

М.О.Вабищевич<sup>1</sup>, И.И.Солодей<sup>2</sup>, Е.А.Чепурная<sup>1</sup>

**О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО  
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

<sup>1</sup>Киевский национальный университет строительства и архитектуры;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт строительной механики,  
03680, Воздухофлотский пр-т, 31, e-mail: isolodey@gmail.com

**Abstract.** The results of researches of reliability and efficiency of the semi-analytical finite element method to calculate the fracture mechanics parameters in the dynamic problems are presented. An analysis of effect of approximation of the crack by the special finite elements on accuracy of calculations of parameters of fracture mechanics is carried out. The direct method of SIF determination is considered in comparison with the energy approach based on  $J$ -integral. A reliability of the reaction method is studied in dynamical problems for different schemes of time integration of motion equations. The test problems of determination of the dynamical SIF are solved for mixed-mode fracture parameters. A demonstration of resources of this approach is carried out on an example of dynamical deformation of the high-pressure vessel with a ring crack.

**Key words:** dynamics, crack, dynamic stress intensity factor,  $J$ -integral, prismatic body, body of revolution, semi-analytical finite element method.

**Введение.**

В работе [1] на основе полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) разработан эффективный подход моделирования трещин, а также алгоритмы определения параметров линейной механики разрушения для пространственных тел вращения и призматических прямолинейных тел под действием динамических нагрузок различной степени интенсивности и продолжительности во времени.

Сингулярное поле напряжений вблизи вершины трещины в точках ее фронта характеризуется динамическим коэффициентом интенсивности напряжений (ДКИН), для определения которого применяются прямые и энергетические методы [2, 3].

Предложена комбинация специального конечного элемента с трещиной, как модели с прямой коррекцией тензора напряжений обычного конечного элемента и алгоритма усреднения полученных решений по эффективной привершинной подобласти, что позволяет сохранить регулярную структуру дискретной модели и значительно уменьшить вычислительные затраты.

Впервые развит подход по вычислению  $J$ -интеграла по величинам узловых реакций и перемещений в задачах динамики. Приведена методика раздельного вычисления составляющих  $J$ -интеграла в задачах смешанного разрушения при динамической нагрузке.

Разработанные методики и алгоритмы реализованы в виде пакета прикладных программ и использованы в НИИ строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры при выполнении контрактных и госбюджетных научно-исследовательских работ.

Ниже представлены результаты исследований достоверности и эффективности предложенной методики. Для сравнения использованы решения, полученные на основе метода граничных элементов [5 – 7], а также экспериментальные данные [4]. Проведена оценка точности вычисления параметров механики разрушения при аппроксимации трещины специальными конечными элементами (КЭ).

**§1. Исследование эффективности специального конечного элемента с трещиной (СКЭТ).**

Рассмотрим растяжение квадратной пластины размером  $b \times L = 0,1 \times 0,1$  м с центральной трещиной длиной  $2l = b$  (рис. 1, а). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,35$ , модуль упругости  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Па, плотность материала  $\rho = 7,8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

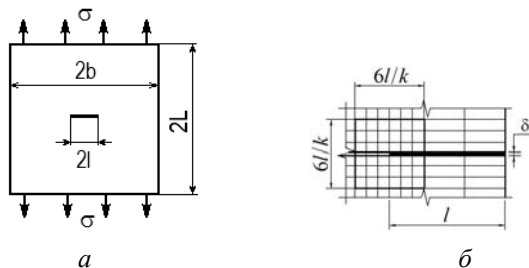


Рис. 1

Согласно используемой методике, трещину аппроксимируем специальными конечными элементами, а в ее вершине построена регулярная область  $6 \times 6$  обычных КЭ размером  $l/k$  каждый (рис. 1, б), где  $k$  – параметр варьирования;  $\delta$  – толщина КЭ с трещиной.

На рис. 2 приведены графики сходимости результатов расчета динамического коэффициента интенсивности напряжений (ДКИН)  $K_{Id}$  при аппроксимации трещины специальными конечными элементами и конечными элементами нулевой жесткости, предложенными в работах [2, 3] (вырез). Эталонное решение получено при использовании модели с закреплением части боковой поверхности пластины. *Оттенком отмечены* специальные конечные элементы с трещиной. Граничные условия отражают наличие двух осей симметрии по  $Z^1$  и  $Z^2$ .

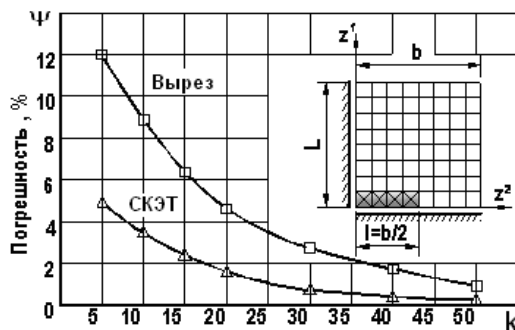


Рис. 2

Погрешность определения  $K_{Id}$  вычисляем в соответствии с формулой:

$$\psi = \frac{K_{Id}^{\tau} - K_{Id}^{er}}{K_{Id}^{er}} \cdot 100\%,$$

где  $K_{Id}^{er}$  – динамический КИН эталонной модели, вычисленный для момента времени  $\tau$ ;  $K_{Id}^{\tau}$  – ДКИН расчетных моделей для того же момента времени.

Согласно результатам исследований получено, что точность вычисления  $K_{Id}$  с применением СКЭТ примерно в два с половиной раза выше, чем при использовании конечных элементов (КЭ), жесткость которых равна нулю, на всем диапазоне изменения размеров сеточной области. При этом, следует отметить, что при сетке с показателем  $k = 10$  погрешность  $K_{Id}$ , полученная по предложенной методике [1], лишь на

3% больше, чем при введении трещины в расчетную схему. В то же время, КЭ нулевой жесткости при аналогичной сеточной области дают погрешность порядка 9%.

Можно предположить, что уменьшение толщины слоя КЭ  $\delta$ , аппроксимирующих трещину, должно способствовать повышению точности определения параметров разрушения. Чтобы исключить влияние плотности сетки КЭ на погрешность вычисления ДКИН, была зафиксирована сетка  $6 \times 6$  конечных элементов с показателем  $k = 20$ . Изменению подлежала только толщина СКЭТ или выреза соответствующей модели. Графики зависимости погрешности ДКИН от толщины слоя КЭ с трещиной и нулевой жесткостью (вырез) приведены на рис. 3.

Как видно из полученных результатов, при использовании СКЭТ значения  $K_{Ia}$  практически не изменяются при уменьшении толщины слоя КЭ (в противовес модели с вырезом, для которой результаты уточняются в пределах 2%).

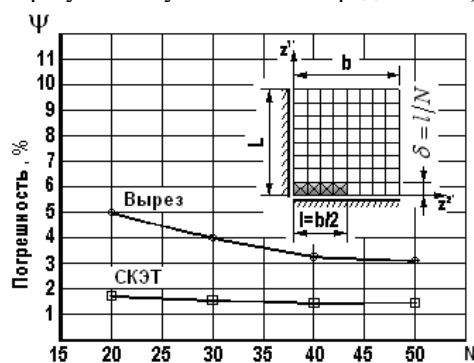


Рис. 3

Такой эффект можно объяснить отсутствием напряжений вдоль длины трещины при использовании элементов с нулевой жесткостью по сравнению с специальными КЭ, которые корректируют только соответствующие компоненты тензора напряжений: (нормальные и касательные) к берегам трещины. Кроме того, при построении матрицы масс, в случае модели с вырезом, уменьшается некоторая масса, связанная с элементами нулевой жесткости и плотности.

Проведен анализ скорости сходимости параметров механики разрушения, вычисленных на основе  $J$ -интеграла (метод реакций), для разных длин трещин при варьировании размеров привершинной сеточной области. Рассмотрена пластина с центральной трещиной под действием мгновенно приложенного растягивающего давления (рис. 1).

Как видно из результатов вычислений (рис. 4), погрешность ДКИН при использовании  $J$ -интеграла входит в пределы 2% при соотношении размера КЭ в вершине трещины  $k = 6$  в отличие от прямого метода, когда 2% достигаются только при значении  $k = 15$ .

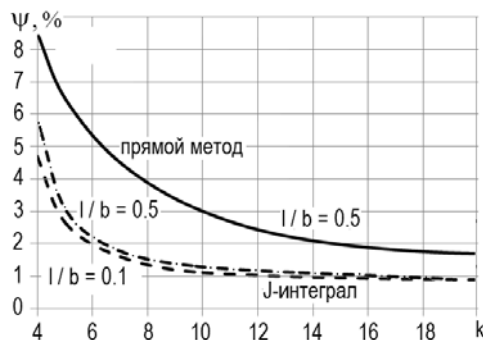


Рис. 4

**§2. Достоверность определения параметров механики разрушения с применением метода реакций при динамическом нагружении.**

Достоверность определения параметров механики разрушения с применением метода реакций при различных скоростях приложения нагрузки показано на примере пластины с центральной трещиной, находящейся под действием переменного во времени равномерно распределенного растягивающего давления (рис. 5, а, б). Модуль Юнга  $E = 2 \times 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность материала  $\rho = 5 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

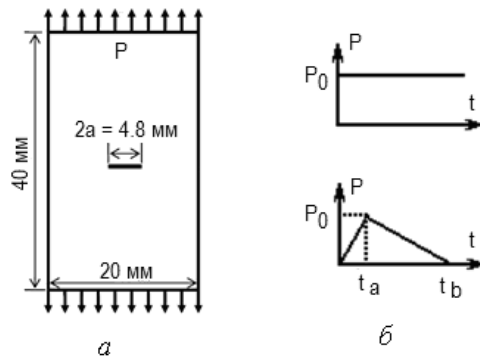


Рис. 5

Детально рассмотрены два случая внешней нагрузки: мгновенно приложенный импульс давления, который сохраняется на всем временном интервале исследования (рис. 6), и в виде функции, имеющей профиль треугольника (рис. 7). Графики, полученные в [7], показано сплошной линией, с помощью представленной методики – кружками. ДКИН представлены в виде нормированных значений по отношению к параметру  $P_0(\pi a)^{1/2}$ .

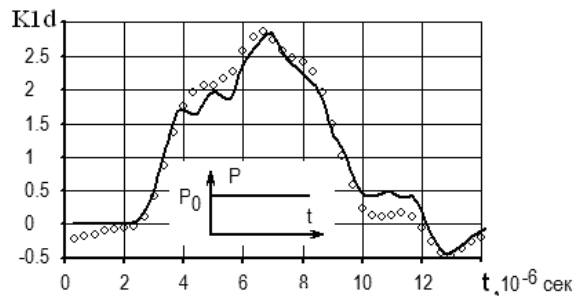


Рис. 6

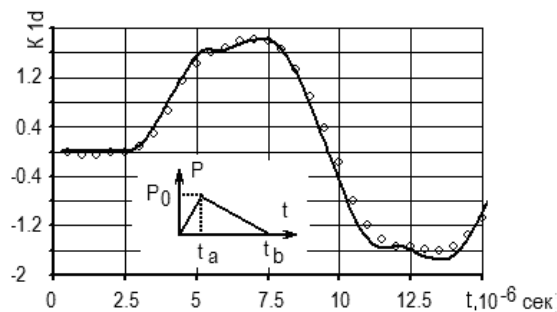


Рис. 7

Следует отметить, что решения в [7] не учитывают взаимодействие берегов трещины. Именно поэтому можно наблюдать отрицательные значения КИН. Для корректного сравнения результатов авторы полностью повторяли приведенные постановки задач.

Отличие полученных результатов по сравнению с эталонными для двух случаев нагрузок не превышает 1,5 – 2% в областях максимальных значений ДКИН. Заметим, что при решении тестового примера интегрирование уравнения движения выполнено с помощью метода Ньюмарка [1].

Исследование достоверности и эффективности представленной методики при использовании разложения решения уравнений движения по собственным формам проведено на примере решения задачи о растяжении пластины с боковым надрезом (рис. 8, а, б).

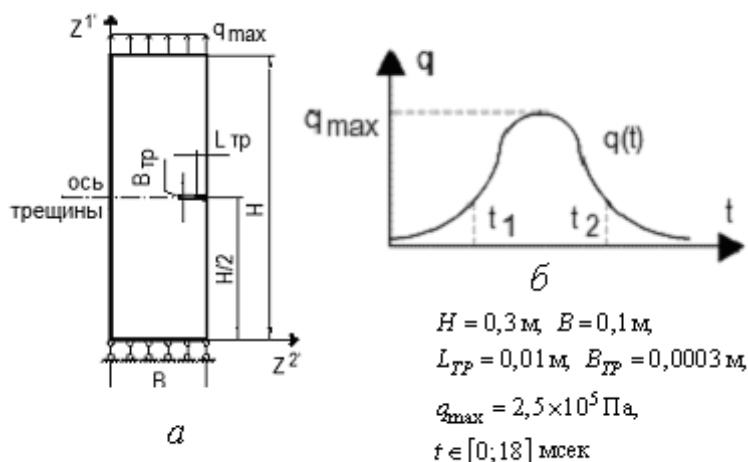


Рис. 8

Вычисленные на основе ПМКЭ значения КИН при статической нагрузке совпадают с результатами работы [4] в пределах 3 – 5%. Аналогичные данные по сходимости получены и при динамической нагрузке для максимальных значений КИН (рис. 9).

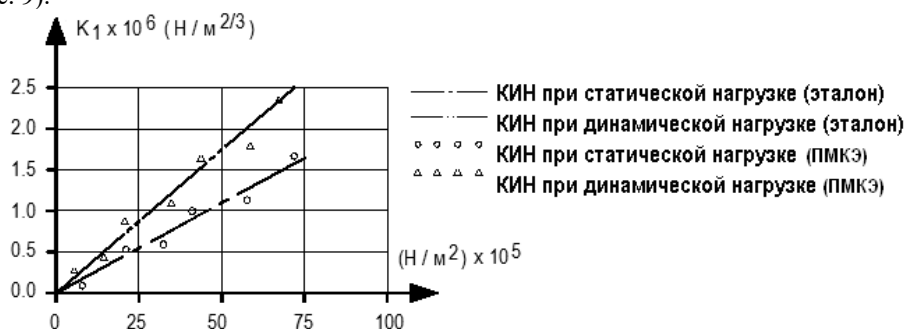


Рис. 9

Проведен расчет пластины с наклонной трещиной, находящейся под действием равномернораспределенного растягивающего давления  $\sigma = 1,0 \text{ МПа}$  (рис. 10, а, б). Механические и геометрические параметры приняты в следующем виде:  $E = 200 \text{ ГПа}, \nu = 0,3, a = 7,07 \text{ мм}, W = 30 \text{ мм}, L = 60 \text{ мм}, \alpha = 45^\circ$ .

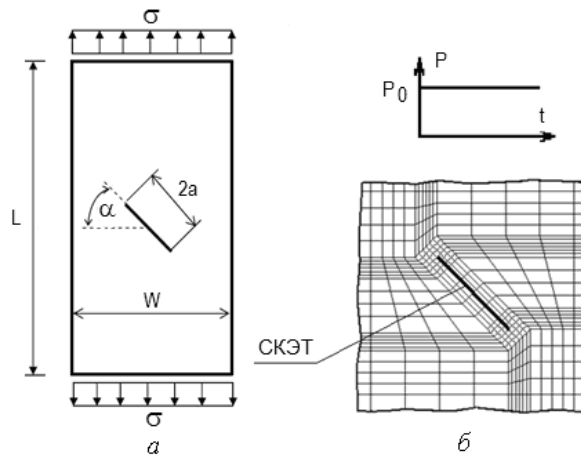


Рис. 10

На первом этапе проведен статический анализ деформирования объекта. В таблице представлен полученный результат и погрешности по сравнению с аналитическим решением для пластины с наклонной трещиной.

Метод	K	
	KI	KII
Аналитический	0,0745	0,0745
ПМКЭ	0,0732	0,0750
Погрешность	1,8%	0,7%

Второй этап – определение динамического КИН. Плотность материала принималась  $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$ , нагрузка мгновенно прикладывалась в момент времени  $t = 0$  сек.

На рис. 11, 12 показано, соответственно, эволюцию нормированных динамических  $K_{Iд}$  и  $K_{IIд}$  (сплошная линия) в сравнении с известными решениями: [5] – кружки, [6] – треугольники. Нормированные значения вычислены по отношению к параметру  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ .

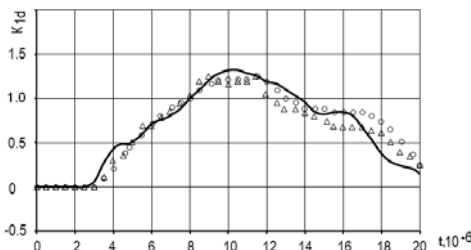


Рис. 11

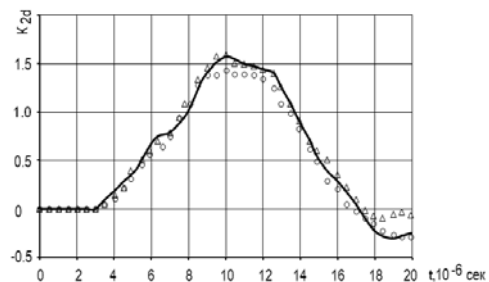


Рис. 12

Во всех случаях заметна хорошая сходимость представленных результатов не только по амплитуде  $K_{Iд}$  и  $K_{IIд}$ , но и по периоду колебаний.

### §3. Динамическое деформирование емкости высокого давления с трещиной.

Демонстрация возможностей подхода проведена на примере исследования динамического деформирования емкости высокого давления, которая представляет собой тело вращения с кольцевой трещиной (рис. 13).

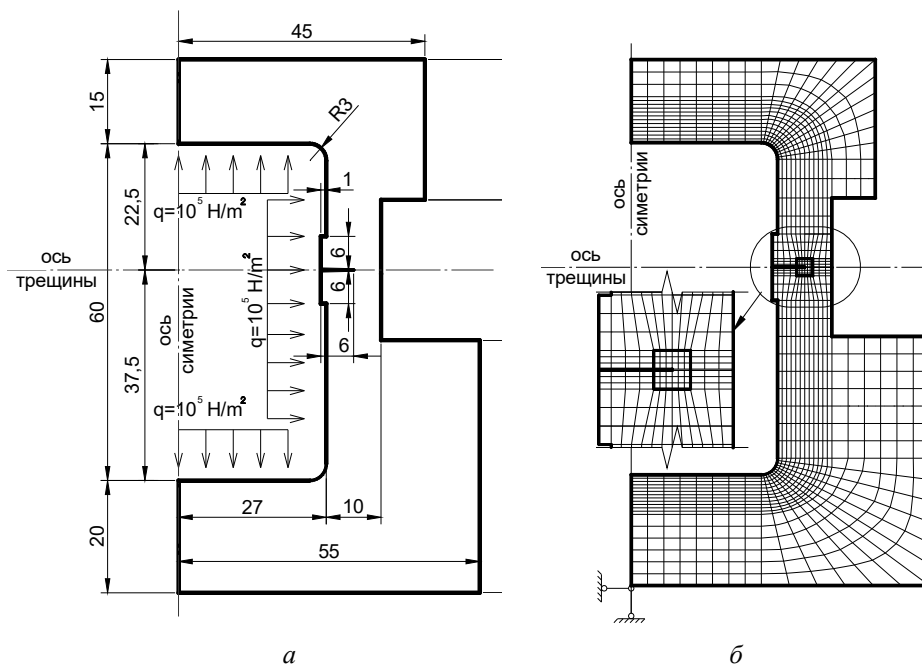


Рис. 13

Одним из ключевых вопросов при рассмотрении действия силовых импульсов является влияние скорости приложения нагрузки на напряженно-деформированное состояние, а следовательно, и на параметры механики разрушения (рис. 14). Принято, что максимальный уровень давления  $q_0 = 10^5$  Па, а время его достижения  $t_0$  является варьируемой величиной.

До значения  $t_0 \sim 10^{-3}$  сек ( $\lg q_0/t_0 = 8$ ) вычисленный КИН практически совпадает со статическим; начиная с показателя  $t_0 \sim 10^{-3}$  сек динамический КИН резко возрастает и стабилизируется при  $t_0 \sim 10^{-4.5}$  сек ( $\lg q_0/t_0 = 9,5$ ).

Дальнейшее увеличение скорости импульса, включая случай мгновенного удара ( $t_0 = 0$  сек), не приводит к существенному изменению результата. При этом величина динамического КИН в 2 раза выше статического КИН.

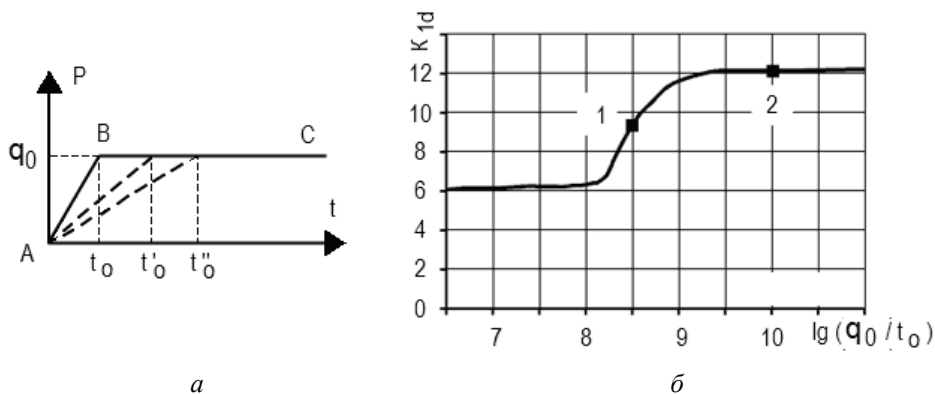


Рис. 14

Колебания динамического КИН во времени представлены для двух скоростей приложения нагрузки (рис. 15). Первый соответствует скорости с характерным временем  $t_0 = 3,5 \times 10^{-4}$  сек ( $\lg q_0/t_0 = 8,5$ ), второй – мгновенному удару ( $\lg q_0/t_0 = 10$ ). Для сравнения штриховой линией показано значение статического КИН.

Видно, что при достижении импульсом скоростей, сопоставимых со скоростью распространения упругих волн в материале конструкции, начинает проявляться влияние спектра высоких частот изучаемого объекта.

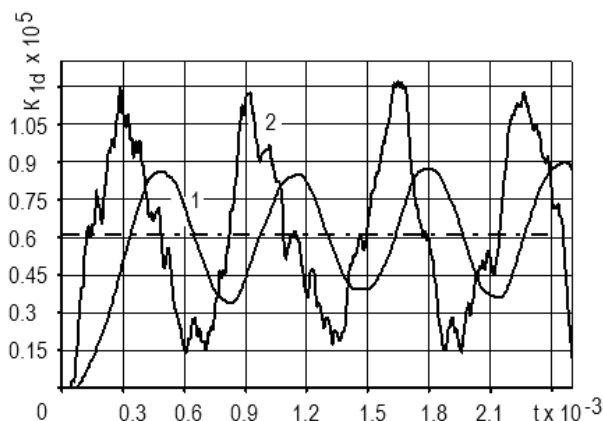


Рис. 15

Графики максимальных динамических КИН в зависимости от длины трещины также представлены для различных скоростей нагрузки (рис. 16).

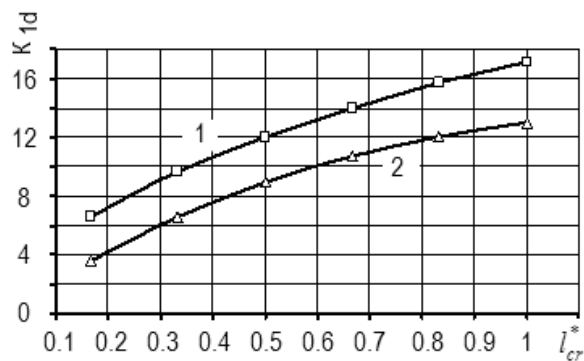


Рис. 16

Обозначения 1, 2 соответствуют рис. 15. Относительная длина трещины вычисляется по формуле  $l_{cr}^* = 4l_{cr}/(D-d)$ , где  $D$ ,  $d$  – внешний и внутренний диаметры цилиндра в области с трещиной, соответственно.

#### Заключение.

Результаты проведенных численных экспериментов с использованием методики, представленной в работе [1], свидетельствуют о достоверности и высокой эффективности предложенного подхода для вычисления параметров линейной механики разрушения в задачах динамики. Сходимость решений не уступает известным в литературе алгоритмам [4 – 7], а при использовании метода реакций на основе  $J$ -интеграла – значительно превышает их показатели.



РЕЗЮМЕ. Представлено результати дослідження достовірності та ефективності використання напіваналітичного методу скінчених елементів при обчисленні параметрів лінійної механіки руйнування в задачах динаміки. Проведено аналіз впливу апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами на точність обчислення параметрів механіки руйнування. Розглянуто прямий метод обчислення КІН у порівнянні з енергетичним підходом на основі  $J$ -інтеграла. Досліджено достовірність використання методу реакцій в задачах динаміки для різних схем інтегрування рівнянь руху за часом. Розв'язано тестові задачі обчислення динамічного КІН для задач змішаного руйнування. Демонстрацію можливостей підходу проведено на прикладі дослідження динамічного деформування еластичності високого тиску з кільцевою тріщиною.

1. *Баженов В.А., Вабищевич М.О., Солодей І.І., Чепурная Е.А.* Развитие полуаналитического метода конечных элементов в задачах линейной механики разрушения при анализе динамических процессов нагружения // Прикл. механика. – 2018. – **54**, № 5. – С. 35 – 46.
2. *Карзов Г.П., Кархин В.А., Леонов В.П., Марголин Б.З.* Расчетное определение траектории трещины и интенсивности высвобождения упругой энергии при циклическом нагружении с учетом сварочных напряжений // Проблемы прочности. – 1983 – N 9. – С. 104 – 109.
3. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.І.* Використання спеціальних скінчених елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестационарних динамічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА. – 2009. – Вип. 84. – С. 49 – 64.
4. *Catsamanis F., Raftopoulos D., Theocaris P.S.* Static and Dynamic Stress Intensity Factors by the Method of Transmitted Caustics // J. of Engineering Materials and Technology. – 1977. – **1.4** – P. 105 – 109.
5. *Dominguez J., Gallego R.* Time boundary element method for dynamic stress intensity factor computations // Int. J. Num. Meth. Engn. – 1992. – **33**, N 3. – P. 635 – 647.
6. *Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P.* Boundary element formulation for the dynamic analysis of cracked structures // In: Aliabadi, M. H. (Ed.). Dynamic Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications. – 1995. – P. 97 – 110.
7. *Yang Z.J., Deeks A.J., Hao H.* Transient Dynamic Fracture Analysis Using Scaled Boundary Finite Element Method: a Frequency-Domain Approach // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – **74**. – P. 669 – 687.

Поступила 26.10.2016

Утверждена в печать 22.05.2018