-го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2 :

$$\frac{\partial\overline{T}_{21j}}{\partial s_2}+[T_{11}]_j=\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right);$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2}+k_{2j}\overline{T}_{23j}+[S]_j=\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right);\ \frac{\partial\overline{T}_{23j}}{\partial s_2}-k_{2j}T_{22j}+[\overline{T}_{13}]_j=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2}\pm h_{cj}\frac{\partial\overline{T}_{21j}}{\partial s_2}+[M_{11}]_j=\rho_j F_j\left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{crj}}{F_j}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right);\quad(1.18)$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2}-T_{23j}\pm h_{cj}\left(\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2}+k_{2j}\overline{T}_{23j}\right)+[H]_j=\rho_j F_j\left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{2j}}{F_j}\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right).$$

Обозначения величин и соответствующие выражения усилий – моментов для гладкой оболочки и подкрепляющих ребер введены согласно [2].

Выражения усилий – моментов для гладкой оболочки имеют вид:

$$T_{11}=B_{11}\varepsilon_{11}+B_{12}\varepsilon_{22};\ T_{22}=B_{21}\varepsilon_{11}+B_{22}\varepsilon_{22};\ T_{12}=S+k_2 H;\ T_{21}=S+k_1 H;$$

$$T_{13}=B_{13}\varepsilon_{13};\ T_{23}=B_{23}\varepsilon_{23};\ \overline{T}_{13}=T_{13}+T_{11}\theta_1+S\theta_2;\ \overline{T}_{23}=T_{23}+T_{22}\theta_2+S\theta_1;$$

$$S=B_s\varepsilon_{12};\ M_{11}=D_{11}\chi_{11}+D_{12}\chi_{22};\ M_{22}=D_{21}\chi_{11}+D_{22}\chi_{22};\quad(1.19)$$

$$M_{12}=M_{21}=H;\quad H=D_s\chi_{12}.$$

Выражения усилий – моментов для подкрепляющих элементов имеют вид:

– для i -го ребра

$$T_{11i}=E_i F_i\varepsilon_{11i};\quad T_{12i}=G_i F_i\varepsilon_{12i};\quad T_{13i}=k_i^2 G_i F_i\varepsilon_{13i};$$

$$M_{11i}=E_i I_{1i}\chi_{11i};\ M_{12i}=G_i I_{cri}\chi_{12i};\quad(1.20)$$

– для j -го ребра

$$T_{21j}=G_j F_j\varepsilon_{21j};\ T_{22j}=E_j F_j\varepsilon_{22j};\ T_{23j}=G_j F_j k_j^2\varepsilon_{23j};$$

$$M_{21j} = G_j I_{crj} \chi_{21j}\,;\; M_{22j} = E_j I_{2j} \chi_{22j}\,. \qquad (1.21)$$

Выражения для величин деформаций в квадратичном приближении для оболочки записываем в виде [2]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} + k_1 u_3 + \frac{1}{2}\theta_1^2\,;\;\; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_1 + k_2 u_3 + \frac{1}{2}\theta_2^2\,;$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \theta_1\theta_2\,;\;\; \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1\,;\;\; \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2\,;$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2\,;\;\; \omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1}\,;\;\; \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_2\,; \qquad (1.22)$$

$$\theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_1 u_1\,;\;\; \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2\,;\;\; \chi_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\,;\;\; \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_1\,;$$

$$\chi_{12} = \tau_1 + \tau_2 + \kappa_1\omega_1 + \kappa_2\omega_2\,;\;\; \tau_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}\,;\quad \tau_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_2\,.$$

Деформационные соотношения для величин i -го ребра имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} + k_{1i}u_3 + \frac{1}{2}\theta_{1j}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2j}^2\,;\;\; \varepsilon_{12i} = \theta_{2i}\,;\;\; \varepsilon_{13i} = \varphi_1 + \theta_{1i}\,;$$

$$(1.23)$$

$$\theta_{1i} = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_{1i}\left(u_1 \pm h_{ci}\varphi_1\right);\;\; \theta_{2i} = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \pm h_{ci}\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1};\;\; \chi_{11i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1};\;\; \chi_{12i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}\,.$$

Выражения для величин деформаций в квадратичном приближении для подкрепляющих поперечных ребер записываются в виде:

$$\varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj}\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + k_{2j}u_3 + \frac{1}{2}\theta_{1j}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2j}^2\,;\;\; \varepsilon_{21j} = \theta_{2j}\,;\varepsilon_{23j} = \varphi_2 + \theta_{1j}\,;$$

$$(1.24)$$

$$\theta_{1j} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_{2j}\left(u_2 \pm h_{cj}\varphi_2\right);\;\; \theta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \pm h_{cj}\frac{\partial \varphi}{\partial s_2};\;\; \chi_{21j} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}\,;\;\; \chi_{22j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}\,.$$

Уравнения колебаний (1.16) – (1.24) дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями, которые вытекают из представления функционала (1.12).

§2. Численный алгоритм.

Уравнения (1.16) – (1.24) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координатах s_1 и s_2. Пространственными разрывами являются линии проектирования центров тяжести поперечного сечения продольного и поперечного ребер на срединную поверхность эллипсоидальной оболочки. Исходя из этого фактора, численный алгоритм решения исходной задачи строится следующим образом: ищется решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки (1.16) и на линиях пространственных разрывов (1.17), (1.18) [2]. Соответственно записываются и интегрируются уравнения в гладкой области и на линиях разрывов. Разностный алгоритм основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной аппроксимации по временной координате [2, 6]. При этом компоненты обобщенного вектора перемещений аппроксимируются в целых точках разностной сетки, а компоненты величин деформаций и усилий в полуцелых точках сетки. Такой подход позволяет сохранить дивергентную форму разностного представления дифференциальных уравнений, а также и выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне [5]. Переход от непрерывной системы к конечно-разностной выполняется в два этапа. Первый этап состоит в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений колебаний в усилиях – моментах.

Выполняя операцию интегрирования уравнений (1.16), с использованием явной аппроксимации по временной координате, получаем следующие разностные уравнения в гладкой области эллипсоидальной оболочки:

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^{n}_{11\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^{n}_{11\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}T^{n}_{22\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\frac{A_{1\,l}\,T^{n}_{21\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^{n}_{21\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}+k_{1\,l}\,T^{n}_{13\,l,m}=\rho h(u^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}\;; \qquad (2.1)$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^{n}_{12\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^{n}_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}T^{n}_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,T^{n}_{22\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^{n}_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)+k_{2\,l}\,T^{n}_{23\,l,m}=\rho h(u^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}\;;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^{n}_{13\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}T^{n}_{13\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-k_{1\,l}\,T^{n}_{11\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,T^{n}_{23\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^{n}_{23\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-k_{2\,l}\,T^{n}_{22\,l,m}+P^{n}_{3l,m}=\rho h(u^{n}_{3\,l,m})_{\overline{t}t}\;;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^{n}_{11\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^{n}_{11\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^{n}_{22\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^{n}_{21\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^{n}_{21\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^{n}_{13\,l,m}=\frac{\rho h^3}{12}(\varphi^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}\;;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^{n}_{12\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^{n}_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^{n}_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^{n}_{22\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^{n}_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^{n}_{23\,l,m}=\frac{\rho h^3}{12}(\varphi^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}\,.$$

В разностных уравнениях (2.1) компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки $\overline{U}=\left(u_1,u_2,u_3,\varphi_1,\varphi_2\right)^T$

отнесены к целым узлам разностной сетки $\bar{U}_{l,m} = \left(u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m}\right)^T$ по пространственным координатам.

Выполняя операцию интегрирования уравнений (1.17), с использованием явной аппроксимации по временной координате, получаем следующие разностные уравнения для i -го подкрепляющего ребра:

$$\frac{T^n_{11il+1/2} - T^n_{11il-1/2}}{\Delta s_1} + k_{1il} T^n_{13il} + \left[S\right]^n_i = \rho_i F_i \left[\left(u^n_{1\,l}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} \left(\varphi^n_{1\,l}\right)_{\bar{t}t} \right];$$

$$\frac{T^n_{12il+1/2} - T^n_{12il-1/2}}{\Delta s_1} + \left[T_{22}\right]^n_i = \rho_i F_i \left[\left(u^n_{2\,l}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} \left(\varphi^n_{2\,l}\right)_{\bar{t}t} \right];$$

$$\frac{T^n_{13il+1/2} - T^n_{13il-1/2}}{\Delta s_1} - k_{1il} T^n_{11il} + \left[T_{23}\right]^n_i = \rho_i F_i \left(u^n_{3\,l}\right)_{\bar{t}t};$$

$$\frac{M^n_{11il+1/2} - M^n_{21il-1/2}}{\Delta s_1} - T^n_{13il} \pm h_{ci} \left(\frac{T^n_{11il+1/2} - T^n_{11il-1/2}}{\Delta s_1} + k_{1il} T^n_{13il} \right) + \left[H\right]^n_i =$$

$$= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \left(u^n_{1\,l}\right)_{\bar{t}t} + \left(h^2_{ci} + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \left(\varphi^n_{1\,l}\right)_{\bar{t}t} \right]; \qquad (2.2)$$

$$\frac{M^n_{12il+1/2} - M^n_{12il-1/2}}{\Delta s_1} \pm h_{ci} \frac{T^n_{12ik+1/2} - T^n_{12ik-1/2}}{\Delta s_1} + [M_{22}]^n_i =$$

$$= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \left(u^n_{2\,l}\right)_{\bar{t}t} + \left(h^2_{ci} + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \left(\varphi^n_{2\,l}\right)_{\bar{t}t} \right].$$

В разностных уравнениях (2.2) компоненты обобщенного вектора перемещений центров масс поперечных сечений i -го ребра $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ отнесены к целым узлам разностной сетки по пространственным координатам.

Выполняя операцию интегрирования уравнений (1.17), с использованием явной аппроксимации по временной координате, получаем следующие разностные уравнения для j -го подкрепляющего ребра:

$$\frac{T^n_{21jm+1/2} - T^n_{21jm-1/2}}{\Delta s_2} + \left[T_{11}\right]^n_j = \rho_j F_j \left[\left(u^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} \left(\varphi^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} \right];$$

$$\frac{T^n_{22\,j\,m+1/2} - T^n_{22\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + k_{2\,j\,m} T^n_{23\,j\,m} + \left[S\right]^n_j = \rho_j F_j \left[\left(u^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} \left(\varphi^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t} \right];$$

$$\frac{T^n_{23\,j\,m+1/2} - T^n_{23\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2} - k_{2\,j\,m} T^n_{22\,j\,m} + \left[T_{13}\right]^n_j = \rho_j F_j \left(u^n_{3\,m}\right)_{\bar{t}t}; \qquad (2.3)$$

$$\frac{M^n_{21\,j\,m+1/2} - M^n_{21\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{T^n_{21\,j\,m+1/2} - T^n_{21\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2} + \left[M_{11}\right]^n_j =$$

$$= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \left(u^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} + \left(h^2_{cj} + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \left(\varphi^n_{1\,m}\right)_{\bar{t}t} \right];$$

$$\frac{M^n_{22\,j\,m+1/2}-M^n_{22\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2}-T^n_{23\,j\,m}\pm h_{cj}\left(\frac{T^n_{22\,j\,m+1/2}-T^n_{22\,j\,m-1/2}}{\Delta s_2}+k_{2\,j\,m}T^n_{23\,j\,m}\right)+\left[H\right]^n_j=$$

$$=\rho_j F_j\left[\pm h_{cj}\left(u^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t}+\left(h^2_{cj}+\frac{I_{2j}}{F_j}\right)\left(\varphi^n_{2\,m}\right)_{\bar{t}t}\right].$$

Аналогично случаю гладкой эллипсоидальной оболочки, в разностных уравнениях (2.2) компоненты обобщенного вектора перемещений центров масс поперечных сечений j-го ребра $\bar{U}_j=(u_{1j},u_{2j},u_{3j},\varphi_{1j},\varphi_{2j})^T$ отнесены к целым узлам разностной сетки по пространственным координатам.

Второй этап аппроксимации уравнений состоит в конечно-разностных аппроксимациях величин усилий – моментов и соответствующих деформаций, чтобы выполнялся конечно-разностный аналог энергетического уравнения [5].

При исследовании вопросов устойчивости линеаризованных разностных уравнений используются необходимые условия устойчивости, согласно которому $\Delta t\le 2/\omega$, где $\omega=\max\left(\omega_0,\omega_i,\omega_j\right)$ – максимальные частоты собственных колебаний дискретно-разностной системы соответственно обшивки, i-го и j-го подкрепляющего элемента.

§3. Числовой пример.

В качестве числового примера рассматривалась задача вынужденных колебаний эллипсоидальной оболочки подкрепленной продольно-поперечным набором ребер с жестко защемленными краями в области $D=\left\{\alpha_{10}\le\alpha_1\le\alpha_{1N}\,,\ \alpha_{20}\le\alpha_2\le\alpha_{2N}\right\}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$. Краевые условия при этом имеют следующий вид: $\bar{U}\left(\alpha_{10},\alpha_2\right)=\bar{U}\left(\alpha_{1N},\alpha_2\right)=0$, $\bar{U}\left(\alpha_1,\alpha_{20}\right)=\bar{U}\left(\alpha_1,\alpha_{2N}\right)=0$. Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений нулевые при $t=0$, т.е.

$$u_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=u_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=u_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\varphi_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\varphi_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=0\,;$$

$$\frac{\partial u_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial t}=\frac{\partial u_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial t}=\frac{\partial u_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial t}=0\,.$$

Распределенная нормальная нагрузка $P_3\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$ имеет вид

$$P_3\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)=A\cdot\sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t)-\eta(t-T)\right],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A=10^6$ Па; $T=50\cdot10^{-6}$ с.

Задача рассмотрена при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной конструкции (случай изотропной оболочки):

$$\alpha_{10}=\pi/12\,;\ \ \alpha_{1N}=\pi-(\pi/12)\,;\ \ \alpha_{20}=-\pi/2\,;\ \ \alpha_{2N}=\pi/2\,;\ \ a/h=30\,;\ \ k=1{,}5\,;$$

$$E=7\cdot10^{10}\text{ Па};\ \ \nu=0{,}33\,;\ \ \rho=2{,}7\cdot10^3\text{ кг/м}^3.$$

Геометрические и физико-механические параметры поперечно подкрепляющего элемента: $h_j=4\cdot h$; $F_j=4\cdot h^2$; $E_j=E$; $G_j=G_{12}$; $\rho_j=\rho$.

Продольно подкрепляющий элемент располагался вдоль координаты α_1 в сечении $\alpha_2=0$. Геометрические и физико-механические параметры подкрепляющего элемента: $h_i=4\cdot h$; $F_i=4\cdot h^2$; $E_i=E$; $G_i=G_{12}$; $\rho_i=\rho$.

Поперечно подкрепляющий элемент располагался вдоль по координате α_2 в сечении $\alpha_1=\pi/2$.

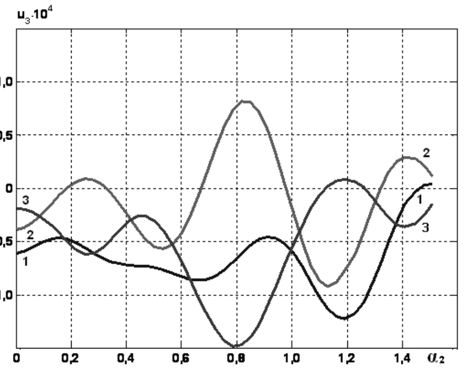

Рис. 1

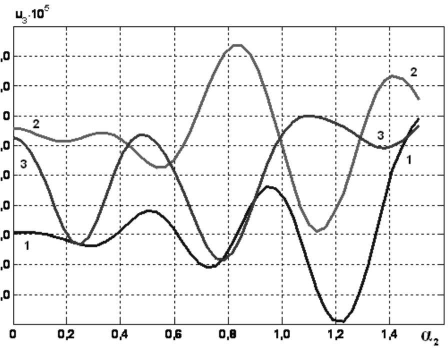

Рис. 2

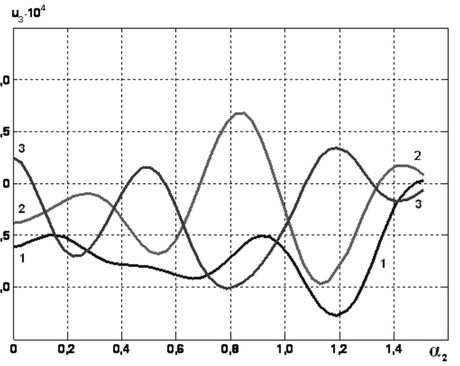

Рис. 3

На рис. 1 – 3 приведены результаты расчетов. Расчеты проводились на временном интервале $t = 20T$. На рисунках приведены наиболее характерные кривые для величин u_3 , которые позволяют проводить анализ деформированного состояния исследуемой структуры. Рис. 1 – 3 соответствует зависимости величины u_3 от пространственной координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \pi/4$ (в силу симметрии приводятся зависимости по координате α_2 в диапазоне $0 \le \alpha_2 \le \pi/2$).

Рис. 1 соответствует случаю продольно подкрепляющего элемента вдоль координаты α_1 в сечении $\alpha_2 = 0$ в моменты времени $t_1 = 5T$, $t_2 = 11T$ и $t_3 = 19T$. Анализ полученных данных показал, что $\max\limits_{0 \le t \le 20T} |u_3| = 1,48 \cdot 10^{-4}$ м (в момент времени $t = 19T$).

Рис. 2 соответствует случаю поперечно подкрепляющего элемента вдоль координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \pi/2$ в моменты времени $t_1 = 5T$, $t_2 = 11T$ и $t_3 = 19T$. Анализ полученных данных показал, что $\max\limits_{0 \le t \le 20T} |u_3| = 1,38 \cdot 10^{-4}$ м (в момент времени $t = 5T$).

Рис. 3 соответствует случаю продольно-поперечно подкрепляющего элемента вдоль координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \pi/2$ в момент времени $t_1 = 5T$, $t_2 = 11T$ и $t_3 = 19T$. Анализ полученных данных показал, что $\max\limits_{0 \le t \le 20T} |u_3| = 1,26 \cdot 10^{-4}$ м (в момент времени $t = 5T$).

Для случая оболочки с продольно-поперечным набором ребер величина максимального прогиба на 10% меньше по сравнению со случаем поперечно подкрепленной оболочки и на 17% меньше по сравнению со случаем продольно подкрепленной оболочки.

Как следует из приведенного графического материала, можно визуально определить месторасположения подкрепляющих ребер.

Заключение.

В работе приведена постановка задач теории колебаний упругих дискретно подкрепленных эллипсоидальных оболочек. Оболочка и подкрепляющие элементы рассматриваются в рамках теории оболочек и криволинейных стержней согласно модели Тимошенко в нелинейном квадратичном приближении. Для задач данного класса развит эффективный численный алгоритм, который основан на применении конечноразностных схем по пространственным координатам и явной аппроксимации по временной координате. Приведены численные примеры расчетов и проведен их анализ.

Р Е З Ю М Е . Представлено постановку задач про вимушені неосесиметричні коливання підкріплених еліпсоїдальних оболонок при нестаціонарних навантаженнях, побудовано чисельний алгоритм і наведено аналіз результатів розв’язування вказаних задач.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно–деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 4. – С. 3 – 22.
2. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища школа, 1982. – 255 с.
4. *Мейш В.Ф.* К численному решении задач динамики подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2005. – **41**. – № 4. – С. 53 – 60.
5. *Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К.* Нестационарные волны в деформируемых средах. – Кишинев: Штиница, 1986. – 236 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
7. *Abramovich H.* Stability and Vibrations of Thin – Walled Composite Structures. – Woodhead Publishing, 2017. – 770 p.
8. *Guadong C.* The Uniformly Valid Asymptotic Solution of Ellipsoidal Shell Heads in Pressure Vessels // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 1985. – **107(1)**. – P. 92 – 95.
9. *Kang J-H.* Vibrations of hemi – ellipsoidal shells of revolution with eccentricity from a three – dimensional theory // J. of Vibration and Control. – 2015. – **2(12)**. – P. 285 – 299.
10. *Kang J-H., Leissa A.W.* Vibration analysis of solid ellipsoids and hollow ellipsoidal shells of revolution with variable thickness from a three – dimensional theory // Acta Mechanica. – 2008. – **197**. – P. 97 – 117.
11. *Karpov V.V.* Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // Int. J. of Solids and Structures. – 2018. – **146**. – P. 117 – 135.
12. *Khalifa M.* Effects of non – uniform Winkler foundation and non – homogeneity of the free vibration of an orthotropic elliptical cylindrical shell // European J. of Mechanics – A/Solids. – 2015. – **49**. – P. 570 – 581.
13. *Krivoshapko S.N.* Research of General and Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels and Tanks // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60(6)**. – P. 336 – 355.
14. *Logan D.L., Hourani M.* Membrane Theory for Layered Ellipsoidal Shells // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 1983. – **105(4)**. – P. 356 – 362.
15. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems under Non – Stationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
16. *Maiborodina N.V., Meish V.F.* Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Ribs under a Nonstationary Distributed Load) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
17. *Meish V.F., Meish Yu.A, Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three – Layer Elliptic Cylindrical Shells Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
18. *Meish V.F., Pavlyuk A.V.* Nonstationary Vibrations of Elliptic Cylindrical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Stringers // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 67 – 75.
19. *Tornabene E., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Dimitri R.* Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin – Walled Structures. – 2015. – **97**. – P. 114 – 129.
20. *Yamada G., Irie T., Notoya S.* Natural frequencies of elliptical cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 1985. – **101**, N 1. – P. 133 – 139.

Поступила 24.04.2017 Утверждена в печать 22.05.2018