ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.003
УДК 514.8

А.А. Мартинюк, академік НАН України

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Про оцінку функції Ляпунова на розв'язках квазілінійної дробово-подібної системи

Якісна теорія рівнянь збуреного руху із дробово-подібною похідною вектора стану розвивається в останні кілька років. Початок цих досліджень було покладено введенням дробово-подібної похідної для функції Ляпунова (Мартинюк, 2018). Розвинення цієї ідеї в ряді робіт дало можливість створити аналог теорії стійкості руху Ляпунова для дробово-подібних систем рівнянь. У даній роботі розглядається клас квазілінійних систем із дробово-подібною похідною вектора стану системи. Для цього типу рівнянь отримана нова оцінка зміни функцій Ляпунова за часом на їх розв'язках і наведено деякі наслідки цієї оцінки.

Ключові слова: *квазілінійна система, дробово-подібна похідна, оцінка функцій Ляпунова.*

1. Попередні результати (див. [1—4]). Нехай $q \in (0,1]$ і $R_+ = [0,\infty)$, R^n — n-вимірний евклідів простір і $\Omega \subset R^n$ — обмежена область, що містить початок координат.

Для $q \in (0,1]$ і неперервної функції $x(t):[t_0,\infty) \to R$ будемо розглядати узагальнену порядку q дробово-подібну похідну $D_{t_0}^q x(t)$ за формулою

$$D_{t_0}^q x(t) = \lim \left\{ \frac{x(t + w(t,\theta,q)) - x(t)}{\theta}, \quad \theta \to 0 \right\}, \tag{1}$$

де $w(t,\theta,q) \to 0$ при $\theta \to 0$, $0 < q \leqslant 1$, за умови, що межа (1) існує.

Нехай $w(t,\theta,q) = \theta(t - t_0)^{1-q}$, тоді

$$D_{t_0}^q x(t) = \lim \left\{ \frac{x(t + \theta(t - t_0)^{1-q}) - x(t)}{\theta}, \theta \to 0 \right\}, \tag{2}$$

$$D^q x(0) = \lim_{t \to 0^+} D_t^q x(t)$$

Цитування: Мартинюк А.А. Про оцінку функції Ляпунова на розв'язках квазілінійної дробово-подібної системи. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 11. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.003

за умови, що межа (2) існує.

Функція $x(t)$ є такою, що q - диференційовна в точці $t \geqslant 0$, якщо межі (1) або (2) існують і скінченні.

Відзначимо, що якщо функція $x(t)$ — неперервно диференційовна за t то

$$D_{t_0}^q x(t) = t^{1-q}\dot{x}(t),$$

де $\dot{x}(t) = \lim\left\{\dfrac{x(t+\theta)-x(t)}{\theta}, \theta \to 0\right\}$.

Далі будемо використовувати оператор (2) для вектора стану $x(t)$ квазілінійної системи дробово-подібних рівнянь при $0 < q \leqslant 1$ і при всіх $t_0 \geqslant 0$.

Нагадаємо деякі співвідношення для функцій $x(t)$ і $y(t)$, які q-диференційовні при $t > 0$:

(а) $D_{t_0}^q \lambda = 0$ при будь-яких значеннях постійної $\lambda \in R$;

(б) $D_{t_0}^q t^n = nt^{n-q}$ при всіх $n \in R$;

(в) $D_{t_0}^q [ax(t) + by(t)] = aD_{t_0}^q [x(t)] + bD_{t_0}^q [y(t)]$ при всіх $a, b \in R$;

(г) $D_{t_0}^q [x(t)y(t)] = x(t)D_{t_0}^q [y(t)] + y(t)D_{t_0}^q [x(t)]$;

(д) $D_{t_0}^q \left[\dfrac{x(t)}{y(t)}\right] = \dfrac{y(t)D_{t_0}^q [x(t)] - x(t)D_{t_0}^q [y(t)]}{y^2(t)}$;

(е) $D_{t_0}^q [x \circ y](t) = \dot{x}(y(t))D_{t_0}^q [y(t)]$,

якщо функція x диференційовна за $y(t)$.

Узагальнений дробово-подібний інтеграл порядку $0 < q \leqslant 1$ з нижньою межею $t_0, t_0 \geqslant 0$ функції $x(t) : [t_0, \infty) \to R^n$ визначимо формулою

$$I_{t_0}^q x(t) = \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1} x(s)\, ds. \tag{3}$$

Якщо $t_0 = 0$, тоді формула (3) набуває вигляду

$$I^q x(t) = \int_0^t x(s)\, d_q s, \text{ де } d_q s \equiv s^{q-1} ds. \tag{4}$$

Відомо (див. [1, 2]), що якщо функція $x : [t_0, \infty) \to R$ є q-диференційовною при $0 < q \leqslant 1$, тоді при всіх $t > t_0$

$$\text{(i) } I_{t_0}^q (D_{t_0}^q x(t)) = x(t) - x(t_0); \tag{5}$$

(ii) $D_{t_0}^q \left[\displaystyle\int_{t_0}^{t} r(t,s)\, d_q s\right] = r(t,t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} D_{t_0}^q [r(t,s)]\, d_q s$;

(iii) $\int\limits_{x(t)}^{b} xD_{t_0}^{q}[y(t)]d_q t = x(t)y(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b y(t)D_{t_0}^{q}[x(t)]\,d_q t$.

2. Дробово-подібна квазілінійна система. Розглядається система рівнянь збуреного руху з дробово-подібною похідною вектора стану

$$D_{t_0}^{q} x(t) = A(t)x + g(t,x), \tag{6}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{7}$$

де $x \in R^n$, $A(t)$ — $n \times n$ — матриця з неперервними елементами на будь-якому скінченному інтервалі $g \in C(R_+ \times R^n, R^n)$ і $t > t_0$. Припускається, що розв'язок $x(t,t_0,x_0) \in C^q(R_+ \times R^n, R^n)$ при всіх $t \in R_+$ $0 < q \leqslant 1$. Разом з оцінками норми розв'язків систем вигляду (6) становить інтерес отримання оцінки функції Ляпунова на розв'язках системи рівнянь з дробово-подібною похідною вектора стану і отримання умов обмеженості руху (див. [4] і бібліографію там).

3. Оцінки функції Ляпунова. Разом з системою рівнянь (6) будемо розглядати додатно визначену функцію $V(t,x) \in C^q(R_+ \times R^n, R^n)$. Згідно з роботами [5, 6] дробово-подібну похідну функції Ляпунова $V(t,x)$ визначимо за формулою

$$D_{t_0}^{q} V(t,x) = \limsup \left\{ \frac{V(t+\theta(t-t_0)^{1-q}, x+\theta(t-t_0)^{1-q}(A(t)+g(t,x)) - V(t,x)}{\theta} : \theta \to 0^+ \right\},$$

де $0 < q \leqslant 1$.

Має місце таке твердження.

Лема 1. *Нехай для системи* (6) *існують неперервні функції* $a, b \in C^q(R,R)$ *і дробово-подібна похідна функції* $V(t,x)$ *така, що*

$$D_{t_0}^{q} V(t,x) \leqslant a(t)V(t,x) + b(t). \tag{8}$$

Тоді на розв'язках системи (6) *зміна функції* $V(t,x(t))$ *оцінюється нерівністю*

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} a(s)d_q s\right] + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left[\int\limits_{\tau}^{t} a(s)d_q s\right] b(\tau)d_q\tau \tag{9}$$

при всіх $t \in [t_0, \infty)$.

Доведення. Враховуючи співвідношення для q -похідної добутку двох функцій маємо

$$D_{t_0}^{q}\left\{V(t,x(t))\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)d_q s\right]\right\} = \{D_{t_0}^{q} V(t,x(t)) - a(t)V(t,x(t))\}\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)d_q s\right] \tag{10}$$

при всіх $t \geqslant t_0$. Інтегруючи обидві сторони нерівності (10), отримуємо оцінку

$$V(t,x(t))\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a(s)d_qs\right]-V(t_0,x(t_0))=$$

$$=\int_{t_0}^{t}[D_{t_0}^{q}V(\tau,x(\tau))-a(\tau)V(\tau,x(\tau))]\exp\left[-\int_{t_0}^{\tau}a(s)d_qs\right]d_q\tau\leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}b(\tau)\exp\left[\int_{\tau}^{t_0}a(s)d_qs\right]d_q\tau.$$

Звідси випливає нерівність (9).

Покажемо, що для системи (1) має місце таке твердження.

Лема 2. *Нехай для системи* (6) *існують функції* $a,b\in C^q(R,R_+)$ *і функція* $V(t,x(t))$ *така, що*

$$V(t,x(t))\leqslant b(t)+\int_{t_0}^{t}a(\tau)V(\tau,x(\tau))d_q\tau$$

при всіх $t\in[t_0,\infty)$. *Тоді виконується оцінка*

$$V(t,x(t))\leqslant b(t)+\int_{t_0}^{t}\exp\left[\int_{\tau}^{t}a(s)d_qs\right]a(\tau)b(\tau)d_q\tau \tag{12}$$

при всіх $t\in[t_0,\infty)$.

Доведення. Позначимо

$$z(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)V(\tau,x(\tau))d_q\tau\,,$$

тоді $z(t_0)=0$ і маємо співвідношення

$$D_{t_0}^{q}z(t)=a(t)V(t,x(t))\leqslant a(t)[b(t)+z(t)]=a(t)b(t)+a(t)z(t)\,.$$

З нерівності (13) випливає, що

$$z(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}\exp\left[\int_{\tau}^{t}a(s)d_qs\right]a(\tau)b(\tau)d_q\tau\,,$$

і звідси отримуємо твердження леми 2, оскільки $V(t,x(t))\leqslant b(t)+z(t)$ при всіх $t\in[t_0,\infty)$.

Наслідок 1. *Нехай в лемі 2 функція* $a(t)\geqslant 0$ *і неперервна при всіх* $t\in[t_0,\infty)$ і $b(t)=k$, $k\in R$ *при всіх* $t\in[t_0,\infty)$. *Тоді, якщо при всіх* $t\in[t_0,\infty)$

$$V(t,x(t))\leqslant k+\int_{t_0}^{t}a(s)V(s,x(s))d_qs\,,$$

то

$$V(t,x(t)) \leqslant k \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s) d_q s\right)$$

при всіх $t \in [t_0, \infty)$.

Доведення. З оцінки (12) за умови $b(t) = k$ отримуємо

$$V(t,x(t)) \leqslant k + k\int_{t_0}^{t} \exp\left[\int_{\tau}^{t} a(s) d_q s\right] a(\tau) d_q \tau =$$

$$= k\left(1 + \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} a(s) d_q s\right] - \exp\left[\int_{\tau}^{t} a(s) d_q s\right]\right) = k \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} a(s) d_q s\right]$$

при всіх $t \in [t_0, \infty)$.

4. Підсумки. Отримана оцінка (9) може бути застосована для дослідження практичної стійкості [7], стійкості за Ляпуновим [6] неперервних квазілінійних систем, а також імпульсних систем (див. [8, 9]).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math.* 2015. **279**. P. 57—66.
2. Anderson D.R., Ulness D.J. Results for conformable differential equations: preprint. Concordia College, Moorhead, MN, 2016. 42 p.
3. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.* 2014. **264**. P. 65—70.
4. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Boundedness of the solutions of fractional-like equations of perturbed motions. *Int. Appl. Mech.* 2020. **56**, № 5.
5. Мартынюк А.А Об устойчивости решений дробно-подобных уравнений возмущенного движения. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 6. С. 9—16. https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.009
6. Martynyuk A.A., Stamova I.M. Fractional-like derivative of Lyapunov-type functions and applications to the stability analysis of motion. *Electron. J. Differ. Equ.* 2018. **2018**, № 62. P. 1—12.
7. Martynyuk A.A., Stamov G., Stamova I.M. Practical stability analysis with respect to manifolds and boundedness of differential equations with fractional-like derivatives. *Rocky Mt. J. Math.* 2019. **49**, № 1. P. 211—233.
8. Stamov G., Martynyuk A., Stamova I. Impulsive fractional-like diffrential equations: practical stability and boundedness with respect to *h*-manifolds. *Fractal Fract.* 2019. **3**, No. 4. 50. https://doi.org/10.3390/fractalfract3040050
9. Stamov G., Stamova I., Martynyuk A., Stamov T. Design and practical stability of a new class of impulsive fractional-like neural networks. Entropy. 2020. **22**. 337. https://doi.org/10.3390/e22030337

Надійшло до редакції 13.10.2020

REFERENCES

1. Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. J. Comput. Appl. Math., 279, pp. 57-66.
2. Anderson, D. R. & Ulness, D. J. (2016). Results for conformable differential equations: preprint. Concordia College, Moorhead, MN.
3. Khalil, Al Horani, M., Yousef, A. & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. J. Comput. Appl. Math., 264, pp. 65-70.

4. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2020). Boundedness of the solutions of fractional-like equations of perturbed motions. Int. Appl. Mech., 56, No. 5.
5. Martynyuk, A. A. (2018). On stability analysis of fractional-like systems of perturbed motion. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 6, pp. 9-16 (in Russian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.009
6. Martynyuk, A. A. & Stamova, I. M. (2018). Fractional-like derivative of Lyapunov-type functions and applications to the stability analysis of motion. Electron. J. Differ. Equ., 2018, No. 62, pp. 1-12.
7. Martynyuk, A. A., Stamov, G. & Stamova, I. M. (2019). Practical stability analysis with respect to manifolds and boundedness of differential equations with fractional-like derivatives. Rocky Mt. J. Math., 49, No. 1, pp. 211-233.
8. Stamov, G., Martynyuk, A. & Stamova, I. (2019). Impulsive fractional-like diffrential equations: practical stability and boundedness with respect to *h*-manifolds. Fractal Fract., 3, No. 4, 50. https://doi.org/10.3390/fractalfract3040050
9. Stamov, G., Stamova, I., Martynyuk, A. & Stamov, T. (2020). Design and practical stability of a new class of impulsive fractional-like neural networks. Entropy, 22, 337. https://doi.org/10.3390/e22030337

Received 13.10.2020

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE ESTIMATION OF THE LYAPUNOV FUNCTION ON SOLUTIONS OF A QUASILINEAR FRACTIONAL SYSTEM

Qualitative theory of the equations of perturbed motion with a fractional derivative of the state vector has been developed in the last several years. These studies were initiated by the introduction of a fractional derivative for the Lyapunov function (Martynyuk, 2018). The development of this idea in a number of works has made it possible to create an analogue of the Lyapunov's theory of stability of motion for fractional systems of equations. This paper is devoted to the consideration of a class of quasilinear systems with a fractional derivative of the system state vector. For this type of equations, a new estimate of the Lyapunov functions over time on their solutions is obtained.

Keywords: *quasilinear system, fractional-like derivative, estimation of Lyapunov functions.*