

А. А. Каминский¹, Л. А. Кипнис², Т. В. Полищук²

ОБ УСЛОВИИ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ КОТТРЕЛЛА

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua;

²Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины,

ул. Садовая, 2, 20300, Умань, Украина; e-mail: polischuk_t@ukr.net

Abstract. A length of the small-scale narrow zone of weakened bonds (pre-fracture zone) at the point of intersection of lines of microplastic deformation (slip lines) in the elastic body is determined. The pre-fracture zone is modelled by the line of rupture of normal displacement. A development of this zone precedes the crack nucleation by Cottrell's mechanism. A condition of crack nucleation is determined. The exact solution of corresponding problem of linear theory of elasticity is constructed by the Wiener – Hopf method.

Key words: prefracture zone, crack nucleation, Cottrell's mechanism, Wiener – Hopf method.

Введение.

В литературе по механике разрушения опубликовано большое число работ, посвященных плоским задачам об определении зон предразрушения вблизи концов трещин и других угловых точек – остроконечных концентраторов напряжений в однородных телах в рамках моделей с линиями разрыва смещения. Основанием для такого моделирования служат классические результаты экспериментальных и теоретических исследований [2, 5, 7, 12], свидетельствующие о том, что начальные зоны предразрушения представляют собой тонкие слои материала – узкие полосы, исходящие из остроконечных концентраторов напряжений. В упругопластических задачах механики разрушения в условиях плоской деформации широкое распространение получила модель пластической зоны предразрушения с двумя боковыми линиями разрыва касательного смещения (линиями скольжения) [9, 13, 18 – 21]. Эта модель использована также при определении начальной пластической зоны вблизи конца тонкого жесткого включения [1] и вблизи угловой точки границы тела [4]. В случае упругого тела используется модель Леонова – Панасюка [7], согласно которой вблизи конца трещины нормального разрыва на ее продолжении возникает и развивается узкая зона ослабленных связей, моделируемая линией разрыва нормального смещения. Нормальное напряжение на указанной линии равно заданной постоянной материала (сопротивлению отрыва).

Остроконечным концентратором напряжений со степенной особенностью является точка пересечения линий разрыва касательного смещения (линий скольжения) (рис. 1). Задачи об определении зон предразрушения вблизи этой точки в рамках упомянутых выше моделей не рассматривались. Решения таких задач могут быть использованы при изучении одного из дислокационных механизмов зарождения трещин – механизма Коттрелла [8].

Существуют экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что хрупкому разрушению тела предшествует микропластическая деформация – движение и остановка дислокаций, приводящая к образованию трещин.

Согласно механизму Коттрелла, в результате объединения двух дислокаций, движущихся в пересекающихся плоскостях скольжения, образуется скользящая дислокация, которая служит препятствием на пути движения других дислокаций и очагом зарождения трещины. Дислокации, движущиеся в обеих плоскостях скольжения, останавливаются перед этим препятствием, создавая скопление дислокаций, вызывающее высокую концентрацию напряжений вблизи препятствия. Вследствие такой концентрации напряжений происходит разрыв сплошности и образование трещины.

Зарождению трещины в упругом теле по механизму Коттрелла предшествует развитие вблизи точки пересечения линий микропластического деформирования зоны предразрушения, представляющей собой узкую зону ослабленных связей, исходящую из этой точки. Появление трещины следует ожидать вдоль зоны ослабленных связей при некотором значении внешней нагрузки.

Ниже на основе результатов анализа указанной зоны в рамках модели Леонова – Панасюка установлено условие зарождения трещины Коттрелла.

§1. Постановка задачи.

В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим однородное изотропное упругое тело, содержащее пересекающиеся линии микропластического деформирования (рис. 1, где $\pi/2 < \alpha < \pi$). Линию микропластического деформирования будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно заданной постоянной материала τ_s , характеризующей микропластическую деформацию упругого тела (τ_s – предел текучести на сдвиг).

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [10] точка O представляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. Суммы главных членов разложений напряжений в асимптотические ряды при $r \rightarrow 0$ являются решением соответствующей задачи теории упругости (задача К, рис. 2) для плоскости с полубесконечными линиями разрыва, порождаемым единственным в полосе $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ корнем $\lambda_0 \in]-1; 0[$ ее характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda+1)\alpha] [\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)\sin 2\alpha] + \\ & + [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda+1)(\pi-\alpha)] [\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha] = 0. \end{aligned}$$

В частности, имеем

$$\sigma_\theta(r, \theta) = C \Sigma(\theta) r^{\lambda_0} + C_0 + \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} \cos 2\theta + f(r, \theta) \quad (r \rightarrow 0);$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2) [\sin \lambda_0(\pi - \alpha) \cos \lambda_0 \theta - \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)\theta] & (0 \leq \theta \leq \alpha), \\ (\lambda_0 + 2) [\sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) - \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0(\pi - \theta)] & (\alpha \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

$$(f(r, \theta) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0).$$

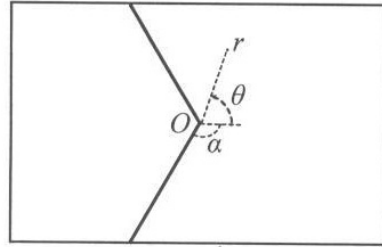


Рис. 1

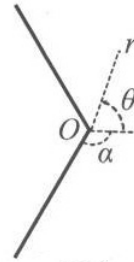


Рис. 2

Постоянные C и C_0 должны определяться из решения каждой конкретной задачи теории упругости, показанной на рис. 1.

Некоторые значения λ_0 приведены в таблице, где значения α даны в градусах.

α , град	$-\lambda_0$	Λ	Δ
100	0,190	4,799	1,599
110	0,335	11,648	3,882
120	0,449	10,616	3,925
130	0,541	8,759	3,105
140	0,619	7,022	2,341
150	0,689	5,502	1,834
160	0,756	4,163	1,387
170	0,831	2,872	0,957

Вследствие высокой концентрации напряжений в точке O пересечения линий микропластического деформирования возможно образование в этой точке трещины по механизму Коттрелла.

Образованию трещины предшествует возникновение и развитие из точки O маломаштабной узкой зоны ослабленных связей (зоны предразрушения). С ростом внешней нагрузки ее длина увеличивается. При некотором значении нагрузки вдоль данной узкой зоны происходит разрыв сплошности и зарождение трещины Коттрелла, длина которой в значительной степени меньше длины линий микропластического деформирования и размеров тела.

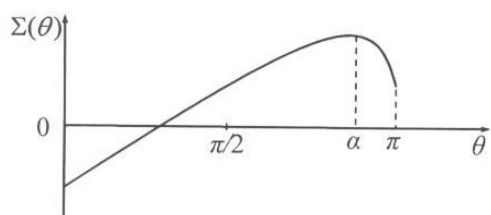


Рис. 3

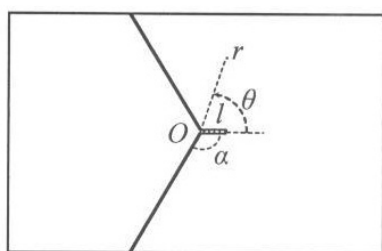


Рис. 4

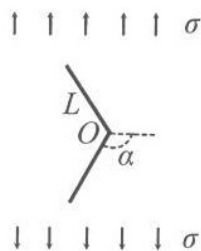


Рис. 5

Преимущественные деформации в зоне ослабленных связей развиваются по механизму отрыва. Поэтому будем ее моделировать линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала σ_0 – сопротивлению отрыва (аналог модели Леонова – Панасюка [7]).

Зависимость $\Sigma(\theta)$ качественно показана на рис. 3.

Если $C < 0$, то принимая во внимание вид этой зависимости и используя критерий максимальных растягивающих напряжений σ_θ [8], заключаем, что зона ослабленных связей и образующаяся после ее развития трещина Коттрелла будут расположены при $\theta = 0$ (рис. 4).

Если $C > 0$, то применяемый критерий указывает на расположение трещины вдоль линии микропластического деформирования, что противоречит физическому смыслу. Ниже предполагается, что $C < 0$.

В случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (рис. 5) соответствующая задача теории упругости рассмотрена в [3]. Из решения этой задачи определяем

$$C = Q(\alpha) \left(\tau_s - \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right) L^{-\lambda_0} < 0; \quad C_0 = \frac{\sigma}{2};$$

$$Q(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \sin \lambda_0 \pi}{\lambda_0 F(\alpha)} \frac{\Gamma(\lambda_0 + 2)}{\Gamma(\lambda_0 + 3/2)} \exp \left\{ \frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{(t^2 - \lambda_0 - 1) \ln \varphi(t, \alpha)}{(t^2 + 1) [t^2 + (\lambda_0 + 1)^2]} dt \right\};$$

$$F(\alpha) = 2\pi \cos 2\lambda_0 \pi - [\cos 2(\lambda_0 + 1)\alpha - \cos 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha)] \sin 2\alpha +$$

$$+ 2\alpha [(\lambda_0 + 1) \sin 2(\lambda_0 + 1)\alpha \sin 2\alpha - \cos 2(\lambda_0 + 1)\alpha \cos 2\alpha] -$$

$$- 2(\pi - \alpha) [(\lambda_0 + 1) \sin 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha) \sin 2\alpha + \cos 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha) \cos 2\alpha];$$

$$\varphi(t, \alpha) = \frac{\varphi_0(t, \alpha)}{\operatorname{sh} 2t\pi}, \quad \varphi_0(t, \alpha) = (\operatorname{ch} 2t\alpha - \cos 2\alpha) [\operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha] +$$

$$+ [\operatorname{ch} 2t(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\operatorname{sh} 2t\alpha + t \sin 2\alpha) \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функция}).$$

Ставится задача определения длины l зоны ослабленных связей (рис. 4) и установления условия, при выполнении которого происходит зарождение трещины Коттрелла.

С учетом малости зоны ослабленных связей приходим к плоской статической симметричной задаче линейной теории упругости для однородной изотропной плоскости, из точки которой исходят две полубесконечные прямые линии разрыва касательного смещения и линия разрыва нормального смещения конечной длины (рис. 6). При $r \rightarrow \infty$ суммы главных членов разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой решение аналогичной задачи без линии разрыва нормального смещения (решение задачи К, о котором указано выше). Произвольные постоянные C и C_0 , входящие в указанное решение, предполагаются заданными. Они характеризуют интенсивность внешнего поля и должны определяться из решения каждой конкретной внешней задачи, показанной на рис. 1.

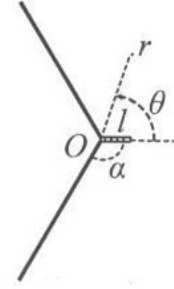


Рис. 6

Граничные условия рассматриваемой задачи теории упругости (рис. 6) имеют следующий вид:

$$\theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_s; \quad (1.1)$$

$$\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = \pi, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma_0; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad u_\theta = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta = C_0 + \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} + Cgr^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (1.3)$$

$$g = -2(\lambda_0 + 2) \sin \alpha \cos(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha) \quad (\text{здесь } 0 \leq \theta \leq \pi; \langle a \rangle - \text{скачок } a).$$

Решение сформулированной задачи теории упругости (рис. 6) представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая (задача 1) отличается от нее тем, что вместо третьего из условий (1.1) и первого из условий (1.2) имеем

$$\theta = \alpha, \tau_{r\theta} = 0; \theta = 0, r < l, \sigma_\theta = \sigma_0 - C_0 - \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} - Cgr^{\lambda_0}, \quad (1.4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (1.3) отсутствуют первые три слагаемых). *Вторая задача* – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение задачи 1.

В современной механике деформируемого твердого тела и ее составной части – механике разрушения развиты эффективные методы решения соответствующих краевых задач [8, 11, 14 – 17]. В частности, для построения точных решений плоских статических задач теории упругости о трещинах в телах клиновидной конфигурации во многих случаях используется метод Винера – Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [6]. Ниже этот метод применяется для решения задачи 1.

§2. Вывод и решение уравнения Винера – Хопфа.

Применяя преобразование Меллина

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r)r^p dr$$

с комплексным параметром p ($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$, ε_1 – достаточно малое положительное число) к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций и закону Гука, получаем следующие выражения для меллиновских трансформант:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^* &= A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta; \\ \tau_{r\theta}^* &= \frac{1}{p-1} [A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta - \\ &\quad - A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta]; \\ \sigma_r^* &= -\frac{1}{p-1} [A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \\ &\quad + A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^* &= \frac{1+\nu}{E(p-1)} [A_1(p-\chi)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta - \\ &\quad - A_3(p-\chi)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* &= -\frac{1+\nu}{E(p-1)} [A_1(p+\chi)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \\ &\quad + A_3(p+\chi)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]; \quad \chi = 3 - 4\nu. \end{aligned}$$

Здесь $A_j(p)$ ($j=1,2,3,4$) – неизвестные функции; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; $\alpha \leq \theta \leq \pi$. При $0 \leq \theta \leq \alpha$ имеют место формулы (2.1) с заменой A_j на B_j .

С помощью (1.1), первого из условий (1.4) и (2.1) приходим к системе уравнений

$$(A_1 - B_1)(p - \chi)\cos(p+1)\alpha + (A_2 - B_2)(p-1)\cos(p-1)\alpha -$$

$$\begin{aligned}
& -(A_3 - B_3)(p - \chi)\sin(p + 1)\alpha - (A_4 - B_4)(p - 1)\sin(p - 1)\alpha = 0; \\
& (A_1 - B_1)(p + 1)\cos(p + 1)\alpha + (A_2 - B_2)(p - 1)\cos(p - 1)\alpha - \\
& -(A_3 - B_3)(p + 1)\sin(p + 1)\alpha - (A_4 - B_4)(p - 1)\sin(p - 1)\alpha = 0; \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_1 - B_1)\sin(p + 1)\alpha + (A_2 - B_2)\sin(p - 1)\alpha + \\
& + (A_3 - B_3)\cos(p + 1)\alpha + (A_4 - B_4)\cos(p - 1)\alpha = 0; \\
& A_1(p + 1)\cos(p + 1)\alpha + A_2(p - 1)\cos(p - 1)\alpha - A_3(p + 1)\sin(p + 1)\alpha - \\
& - A_4(p - 1)\sin(p - 1)\alpha = 0;
\end{aligned}$$

$$A_1(p - \chi)\cos p\pi + A_2(p - 1)\cos p\pi - A_3(p - \chi)\sin p\pi - A_4(p - 1)\sin p\pi = 0;$$

$$A_1(p + 1)\cos p\pi + A_2(p - 1)\cos p\pi - A_3(p + 1)\sin p\pi - A_4(p - 1)\sin p\pi = 0;$$

$$B_1(p + 1) + B_2(p - 1) = 0.$$

Решение системы (2.2) имеет такой вид:

$$A_2 = \frac{(p + 1)\sin(\alpha + p\alpha - p\pi)}{(p - 1)\sin(\alpha - p\alpha + p\pi)} A_1; \quad A_3 = \frac{\cos p\pi}{\sin p\pi} A_1;$$

$$A_4 = \frac{(p + 1)\sin(\alpha + p\alpha - p\pi)\cos p\pi}{(p - 1)\sin(\alpha - p\alpha + p\pi)\sin p\pi} A_1;$$

$$B_1 = -\frac{b_1(p)}{b_2(p)} A_1; \quad B_2 = -\frac{p + 1}{p - 1} B_1; \quad B_3 = \frac{b_3(p)}{b_4(p)} A_1; \quad B_4 = -\frac{(p + 1)b_5(p)}{b_6(p)} A_1;$$

$$\begin{aligned}
b_1(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] + \\
& + [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha);
\end{aligned}$$

$$b_2(p) = 4(p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) \sin(\alpha - p\alpha + p\pi) \sin p\pi; \quad (2.3)$$

$$b_3(p) = 2[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) -$$

$$- \{ (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \} \cos(p + 1)\alpha;$$

$$b_4(p) = 4(p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) \sin(\alpha - p\alpha + p\pi) \sin p\pi \sin(p + 1)\alpha;$$

$$b_5(p) = 2[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) -$$

$$-\{(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] +$$

$$+[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)\} \cos(p-1)\alpha;$$

$$b_6(p) = 4(p-1)(p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) \sin(\alpha - p\alpha + p\pi) \sin p\pi \sin(p-1)\alpha.$$

Подставляя (2.3) в (2.1), где A_j заменено на B_j , определяем

$$\sigma_\theta^*(p, 0) = -\frac{N_1(p)}{D_1(p)} A_1; \left. \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right|_{\theta=0} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{N_2(p)}{D_2(p)} A_1;$$

$$N_1(p) = 2[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) +$$

$$+ (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha]; \quad (2.4)$$

$$D_1(p) = 2(p-1)(p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) \sin(\alpha - p\alpha + p\pi) \sin p\pi;$$

$$N_2(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha);$$

$$D_2(p) = (p-1)(p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha) \sin(\alpha - p\alpha + p\pi) \sin p\pi.$$

Исключая A_1 в (2.4) и принимая во внимание второе из условий (1.2) и второе из условий (1.4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера – Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{s_1}{p+1} + \frac{s_2}{p+\lambda_0+1} = -\operatorname{tg} p\pi G(p) \Phi^-(p); \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)};$$

$$G_1(p) = \{(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] +$$

$$+ 2[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha)\} \cos p\pi; \quad (2.5)$$

$$G_2(p) = \{(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] +$$

$$+ [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)\} \sin p\pi;$$

$$s_1 = \sigma_0 - C_0 - \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha}; \quad s_2 = -Cgr^{\lambda_0};$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho; \quad \Phi^-(p) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \left. \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Функция $\Phi^+(p)$ – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, а функция $\Phi^-(p)$ – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой действительную положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, имеет место факторизация

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0); \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p) & (\operatorname{Re} p < 0); \\ G^-(p) & (\operatorname{Re} p > 0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Функция $G^+(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция $G^-(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Функцию $p \operatorname{ctg} p\pi$ можно факторизовать так:

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p); \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}. \quad (2.7)$$

Функция $K^+(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функция $K^-(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1/2$. Справедливы асимптотики:

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p}; \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.8)$$

С помощью факторизаций (2.6), (2.7) уравнение (2.5) представим в виде

$$\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{s_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} + \frac{s_2 K^+(p)}{p(p+\lambda_0+1)G^+(p)} = -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} \quad (2.9)$$

($\operatorname{Re} p = 0$).

Имеют место представления:

$$\begin{aligned} \frac{s_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} &= \frac{s_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \frac{s_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)}; \\ \frac{s_2 K^+(p)}{p(p+\lambda_0+1)G^+(p)} &= \frac{s_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] - \\ &- \frac{s_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0, \quad p \neq 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{s_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \\ + \frac{s_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] = \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} + \frac{s_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{s_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0).$$

Функция в левой части (2.11) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой части (2.11) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Исходя из известных асимптотик

$$\theta = 0, r \rightarrow l+0, \sigma_\theta \sim \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \quad \theta = 0, r \rightarrow l-0, \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sim -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

(k_I – коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва нормального смещения), по теореме абелева типа определяем

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k_I}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{k_I}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.12)$$

Из (2.6), (2.8), (2.12) следует, что функции в левой и правой частях (2.11) стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$, соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p .

Таким образом, решение уравнения Винера – Хопфа (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) = & -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{s_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{s_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\Phi^-(p) = K^-(p)G^-(p) \left[\frac{s_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{s_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

§3. Определение длины зоны ослабленных связей и установление условия зарождения трещины Коттрелла.

С помощью (2.13) находим асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{s_1 K^+(-1)}{G^+(-1)} + \frac{s_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.1)$$

Согласно (2.12), (3.1) получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце линии разрыва нормального смещения:

$$k_I = q_1(\alpha) Cl^{\lambda_0+1/2} + q_2(\alpha) \left(C_0 - \sigma_0 + \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} \right) \sqrt{l}; \quad (3.2)$$

$$q_1(\alpha) = \frac{\sqrt{2}g\Gamma(\lambda_0+1)}{\Gamma(\lambda_0+3/2)G^+(-\lambda_0-1)}; \quad q_2(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G^+(-1)}.$$

Длина зоны ослабленных связей определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва нормального смещения, т. е. из условия равенства нулю коэффициента k_l .

Приравнивая к нулю правую часть (3.2), получаем следующую формулу, необходимую для определения длины зоны ослабленных связей:

$$l = \Lambda \left(\frac{|C|}{\sigma_0 - C_0 - \tau_s / \sin 2\alpha} \right)^{-1/\lambda_0}; \quad \Lambda = \left[\frac{\sqrt{\pi} |g| \Gamma(\lambda_0 + 1) G^+(-1)}{2\Gamma(\lambda_0 + 3/2) G^+(-\lambda_0 - 1)} \right]^{-1/\lambda_0}. \quad (3.3)$$

Здесь C – отрицательная возрастающая по модулю функция внешней нагрузки; $C_0 < \sigma_0$ – положительная возрастающая функция внешней нагрузки.

Некоторые значения Λ приведены в таблице.

Формула (3.3) устанавливает закон развития маломасштабной зоны ослабленных связей (зоны предразрушения) из рассматриваемой угловой точки.

Определим раскрытие δ зоны ослабленных связей в узловой точке O , равное $2u_\theta(0,0)$. На основании (2.5) имеем

$$\delta = -2 \int_0^l \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Big|_{\theta=0} dr = -\frac{4(1-\nu^2)}{E} l \Phi^-(0). \quad (3.4)$$

Из (2.13) с учетом (3.3) получим

$$\Phi^-(0) = \frac{2\lambda_0 G^-(0)}{\pi(\lambda_0 + 1) G^+(-1)} \left(\sigma_0 - C_0 - \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} \right). \quad (3.5)$$

Учитывая четность $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$), по формуле Сохоцкого имеем

$$G^-(0) = 2\pi \left[(2\alpha + \sin 2\alpha)(2\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) + 4(\alpha^2 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \right]^{-1/2} \sin \alpha.$$

Подставляя (3.3), (3.5) в (3.4), получаем

$$\delta = \Delta \frac{(1-\nu^2) |C|^{-1/\lambda_0}}{E (\sigma_0 - C_0 - \tau_s / \sin 2\alpha)^{-1-1/\lambda_0}}; \quad \Delta = -\frac{8\lambda_0 G^-(0) \Lambda}{\pi(\lambda_0 + 1) G^+(-1)}. \quad (3.6)$$

Некоторые значения Δ приведены в таблице.

Разрыв сплошности вдоль зоны ослабленных связей и зарождение маломасштабной трещины Коттрелла произойдет тогда, когда раскрытие δ зоны ослабленных связей в узловой точке O достигнет своего критического значения δ_c , представляющего собой заданную постоянную материала.

Приравнивая к δ_c правую часть (3.6), приходим к следующему уравнению для определения разрушающей нагрузки:

$$\Delta \frac{(1-\nu^2) |C(\sigma)|^{-1/\lambda_0}}{E [\sigma_0 - C_0(\sigma) - \tau_s / \sin 2\alpha]^{-1-1/\lambda_0}} = \delta_c \quad (3.7)$$

(σ – параметр, характеризующий внешнюю нагрузку).

Таким образом, трещина Коттрелла зародится тогда, когда внешняя нагрузка достигнет своего предельного значения, являющегося решением уравнения (3.7).

Формула (3.7) представляет собой условие зарождения трещины Коттрелла.

В случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (рис. 7) длина зоны ослабленных связей и ее раскрытие в узловой точке выражаются формулами:

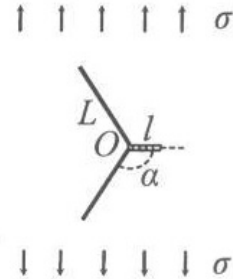


Рис. 7

$$l = \Lambda_1 \left(\frac{2m - \sigma^0 \sin 2\alpha}{2 - \sigma^0 - 2m / \sin 2\alpha} \right)^{-1/\lambda_0} L;$$

$$\delta = \Delta_1 \frac{(1 - \nu^2) \sigma_0}{E} (2 - \sigma^0 - 2m / \sin 2\alpha) \left(\frac{2m - \sigma^0 \sin 2\alpha}{2 - \sigma^0 - 2m / \sin 2\alpha} \right)^{-1/\lambda_0} L;$$

$$\Lambda_1 = \Lambda (-Q)^{-1/\lambda_0}; \quad \Delta_1 = \frac{\Delta (-Q)^{-1/\lambda_0}}{2}; \quad \sigma^0 = \frac{\sigma}{\sigma_0}; \quad m = \frac{\tau_s}{\sigma_0}.$$

Зависимости относительной длины l/L зоны ослабленных связей и ее относительного раскрытия $\delta^0 = \delta E / ((1 - \nu^2) L \sigma_0)$ в узловой точке от нагрузки $\sigma^0 = \sigma / \sigma_0$ для некоторых значений угла α показаны на рис. 8 ($m = 0,01$). Кривые 1 – 4 и 5 – 8 соответствуют значениям α , равным 140, 150, 160 и 170 градусам.

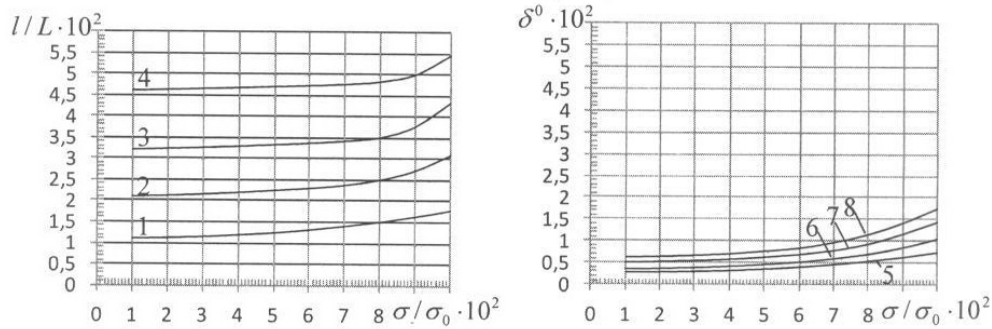


Рис. 8

Полученные результаты свидетельствуют о том, что с ростом нагрузки длина зоны ослабленных связей и ее раскрытие в узловой точке увеличиваются. Чем меньше острый угол между линиями микропластического деформирования, тем больше интенсивность напряжений вблизи их точки пересечения (рис. 5), длина зоны ослабленных связей, ее раскрытие в узловой точке и меньше то значение нагрузки, при достижении которого вдоль зоны ослабленных связей произойдет разрыв сплошности и зарождение маломасштабной трещины Коттрелла.

Заключение.

Построено точное решение симметричной задачи линейной теории упругости для плоскости, из точки которой исходят две полубесконечные линии разрыва касательного смещения и линия разрыва нормального смещения конечной длины. На основе этого решения получена формула для длины зоны ослабленных связей в точке пересечения линий микропластического деформирования. Развитие данной зоны предшествует зарождению трещины по механизму Коттрелла.

Получено уравнение, служащее для определения нагрузки, при которой происходит зарождение трещины. Показано, что в случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (рис. 7) с уменьшением острого угла между ними, длина зоны ослабленных связей и ее раскрытие в узловой точке увеличиваются, а разрушающая нагрузка уменьшается.

РЕЗЮМЕ. Визначено довжину дрібномасштабної вузької зони ослаблених зв'язків (зони передруйнування) в точці перетину ліній мікропластичного деформування (ліній ковзання) у пружному тілі. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення. Розвиток цієї зони передус зародженню тріщини за механізмом Коттрелла. Установлено умову зародження тріщини. Точний розв'язок відповідної задачі лінійної теорії пружності побудовано методом Вінера – Хопфа.

1. *Бережницкий Л.Т., Кундрат Н.М.* О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Пробл. прочности. – 1982. – № 11. – С. 66 – 69.
2. *Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Пробл. прочности. – 1973. – № 2. – С. 3 – 18.
3. *Каминский А.А., Быковцев А.С., Китнис Л.А., Хазин Г.А.* Об интенсивности напряжений в концах сдвиговых трещин, исходящих из точки упругой плоскости // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 56 – 58.
4. *Каминский А.А., Китнис Л.А., Хазин Г.А.* Исследование напряженного состояния вблизи угловой точки при моделировании начальной пластической зоны линиями скольжения // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 5. – С. 93 – 99.
5. *Леонов М.Я., Витвицкий П.М., Ярема С.Я.* Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором // Докл. АН СССР. – 1963. – 148, № 3. – С. 541 – 544.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
7. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
8. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
9. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – 28, № 1. – С. 49 – 68.
10. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
11. *Cherepanov G.P.* Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 952 p.
12. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8, N 2. – P. 100 – 104.
13. *Evans J.T.* Reverse shear on inclined planes at the tip of a sharp crack // J. Mech. and Phys. Solids. – 1979. – 27, N 1. – P. 73 – 88.
14. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Liquid Viscosity on Dispersion of Quasi – Lamb Waves in an Elastic – Layer – Viscous Liquid Layer System // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 4. – P. 361 – 367.
15. *Guz A.N., Dekret V.A.* Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – P. 1 – 48.
16. *Kaloerov S.A., Zan'ko A.I.* A Method for Determining the Stress State of Plates with a Curved Hole // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 89 – 103.
17. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F.* Modeling Subcritical Crack Growth in a Viscoelastic Body Under Concentrated Forces // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 5. – P. 538 – 544.
18. *Lo K.K.* Modeling of plastic yielding at a crack tip by inclined slip planes // Int. J. Fract. – 1979. – 15, N 6. – P. 583 – 589.
19. *Rice J.R.* Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity // J. Mech. and Phys. Solids. – 1974. – 22, N 1. – P. 17 – 26.
20. *Riedel H.* Plastic yielding an inclined slip-planes at a crack tip // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – 24, N 5. – P. 277 – 289.
21. *Vitek V.* Yielding on inclined planes at the tip of a crack loaded in uniform tension // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – 24, N 5. – P. 263 – 275.

Поступила 12.09.2017

Утверждена в печать 22.05.2018