

Л. П. Хорошун

**ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ
ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ
С ДЕФЕКТАМИ НА МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem on effective elastic properties of stochastic unidirectional fibrous composite is considered. The imperfect interface conditions of contact of matrix and cylindrical fibers are assumed in the form of presence of porous interphase layers between the matrix and cylindrical fibers, which are considered as the third component. As a base, the stochastic two-dimensional equations of the elasticity for the material with transversely isotropic components are chosen. An approach is used in which the three-component material is reduced to the two-component one by replacing the fiber with the interphase layer by the composite fiber with equivalent or effective elastic moduli. A dependence of effective moduli on the volume fractions of fibers and porosity of interphase layers is studied.

Key words: unidirectional fibrous composite, stochastic equations, porous interphase layers, imperfect interface conditions, effective elastic properties.

Введение.

В основе создания композитных материалов (КМ) с требуемыми механическими свойствами лежит объемное сочетание различных компонентов в виде матрицы, связывающей в монолит систему армирующих элементов (наполнитель). При этом характеристики жесткости и прочности наполнителя значительно выше аналогичных характеристик матрицы, а соответствующие свойства КМ отличаются от свойств компонентов. Армирующие элементы вносят основной вклад в жесткость и прочность КМ, в то время как матрица передает нагрузку наполнителю и обеспечивает необходимую форму изделия. Обеспечение максимального нагружения армирующих элементов является основой для достижения максимально высоких показателей жесткости и прочности КМ с заданными механическими свойствами компонентов.

Передача нагрузки от матрицы к включению происходит через поверхность раздела, где осуществляется сцепление (адгезия) компонентов. В идеальном варианте сцепление описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела компонентов (фаз) и носит название совершенных условий на межфазной границе [14 – 16, 20, 21]. Условие идеального контакта компонентов на межфазной границе принимается в большинстве работ по прогнозированию эффективных упругих свойств КМ.

В реальных КМ сцепление между компонентами на межфазной границе может существенно отличаться от совершенных условий контакта, описываемого непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений. Это связано прежде всего с тем, что в действительности граница между матрицей и включением представляет собой не поверхность, а некоторую переходную зону [2, 5], толщина которой в композитах на основе монокристаллических волокон может находиться в пределах от нескольких нанометров до нескольких тысяч нанометров. В других композитных системах на основе стеклянных, керамических, углеродных и металлических волокон толщина переходной зоны может быть больше. Переходная зона отличается как от матрицы, так и от наполнителя и включает в себя разрывы в объеме материала физической, химической и механической природы. Протекание химических и диффузных процессов в этой зоне может изменять ее размеры и природу.

Для усиления прочности сцепления волокнистых и дисперсных наполнителей с матрицей их подвергают перед изготовлением КМ поверхностной обработке в виде нанесения на поверхность наполнителя аппретов, свойства которых отличаются от соответствующих свойств матрицы и наполнителя. Это увеличивает переходную зону между матрицей и включением. В переходной зоне на некоторых участках возможно образование микротрещин и микропор вследствие недостаточного смачивания поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемости, вызываемой нагрузкой в процессе эксплуатации.

Перечисленные факторы свидетельствуют о том, что в реальном КМ контактирующие компоненты разделены не поверхностью, а некоторым материальным слоем с дефектами в виде микротрещин и микропор. Поэтому прогнозирование эффективных упругих свойств КМ на основе модели совершенного контакта компонентов в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе может приводить к существенным погрешностям. Это обусловило появление ряда работ с различными вариантами несовершенных условий контакта матрицы и наполнителя [5 – 7, 9, 10, 12, 13, 19, 21]. Наиболее адекватной представляется модель существования между матрицей и включением межфазного материального слоя [7, 13] с некоторыми свойствами, отличными от свойств матрицы и включения. При этом на поверхности раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений, что дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу.

Точные аналитические решения задач о напряженно-деформированном состоянии и эффективных свойствах КМ для модели, предполагающей наличие третьей фазы между наполнителем и матрицей, ограничены лишь случаями сферических и бесконечных цилиндрических включений, невзаимодействующих или имеющих регулярное расположение. Это обусловило разработку приближенных моделей [12, 19], где межфазный слой заменяется межфазной поверхностью, разделяющей матрицу и включение, которую называют «несовершенной межфазной поверхностью» ввиду несовершенности условий контакта в отличие от «совершенной межфазной поверхности» с совершенными условиями контакта. При этом материальные постоянные, характеризующие упругие свойства и дефектность межфазного слоя, должны входить в граничные условия на «несовершенной межфазной поверхности». Здесь возможен чисто гипотетический подход, примером которого является предположение о существовании скачка перемещений [12, 19] на «несовершенной межфазной поверхности» и его пропорциональности непрерывным поверхностным напряжениям. Наряду с этим существует подход, основанный на аналитическом обосновании приближенной модели путем асимптотического разложения исходных уравнений модели межфазного слоя по его толщине [7, 13]. Это дает возможность сформулировать более точные условия на «несовершенной межфазной поверхности», которые содержат в первом приближении скачки как перемещений, так и поверхностных напряжений.

Моделирование несовершенных условий контакта матрицы и наполнителя наличием межфазного слоя в виде третьей фазы усложняет задачу прогнозирования эффективных свойств КМ и требует разработки адекватных методов решения. Один из таких методов состоит в сведении трехфазного материала к двухфазному путем замены включения с межфазным слоем эквивалентным включением, которое имеет эквивалентные или эффективные свойства исходного композитного включения [13]. В результате задача об эффективных свойствах трехфазного КМ сводится к последовательному решению двух задач об эффективных свойствах двухфазных материалов.

В механике КМ существует понятие оптимального поведения композита [3] как структурного единства его компонентов (фаз), которое предполагает идеальное сцепление всех элементов наполнителя с матрицей, а также равномерную и непрерывную передачу усилий от компонента к компоненту. Нарушение тем или иным способом структурного единства ведет к снижению оптимального поведения композита. Такое нарушение может быть вызвано частичным или полным разрушением компонентов

или межфазного слоя в виде образования микротрещин и микропор в процессе изготовления или эксплуатации, а также неэффективной передачей усилий от низко модульной матрицы к высоко модульным включениям. Это свидетельствует об актуальности исследований конкретных способов нарушения структурного единства компонентов КМ, к которым относятся задачи механики трещины на границе раздела сред [11], систем трещин [8], а также механики КМ с дефектами на границе раздела компонентов [18].

В данной работе рассматривается задача об эффективных упругих свойствах однонаправленного волокнистого композитного материала стохастической структуры с дефектами на межфазной границе в виде микропор. Межфазная граница моделируется межфазным слоем, упругие свойства которого отличаются от свойств матрицы и волокон. На поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и волокном выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и волокон, а также дефектов в виде микротрещин и микропор. Так как часть материала в окрестности микротрещины нагрузку не несет, то микротрещины моделируются микропорами.

В основу построения положены стохастические дифференциальные уравнения упругости в перемещениях для многокомпонентного КМ с трансверсально-изотропными компонентами, где плоскость изотропии нормальна к направлению волокон. С помощью функций Грина для однородного тела сравнения исходные уравнения приводятся к стохастическим интегральным уравнениям относительно деформаций. В пренебрежении флуктуациями деформаций в пределах компонента методом условных моментов задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций. В случае, когда упругие постоянные многокомпонентного КМ удовлетворяют свойству статистической изотропии в плоскости, нормальной к направлению волокон, решение системы алгебраических уравнений определено в аналитическом виде. При этом эффективные упругие свойства КМ являются трансверсально-изотропными и зависят от упругих свойств компонентов, их объемных содержаний и выбора постоянных однородного упругого тела сравнения. Анализ решения задачи для двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ показывает, что объемный модуль плоской деформации, поперечный и продольный модули сдвига следует брать в виде математических ожиданий соответствующих модулей упругости компонентов в случае более жесткой матрицы по сравнению с волокнами. В противоположном случае следует принять соответствующие упругие податливости тела сравнения в виде математических ожиданий соответствующих упругих податливостей компонентов.

На основе предложенной теории исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала стохастической структуры, состоящего из матрицы, однонаправленных волокон и межфазных пористых слоев. Трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные волокна моделируются двухкомпонентным волокнистым матричным материалом, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания соответственно реальных волокон и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных упругих постоянных от объемного содержания волокон и пористости межфазных слоев.

§1. Исходные уравнения.

Рассмотрим композитный материал, образованный однонаправленными хаотически расположенными трансверсально-изотропными волокнами, связанными в монолит некоторым изотропным связующим, представляющим матрицу [4]. Предполагаем, что между волокнами и матрицей существует межфазный слой, свойства которого отличаются от свойств волокон и матрицы. При этом на поверхностях раздела

межфазного слоя с матрицей и волокном выполняются условия совершенного контакта, обеспечивающие непрерывность перемещений и поверхностных напряжений. Вследствие хаотичности расположения волокон упругие модули будут случайными статистически однородными и изотропными функциями координат плоскости, нормальной к направлению волокон. Пусть волокна направлены вдоль оси x_3 . Тогда зависимости между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} в микроточке можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = (2kV_{ijmn} + 2mD_{ijmn})\varepsilon_{mn} + \lambda_{13}\varepsilon_{33}\delta_{ij}; \quad (1.1)$$

$$\sigma_{33} = \lambda_{13}\varepsilon_{rr} + \lambda_{33}\varepsilon_{33}; \quad \sigma_{i3} = 2\mu\varepsilon_{i3} \quad (i, j, m, n, r = 1, 2),$$

где обозначено

$$2k = \lambda_{11} + \lambda_{12}2m; \quad 2m = \lambda_{11} - \lambda_{12}; \quad 2\mu = \lambda_{44}; \quad V_{ijmn} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mn};$$

$$D_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{mn}) \quad (i, j, m, n = 1, 2), \quad (1.2)$$

причем $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{33}, \lambda_{44}$ – модули упругости, являющиеся случайными функциями координат x_1, x_2 [14]. Объемные содержания и модули упругости волокон и матрицы обозначим, соответственно, $c_k, \lambda_{11k}, \lambda_{12k}, \lambda_{13k}, \lambda_{33k}, \lambda_{44k}$ ($k = 1, \dots, N$).

Если композитный материал находится в условиях однородных нагрузок, то напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} также будут статистически однородными случайными функциями координат x_1, x_2 .

Представим напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} и перемещения u_i в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0; \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0. \quad (1.3)$$

Тогда, подставляя (1.1), (1.3) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.4)$$

и учитывая соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.5)$$

приходим к уравнениям равновесия относительно флуктуаций перемещений

$$m_c u_{i,rr}^0 + k_c u_{r,ri}^0 = -[(k' - m')\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2m'\varepsilon_{ij} + \lambda_{13}\langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}]_{,j};$$

$$\mu_c u_{3,rr}^0 = -2(\mu'\varepsilon_{3j})_{,j} \quad (k' = k - k_c, m' = m - m_c, \mu' = \mu - \mu_c), \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.6)$$

где k_c, m_c, μ_c – упругие постоянные однородного тела сравнения [4].

Воспользуемся функциями Грина, удовлетворяющими уравнениям

$$m_c G_{ij,rr} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + k_c G_{ir,rj} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \delta_{ij} = 0;$$

$$\mu_c G_{,rr} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \delta_{ij} = 0 \quad (i, j, r, p = 1, 2). \quad (1.7)$$

Тогда на основе теоремы взаимности Бетти из уравнений (1.6), (1.7) следует

$$u_i^{0(1)} = \int_{D^{(2)}} G_{i\alpha} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \left[\left(k^{(2)} - m'^{(2)} \right) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{\alpha\beta} \right]_{,\beta} dD^{(2)} ;$$

$$u_3^{0(1)} = 2 \int_{D^{(2)}} G \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \left(\mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)} \right)_{,\beta} dD^{(2)} \quad (i, \alpha, \beta, p, r = 1, 2). \quad (1.8)$$

Здесь индексы в круглых скобках сверху обозначают точку плоскости. Подставляя (1.3), (1.8) в (1.5), получим интегральные уравнения относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \int_{D^{(2)}} G_{(i\alpha, j)\beta} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \times$$

$$\times \left[\left(k^{(2)} - m'^{(2)} \right) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{\alpha\beta} \right] dD^{(2)} +$$

$$+ \int_{S^{(2)}} G_{(i\alpha, j)\beta} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \left[\left(k^{(2)} - m'^{(2)} \right) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{\alpha\beta} \right] n_\beta^{(2)} dS^{(2)} ;$$

$$\varepsilon_{3j}^{(1)} = \langle \varepsilon_{3j} \rangle + \int_{D^{(2)}} G_{,j\beta} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)} dD^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{,j} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) \mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)} n_\beta^{(2)} dS^{(2)} \quad (1.9)$$

$$(i, j, \alpha, \beta = 1, 2),$$

где n_q – направляющие косинусы нормали к криволинейной бесконечно удаленной границе S области D .

Функции Грина, удовлетворяющие уравнениям (1.7), определяются формулами

$$G_{ij} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) = \frac{1}{4\pi m_c (k_c + m_c)} \left[\left(k_c + 2m_c \right) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + k_c \frac{\left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right) \left(x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right)}{r^2} \right] ;$$

$$G_{ij} \left(x_p^{(1)} - x_p^{(2)} \right) = \frac{1}{2\pi \mu_c} \ln \frac{1}{r} ; \quad r^2 = \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right) \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right) \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (1.10)$$

Представим систему интегральных уравнений (1.9) в символической форме

$$\varepsilon^{(1)} = \langle \varepsilon \rangle + K \left(x^{(1)} - x^{(2)} \right) \lambda'^{(2)} \varepsilon^{(2)} \quad (1.11)$$

и умножим (1.11) на условную плотность $f \left(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \lambda^{(2)} \Big|_v^{(1)} \right)$ (плотность распределения деформаций в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и модулей упругости в точке $x^{(2)}$ при условии, что точка $x^{(1)}$ находится в v -компоненте) и проведем статистическое усреднение. Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon^v \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^N K(x) p_{vk}(x) \lambda'_k \langle \varepsilon^k \rangle \quad (v = 1, \dots, N), \quad (1.12)$$

где $p_{vk} \left(x^{(1)} - x^{(2)} \right)$ – вероятность перехода из v -компонента в точке $x^{(1)}$ в k -компонент в точке $x^{(2)}$, которая удовлетворяет условиям

$$c_k p_{kv} = c_v p_{vk}(x) ; \quad \sum_{k=1}^N p_{vk}(x) = 1 ; \quad p_{vk}(0) = \delta_{vk}, \quad p_{vk}(\infty) = c_k, \quad (1.13)$$

где c_k – объемное содержание k -компонента.

Если свойства композитного материала статистически изотропны в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, то условные вероятности $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$ зависят только от расстояния между точками $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. В этом случае после интегрирования в (1.12) получим

$$\langle \varepsilon^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + A \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \lambda'_k \langle \varepsilon^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (1.14)$$

или в индексной форме

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + A_{ijpq} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \left[(k'_k - m'_k) \langle \varepsilon_{rr}^k \rangle \delta_{pq} + 2m'_k \varepsilon_{pq}^k + \lambda_{13k}^k \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{pq} \right]; \\ \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + A_{3i3q} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \mu'^k \langle \varepsilon_{q3} \rangle \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \nu = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где ненулевые компоненты A_{ijpq} определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{1111} = A_{2222} &= -\frac{k_c + 4m_c}{8m_c(k_c + m_c)}; \quad A_{1122} = A_{2211} = \frac{k_c}{8m_c(k_c - m_c)}; \\ A_{1212} = A_{2121} = A_{1221} = A_{2112} &= -\frac{k_c + 2m_c}{8m_c(k_c + m_c)}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$A_{1313} = A_{2323} = A_{3131} = A_{3232} = A_{1331} = A_{2332} = A_{3113} = A_{3223} = -\frac{1}{4\mu_c}.$$

§2. Эффективные упругие постоянные.

Решение системы уравнений (1.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle &= \left(\frac{1}{k_{\nu} + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{m_{\nu} + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2(k_{\nu} + \bar{k})} \left(\lambda_{13}^{\nu} - \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\langle \varepsilon_{33}^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle = \frac{1}{\mu_{\nu} + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu_{\nu} + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, p, q = 1, 2),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{k} &= m_c; \quad \bar{m} = \frac{k_c m_c}{k_c + 2m_c}; \quad \bar{\mu} = \mu_c; \quad \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1}; \\ \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1}; \quad \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}^1}{k_k + \bar{k}}; \quad \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получим выражения средних напряжений ν -компонента через макродеформации

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\
\langle \sigma_{33}^v \rangle &= \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2\mu_v^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\
k_v^* &= \frac{k_v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}; \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1}; \\
\lambda_{13v}^* &= \frac{\lambda_{13v}^v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}; \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1};
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\lambda_{33v}^* = \lambda_{33}^v + \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \left(\left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle - \frac{\lambda_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \right) \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \nu = 1, \dots, N).$$

Осредняя соотношения (2.3), приходим к соотношениям упругости для макрообъема волокнистого материала

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij} \rangle &= 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \\
\langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\mu^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$\begin{aligned}
k^* &= \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{k}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k k_k}{k_k + \bar{k}} \right); \\
m^* &= \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{m}{m + \bar{m}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k m_k}{m_k + \bar{m}} \right); \\
\lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right); \\
\lambda_{33}^* &= \langle \lambda_{33} \rangle + \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{(\lambda_{13})^2}{k_v + \bar{k}} \right\rangle = \\
&= \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k \lambda_{13k}^2}{k_k + \bar{k}} \right) + \sum_{k=1}^N c_k \left(\lambda_{33k} - \frac{\lambda_{13k}^2}{k_k + \bar{k}} \right); \\
\mu^* &= \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Представим соотношения (2.4) в виде зависимостей макродеформаций от макро-напряжений

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = 2(r^* V_{ijpq} + s^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle + s_{13}^* \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij};$$

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle = s_{13}^* \langle \sigma_{rr} \rangle + s_{33}^* \langle \sigma_{33} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3} \rangle = \frac{1}{2\mu^*} \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \quad (2.6)$$

где эффективные упругие податливости выражаются через эффективные модули упругости формулами

$$2r^* = \frac{\lambda_{33}^*}{2\Delta}; \quad 2s^* = \frac{1}{2m^*}; \quad s_{13}^* = \frac{-\lambda_{13}^*}{2\Delta}; \quad s_{33}^* = \frac{k^*}{\Delta}; \quad \Delta = k^* \lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), получим выражения средних напряжений ν -компонента через макронапряжения

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^\nu \rangle &= 2(p_{1\nu}^* V_{ijpq} + p_{2\nu}^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle + p_{3\nu}^* \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33}^\nu \rangle &= p_{4\nu}^* \langle \sigma_{rr} \rangle + p_{5\nu}^* \langle \sigma_{33} \rangle; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\langle \sigma_{i3}^\nu \rangle = p_{6\nu}^* \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2, \nu = 1, \dots, N),$$

где коэффициенты определяются согласно (2.3), (2.7) формулами

$$\begin{aligned} p_{1\nu}^* &= 2k_\nu^* r^* + \lambda_{13\nu}^* s_{13}^*; \quad p_{2\nu}^* = 2m_\nu^* s^*; \quad p_{3\nu}^* = 2k_\nu^* s_{13}^* + \lambda_{13\nu}^* s_{33}^*; \\ p_{4\nu}^* &= 2\lambda_{13\nu}^* r^* + \lambda_{33\nu}^* s_{13}^*; \quad p_{5\nu}^* = 2\lambda_{13\nu}^* s_{13}^* + \lambda_{33\nu}^* s_{33}^*; \quad p_{6\nu}^* = \frac{\mu_\nu^*}{\mu^*} \quad (\nu = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В случае двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ выражения эффективных модулей упругости (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} k^* &= \langle k \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \quad m^* = \langle m \rangle - \frac{c_1 c_2 (m_1 - m_2)^2}{c_1 m_2 + c_2 m_1 + \bar{m}}; \\ \lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2) (\lambda_{131} - \lambda_{132})}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33} \rangle - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{131} - \lambda_{132})^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \\ \mu^* &= \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к волокнам и матрице.

В решение задачи (2.1) – (2.9) наряду с модулями упругости и объемными содержаниями компонентов, являющимися вполне определенными параметрами, входят постоянные тела сравнения k_c , m_c , μ_c , которые определяются неоднозначным выбором тела сравнения. Поэтому возникает вопрос о корректном выборе постоянных упругости тела сравнения. При формальном решении статистически нелинейной задачи об эффективных упругих свойствах КМ стохастической структуры упругие постоянные тела сравнения обычно выбираются в виде математических ожиданий упругих модулей или податливостей [18], хотя при этом не исключаются и другие варианты. Однако здесь корректность выбора тела сравнения зависит непосредственно от связности компонентов, что особенно наглядно проявляется для двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ. В самом деле, здесь физический смысл имеет выбор

$$k_c = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right)^{-1}; \quad m_c = \left\langle \frac{1}{m} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^{-1}; \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

если жесткость волокон выше жесткости матрицы, и

$$k_c = \langle k \rangle = c_1 k_1 + c_2 k_2; \quad m_c = \langle m \rangle = c_1 m_1 + c_2 m_2; \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (2.12)$$

если жесткость матрицы выше жесткости волокон. Из (2.10) – (2.12) соответственно следуют формулы для КМ с бесконечно жесткими волокнами и с нулевой жесткостью волокон, т.е. с цилиндрическими порами.

В случае многокомпонентного КМ выбор тела сравнения не имеет такой наглядности как для двухкомпонентного КМ, т.е. задача значительно усложняется.

§3. Эффективные модули упругости трехкомпонентного КМ.

Проблематичность корректного выбора постоянных тела сравнения k_c , m_c , μ_c для многокомпонентного КМ затрудняет применение соотношений (2.5) для определения эффективных упругих постоянных трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ, состоящего из матрицы, волокон и межфазных слоев между ними. В связи с этим по аналогии с [13] воспользуемся подходом, в котором трехкомпонентный КМ сводится к двухкомпонентному путем замены волокон с межфазными слоями эффективными композитными волокнами с эквивалентными или эффективными свойствами. Волокна с межфазными слоями моделируем двухкомпонентным матричным материалом волокнистой структуры, где волокна и матрица имеют упругие модули и объемные содержания такие же как реальные волокна и межфазные слои. Основанием для этого является зависимость эффективных упругих постоянных (2.5), (2.10) только от объемных содержаний компонентов, другие геометрические параметры структуры эти выражения не содержат.

Обозначим объемные содержания и модули упругости волокон, матрицы и межфазных слоев соответственно c_k , k_k , m_k , λ_{13k} , λ_{33k} , μ_k ($k = 1, 2, 3$), а объемное содержание и эффективные модули упругости композитных волокон на основе реальных волокон и межфазных слоев – c_4 = $c_1 + c_3$, k_4 , m_4 , λ_{134} , λ_{334} , μ_4 . Тогда, согласно (2.3), получим выражения средних напряжений компонентов 1, 3 через средние деформации $\langle \varepsilon_{ij}^4 \rangle$ композитных волокон

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2 \left(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle; \\ \langle \sigma_{33}^v \rangle &= \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle; \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2 \mu_v^* \langle \varepsilon_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2; \quad v = 1, 3); \\ k_v^* &= \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{13}} \left(\frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}; \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{13}} \left(\frac{s_1}{m_1 + \bar{m}_{13}} + \frac{s_3}{m_3 + \bar{m}_{13}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{13v}^* &= \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left(\frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1}; \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{13}} \left(\frac{s_1}{\mu_1 + \bar{\mu}_{13}} + \frac{s_3}{\mu_3 + \bar{\mu}_{13}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{33v}^* &= \lambda_{33}^v + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{13}} \left[\left(\frac{s_1}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right)^{-1} \left(\frac{s_1 \lambda_{131}}{k_1 + \bar{k}_{13}} + \frac{s_3 \lambda_{133}}{k_3 + \bar{k}_{13}} \right) - \lambda_{13v} \right]; \\ s_1 &= \frac{c_1}{c_1 + c_3}; \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3}; \end{aligned}$$

$$\bar{k}_{13}^* = m_{13}^c; \quad \bar{m}_{13} = \frac{k_{13}^c m_{13}^c}{k_{13}^c + 2m_{13}^c}; \quad \bar{\mu}_{13}^* = \mu_{13}^c; \quad k_{13}^c = \begin{cases} s_1 k_1 + s_3 k_3, & k_3 \geq k_1; \\ \left(\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_3}{k_3} \right)^{-1}, & k_3 \leq k_1; \end{cases}$$

$$m_{13}^c = \begin{cases} s_1 m_1 + s_3 m_3, & m_3 \geq m_1; \\ \left(\frac{s_1}{m_1} + \frac{s_3}{m_3} \right)^{-1}, & m_3 \leq m_1; \end{cases} \quad \mu_{13}^c = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3, & \mu_3 \geq \mu_1; \\ \left(\frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3} \right)^{-1}, & \mu_3 \leq \mu_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

На основе (3.1) находим зависимости между средними по композитным волокнам напряжениями и деформациями

$$\langle \sigma_{ij}^4 \rangle = 2(k_4 V_{ijpq} + m_4 D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq}^4 \rangle + \lambda_{134} \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33}^4 \rangle = \lambda_{134} \langle \varepsilon_{rr}^4 \rangle + \lambda_{334} \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle; \quad \langle \sigma_{i3}^4 \rangle = 2\mu_4 \langle \varepsilon_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \quad (3.2)$$

где эффективные упругие модули определяются формулами

$$k_4 = s_1 k_1^* + s_3 k_3^*; \quad m_4 = s_1 m_1^* + s_3 m_3^*; \quad \lambda_{134} = s_1 \lambda_{131}^* + s_3 \lambda_{133}^*;$$

$$\lambda_{334} = s_1 \lambda_{331}^* + s_3 \lambda_{333}^*; \quad \mu_4 = s_1 \mu_1^* + s_3 \mu_3^*. \quad (3.3)$$

Представим соотношения (3.2) в виде зависимостей средних по композитным волокнам деформаций от средних напряжений

$$\langle \varepsilon_{ij}^4 \rangle = 2(r_4 V_{ijpq} + s_4 D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq}^4 \rangle + s_{134} \langle \sigma_{33}^4 \rangle \delta_{ij};$$

$$\langle \varepsilon_{33}^4 \rangle = s_{134} \langle \sigma_{rr}^4 \rangle + s_{334} \langle \sigma_{33}^4 \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^4 \rangle = \frac{1}{2\mu_4} \langle \sigma_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \quad (3.4)$$

где эффективные упругие податливости композитных волокон выражаются через эффективные модули упругости формулами

$$2r_4 = \frac{\lambda_{334}}{2\Delta_4}; \quad 2s_4 = \frac{1}{2m_4}; \quad s_{134} = \frac{-\lambda_{134}}{2\Delta_4}; \quad s_{334} = \frac{k_4}{\Delta_4}; \quad \Delta_4 = k_4 \lambda_{334} - \lambda_{134}^2. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) в (3.1), получим выражения средних напряжений компонентов 1, 3 через средние напряжения $\langle \sigma_{ij}^4 \rangle$ композитных волокон

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2(p_{1v}^* V_{ijpq} + p_{2v}^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq}^4 \rangle + p_{3v}^* \langle \sigma_{33}^4 \rangle \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33}^v \rangle = p_{4v}^* \langle \sigma_{rr}^4 \rangle + p_{5v}^* \langle \sigma_{33}^4 \rangle; \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = p_{6v}^* \langle \sigma_{i3}^4 \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2; \quad v = 1, 3), \quad (3.6)$$

где коэффициенты определяются согласно (3.1), (3.5) формулами

$$p_{1v}^* = 2k_v^* r_4 + \lambda_{13v}^* s_{134}; \quad p_{2v}^* = 2m_v^* s_4; \quad p_{3v}^* = 2k_v^* s_{134} + \lambda_{13v}^* s_{334};$$

$$p_{4v}^* = 2\lambda_{13v}^* r_4 + \lambda_{33v}^* s_{134}; \quad p_{5v}^* = 2\lambda_{13v}^* s_{134} + \lambda_{33v}^* s_{334}; \quad p_{6v}^* = \mu_v^* / \mu_4 \quad (v = 1, 3). \quad (3.7)$$

Согласно применяемому подходу эффективные постоянные упругости трехкомпонентного КМ, образованного матрицей, волокнами и межфазными слоями, определяются как эффективные постоянные упругости двухкомпонентного КМ, образованного

матрицей и композитными волокнами, имеющими объемные содержания и модули упругости соответственно $c_2, k_2, m_2, \lambda_{132}, \lambda_{332}, \mu_2$ и $c_4 = c_1 + c_3, k_4, m_4, \lambda_{134}, \lambda_{334}, \mu_4$. Тогда, согласно (2.3), находим выражения средних напряжений по компонентам 2, 4 через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ трехкомпонентного КМ

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2 \left(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \langle \sigma_{33}^v \rangle &= \lambda_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3}^v \rangle = 2 \mu_v^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2; v = 2, 4); \\ k_v^* &= \frac{k_v}{k_v + \bar{k}_{24}} \left(\frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}; \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}_{24}} \left(\frac{c_2}{m_2 + \bar{m}_{24}} + \frac{c_4}{m_4 + \bar{m}_{24}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{13v}^* &= \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left(\frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1}; \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}_{24}} \left(\frac{c_2}{\mu_2 + \bar{\mu}_{24}} + \frac{c_4}{\mu_4 + \bar{\mu}_{24}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{33v}^* &= \lambda_{33v} + \frac{\lambda_{13v}}{k_v + \bar{k}_{24}} \left[\left(\frac{c_2}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right)^{-1} \left(\frac{c_2 \lambda_{132}}{k_2 + \bar{k}_{24}} + \frac{c_4 \lambda_{134}}{k_4 + \bar{k}_{24}} \right) - \lambda_{13v} \right]; \\ \bar{k}_{24} &= m_{24}^c; \quad \bar{m}_{24} = \frac{k_{24}^c m_{24}^c}{k_{24}^c + 2m_{24}^c}; \quad \bar{\mu}_{24} = \mu_{24}^c; \quad k_{24}^c = \begin{cases} c_2 k_2 + c_4 k_4, & k_4 \geq k_2; \\ \left(\frac{c_2}{k_2} + \frac{c_4}{k_4} \right)^{-1}, & k_4 \leq k_2; \end{cases} \quad (3.8) \\ m_{24}^c &= \begin{cases} c_2 m_2 + c_4 m_4, & m_4 \geq m_2; \\ \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_4}{m_4} \right)^{-1}, & m_4 \leq m_2; \end{cases} \quad \mu_{24}^c = \begin{cases} c_2 \mu_2 + c_4 \mu_4, & \mu_4 \geq \mu_2; \\ \left(\frac{c_2}{\mu_2} + \frac{c_4}{\mu_4} \right)^{-1}, & \mu_4 \leq \mu_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следуют зависимости между макронапряжениями и макродеформациями трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= 2 \left(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2 \mu^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$\begin{aligned} k^* &= c_2 k_2^* + c_4 k_4^*; \quad m^* = c_2 m_2^* + c_4 m_4^*; \quad \lambda_{13}^* = c_2 \lambda_{132}^* + c_4 \lambda_{134}^*; \\ \lambda_{33}^* &= c_2 \lambda_{332}^* + c_4 \lambda_{334}^*; \quad \mu^* = c_2 \mu_2^* + c_4 \mu_4^*. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если представить соотношения (3.9) в виде зависимостей макродеформаций от макронапряжений (2.6), то эффективные упругие податливости будут определяться формулами (2.7). На основе (2.6), (2.7), (3.8) получим зависимости средних напряжений компонентов 2, 4 от макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = 2 \left(p_{1v}^* V_{ijmn} + p_{2v}^* D_{ijmn} \right) \langle \sigma_{mn} \rangle + p_{3v}^* \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33}^{\nu} \rangle = p_{4\nu}^* \langle \sigma_{rr} \rangle + p_{5\nu}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = p_{6\nu}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2; \nu = 2, 4), \quad (3.11)$$

где выражения коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} p_{1\nu}^* &= 2k_{\nu}^* r^* + \lambda_{13\nu}^* s_{13}^*; & p_{2\nu}^* &= 2m_{\nu}^* s^*; & p_{3\nu}^* &= 2k_{\nu}^* s_{13}^* + \lambda_{13\nu}^* s_{33}^*; \\ p_{4\nu}^* &= 2\lambda_{13\nu}^* r^* + \lambda_{33\nu}^* s_{13}^*; & p_{5\nu}^* &= 2\lambda_{13\nu}^* s_{13}^* + \lambda_{33\nu}^* s_{33}^*; & p_{6\nu}^* &= \frac{\mu_{\nu}^*}{\mu^*} \quad (\nu = 2, 4). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Исходя из соотношений (3.6), (3.11), находим выражения средних напряжений компонентов 1, 3 через макронапряжения трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^{\nu} \rangle &= 2 \left[(2p_{1\nu}^* p_{14}^* + p_{3\nu}^* p_{44}^*) V_{ijmn} + 2p_{2\nu}^* p_{24}^* D_{ijmn} \right] \langle \sigma_{mn} \rangle + (2p_{1\nu}^* p_{34}^* + p_{3\nu}^* p_{54}^*) \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33}^{\nu} \rangle &= (2p_{4\nu}^* p_{14}^* + p_{5\nu}^* p_{44}^*) \langle \sigma_{rr} \rangle + (2p_{4\nu}^* p_{34}^* + p_{5\nu}^* p_{54}^*) \langle \sigma_{33} \rangle; \\ \langle \sigma_{i3}^{\nu} \rangle &= p_{6\nu}^* p_{64}^* \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, m, n = 1, 2; \nu = 1, 3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Объемные содержания волокон, матрицы и межфазных слоев c_1 , c_2 , c_3 определяются формулами

$$c_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}; \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}; \quad c_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad (3.14)$$

где v_1, v_2, v_3 – объемы соответственно волокон, матрицы и межфазных слоев в некотором макрообъеме КМ. Если макрообъем содержит n цилиндрических волокон радиуса r_0 , а толщина межфазного слоя равна h , то будем иметь

$$v_1 = \pi n l r_0^2; \quad v_3 = 2\pi n l h r_0, \quad (3.15)$$

где l – длина волокна в макрообъеме. Из (3.14), (3.15) следует зависимость

$$c_3 = 2 \frac{h}{r_0} c_1. \quad (3.16)$$

Соотношения (3.1) – (3.16) позволяют вычислить зависимость эффективных модулей упругости и средних напряжений компонентов от объемных содержаний и упругих постоянных компонентов, а также от отношения толщины межфазного слоя к радиусу волокна.

§4. Эффективные модули упругости однонаправленного волокнистого КМ с дефектами на межфазной границе.

В изложенных выше результатах по определению эффективных модулей упругости и средних напряжений компонентов трехкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ предполагаются заданными объемные содержания и модули упругости трансверсально-изотропных волокон, матрицы и межфазных слоев. Как частный случай отсюда следуют варианты с изотропными свойствами компонентов. Наличие в межфазных слоях дефектов меняет их упругие свойства. Если дефекты моделировать микропорами, а материал каркаса пористых межфазных слоев принять изотропным, то эффективные модули объемного сжатия K_3 и сдвига μ_3 межфазных пористых слоев определяются формулами [18]

$$K_3 = \frac{4K_0\mu_0 + (1-p)^2}{4\mu_0 + (3K_0 - 4\mu_0)p}; \quad \mu_3 = \frac{\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)(1-p)^2}{9K_0 + 8\mu_0 - (3K_0 - 4\mu_0)p}, \quad (4.1)$$

где K_0 , μ_0 соответственно модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса; p – пористость.

Средние напряжения пористого межфазного слоя $\langle \sigma_{ij}^3 \rangle$ связаны со средними напряжениями каркаса $\langle \sigma_{ij}^3 \rangle_0$ зависимостью

$$\langle \sigma_{ij}^3 \rangle = (1-p) \langle \sigma_{ij}^3 \rangle_0. \quad (4.2)$$

Из (3.13), (4.2) находим зависимости средних напряжений каркаса пористого межфазного слоя от макронапряжений

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^3 \rangle_0 &= \frac{2}{1-p} \left[(2p_{13}^* p_{14}^* + p_{33}^* p_{44}^*) V_{ijmn} + 2p_{23}^* p_{24}^* D_{ijmn} \right] \times \\ &\quad \times \langle \sigma_{mn} \rangle + \frac{1}{1-p} (2p_{13}^* p_{34}^* + p_{33}^* p_{54}^*) \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33}^3 \rangle_0 &= \frac{1}{1-p} (2p_{43}^* p_{14}^* + p_{53}^* p_{44}^*) \langle \sigma_{rr} \rangle + (2p_{43}^* p_{34}^* + p_{53}^* p_{54}^*) \langle \sigma_{33} \rangle; \\ \langle \sigma_{i3} \rangle_0 &= \frac{1}{1-p} p_{63}^* p_{64}^* \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, m, n = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношения (3.10), (3.13), (3.16), (4.1), (4.3) дают возможность исследовать зависимости эффективных модулей упругости и напряженного состояния однонаправленного волокнистого КМ с дефектами на межфазной границе, моделируемой пористым межфазным слоем, от объемного содержания волокон и пористости межфазного слоя.

§5. Численные результаты.

На основе приведенных соотношений проведено численное исследование влияния несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства стохастического КМ на основе однонаправленных волокон из алюмоборосиликатного стекла и матрицы из отвержденного эпоксидного связующего, которые имеют упругие модули объемного сжатия и сдвига соответственно [1]

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_s = 33,333 \text{ ГПа}; \quad \mu_s = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (5.1)$$

Несовершенные условия контакта волокон и матрицы принимаем в виде наличия межфазных пористых слоев между волокнами и матрицей, которые рассматриваются как третий компонент КМ. Аппретирующее покрытие волокон рекомендуется [3] применять с модулями упругости, промежуточными между модулями волокон и матрицы, что обеспечивает равномерную передачу усилий. Поэтому в безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига эпоксидной матрицы μ_s , согласно (4.1), (5.1), принимаем следующие значения:

$$K_1 = 30; \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3; \quad \mu_2 = 1; \quad K_0 = 16,5; \quad \mu_0 = 11,75. \quad (5.2)$$

Объемное содержание третьего компонента с модулями упругости (4.1) определяется формулой (3.16), где отношение толщины межфазного слоя h к радиусу цилиндрического волокна принято равным 0,01.

На рис. 1 – 5 приведены зависимости эффективных модулей упругости k^* , m^* , μ^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , входящих в (3.9), от объемного содержания волокон c_1 при заданных пористостях p межфазных слоев. Здесь объемное содержание волокон c_1 находится в допустимом интервале $0 \leq c_1 \leq 0,98$ согласно (3.16).

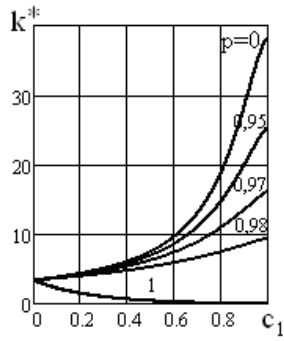


Рис. 1

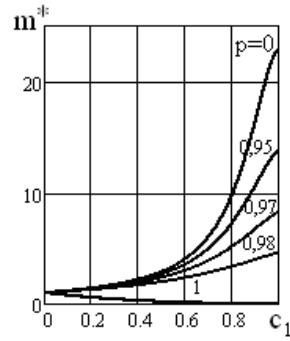


Рис. 2

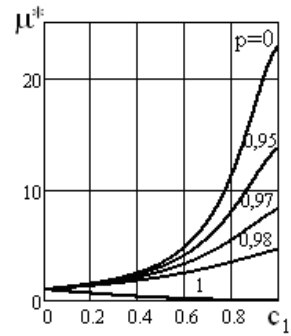


Рис. 3

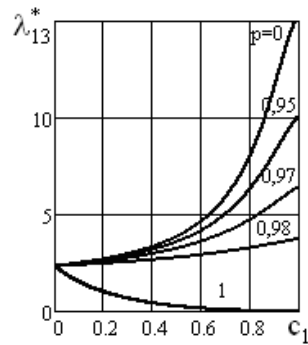


Рис. 4

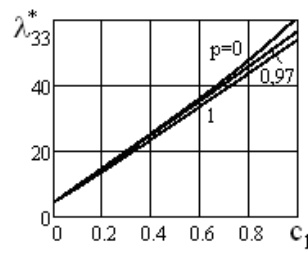


Рис. 5

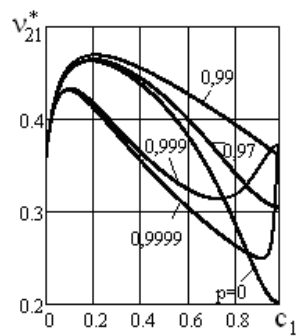


Рис. 6

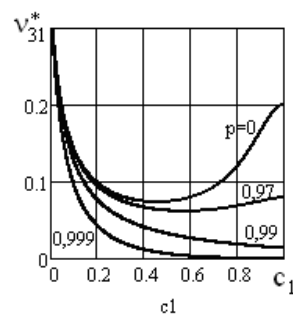


Рис. 7

На рис. 6, 7 приведены зависимости эффективных поперечного ν_{21}^* и продольного ν_{31}^* коэффициентов Пуассона от объемного содержания волокон c_1 , вычисленных согласно формул

$$v_{21}^* = \frac{(k^* - m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}; \quad v_{31}^* = \frac{2m^*\lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}. \quad (5.3)$$

Как видим, увеличение пористости p межфазных слоев эквивалентно уменьшению адгезии и ведет к уменьшению эффективных модулей упругости k^* , m^* , μ^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , что вполне соответствует физическим представлениям. Однако монотонное увеличение модулей k^* , m^* , μ^* , λ_{13}^* с ростом объемного содержания c_1 волокон сохраняется при росте пористости p лишь до определенных соответственно значений $p_1 = 0,989158$; $p_2 = p_3 = 0,991435$; $p_4 = 0,98507$, после чего модули уменьшаются с ростом объемного содержания c_1 волокон. Исключение представляет лишь модуль λ_{33}^* , который растет с ростом объемного содержания c_1 волокон при произвольных значениях пористости p межфазных слоев.

Кривые зависимостей эффективных коэффициентов Пуассона v_{21}^* , v_{31}^* от объемного содержания c_1 волокон имеют немонотонный характер. При этом с ростом пористости p межфазных слоев коэффициент v_{31}^* убывает для всех значений объемного содержания c_1 волокон, в то время как коэффициент v_{21}^* растет в диапазоне $0 \leq p \leq 0,99$, затем убывает, имея более сложный характер зависимости от c_1 .

Заключение.

Создание КМ с заданными механическими свойствами достигается выбором компонентов, геометрических параметров структуры, а также осуществлением оптимального сцепления компонентов на границе их раздела. Идеальный вариант сцепления компонентов или их совершенный контакт описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений на границе их раздела. Однако в реальных КМ условия контакта между компонентами могут существенно отличаться от совершенных, т.к. в действительности граница между компонентами представляет собой не поверхность, а переходную зону, свойства которой отличаются от свойств компонентов. Это обусловлено наличием разрывов физической, химической и механической природы между компонентами, нанесением аппретов на включения для усиления химических связей с матрицей, возможностью образования микропустот, связанной с особенностями технологии изготовления и эксплуатации КМ. Поэтому адекватная модель несовершенного контакта матрицы и включений сводится к наличию между ними межфазных слоев, рассматриваемых как третий компонент, который состоит из приповерхностных частей матрицы и включений, аппретирующих покрытий включений, а также дефектов в виде микропустот. На поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. В случае однонаправленного волокнистого КМ стохастический характер расположения волокон в плоскости, нормальной к их направлению, дает основание положить в основу двумерные стохастические уравнения упругости для прогнозирования эффективных упругих свойств трехкомпонентного КМ. Методом условных моментов задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций, решение которой находится в аналитическом виде в случае статистической изотропии модулей упругости в плоскости. Эффективные упругие свойства КМ являются трансверсально-изотропными и зависят от объемного содержания и упругих постоянных компонентов, а также от пористости межфазных слоев, которой моделируются дефекты.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості односпрямованого волокнистого композитного матеріалу з недосконалими умовами контакту матриці і циліндричних волокон у вигляді наявності міжфазних пористих шарів, які розглядаються як третій компонент. В основу покладено стохастичні двовимірні рівняння пружності для матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами. Застосовано підхід, де трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного заміною волокон з міжфазним шаром ефективними композитними волокнами з еквівалентними чи ефективними модулями пружності. Досліджено залежність ефективних модулів пружності від об'ємного вмісту волокон і пористості міжфазних шарів.

1. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композит. материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
2. Монокристалльные волокна и армированные ими материалы / Под редакцией А.Т. Туманова. – М.: Мир, 1973. – 464 с.
3. Современные композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. – М.: Мир, 1970. – 672 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
5. Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – **37**. – P. 381 – 393.
6. Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents // Mech. Mater. – 1985. – **4**. – P. 197 – 208.
7. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater. – 2001. – **33**. – P. 309 – 323.
8. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 64 – 84.
9. Gu S.T. He Q.C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. – 2011. – **59**. – P. 1413 – 1426.
10. Gu S.T., Liu J.T., He Q.C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities // Int. J. Solids Struct. – 2014. – **51**. – P. 2283 – 2296.
11. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A. Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Material with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
12. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. – 1990. – **8**. – P. 333 – 348.
13. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // J. Mech. Phys. Solids. – 2002. – **50**. – P. 2509 – 2537.
14. Khoroshun L.P. Statistical Theory of Deformation of Unidirectional Fibrous Materials // Sov. Appl. Mech. – 1968. – **4**, N 7. – P. 5 – 9.
15. Khoroshun L.P. Elastic Properties of Materials Reinforced by Unidirectional Short Fibers // Sov. Appl. Mech. – 1972. – **8**, N 12. – P. 1358 – 1363.
16. Khoroshun L.P. Prediction of Thermoelastic Properties of Materials Strengthened by Unidirectional Discrete Fibers // Sov. Appl. Mech. – 1974. – **10**, N 12. – P. 1288 – 1293.
17. Khoroshun L.P. Methods of Random Functions in Problems of Macroscopic Properties of Microheterogeneous Media // Sov. Appl. Mech. – 1978. – **14**, N 2. – P. 113 – 124.
18. Khoroshun L.P. Effective Elastic Properties of Stochastic Granular Composites with Interfacial Defects // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 574 – 587.
19. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites // Composite Structures. – 2017. – **160**. – P. 635 – 652.
20. Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic and aligned ellipsoidal in homogenities // Int. J. of Solids and Struct. – 2018. – **136** – **137**. – P. 220 – 240.
21. Sangani A.S., Mo G. Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 1997. – **45**. – P. 2001 – 2031.

Поступила 26.12.2018

Утверждена в печать 22.05.2018