Ф.А.Алиев[1], В.Б.Ларин[2]

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ СИЛЬВЕСТРА

[1]*Институт прикладной математики*
Бакинского государственного университета,
ул. Халилова, 23, АЗ 1148, Баку, Азербайджан; e-mail: f_aliev@yahoo.com;
[2]*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

Abstract. The system of constrained Sylvester type matrix equations are considered. These equations arise at use the Newton method for construction of solution of a nonsymmetric Riccati equations with constrains. A procedure of decomposition of the initial system of Sylvester type matrix equations is offered. It is shown that the suggested procedure of decomposition allows to find the solution of initial system using the standard procedures of MATLAB package. As an example, the efficiency of the algorithm basing on suggested procedure of decomposition is shown.

Key words: constrained system, Sylvester type matrix equations, nonsymmetric Riccati equations.

Введение.

Наряду с современными задачами, связанными с вопросами управления механическими системами (см., например [10 – 12], где есть дальнейшие ссылки), продолжают привлекать внимание исследователей и традиционные задачи управления, [1, 5, 7, 9, 13, 14, 16], в которых, в частности, рассматриваются системы матричных уравнений типа Сильвестра с ограничениями. В данной статье предложена процедура декомпозиции исходной системы уравнений Сильвестра. Показано, что эта процедура декомпозиции позволяет получить решение исходной системы, используя стандартные процедуры пакета MATLAB.

§1. Общие соотношения.

В [7] рассматривается уравнение Риккати

$$A_1 X + XA_2 - XBX + Q = 0 \tag{1.1}$$

при ограничении:

$$DX = 0\,, \tag{1.2}$$

а также система уравнений Риккати

$$\begin{aligned} &A_{11}X - YA_{12} - YB_1 X + Q_1 = 0;\\ &A_{12}X - YA_{22} - YB_2 X + Q_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

при ограничениях:

$$D_1 X = 0\,;\;\; D_2 Y = 0\,. \tag{1.4}$$

Существенно, что в отличие от традиционных уравнений Риккати [2], матрицы X, Y в (1.1) – (1.4) имеют размер $n \times m$. В [7] для нахождения решений уравнений (1.1) – (1.4) предлагается использовать метод Ньютона. Такой подход сводит задачу построения решений (1.1) – (1.4) к последовательному решению уравнений Сильвестра [3] с ограничениями, именно:

$$AX - XB = C\,; \quad DX = 0\,, \tag{1.5}$$

в случае уравнений (1.1), (1.2) (соотношение (2.1) в [7]). В случае уравнений (1.3), (1.4) (соотношение (3.2) в [7]):

$$\overline{A}_{11}X - Y\overline{A}_{12} = C_1\,; \quad \overline{A}_{21}X - Y\overline{A}_{22} = C_2\,; \tag{1.6}$$

$$D_1X = 0\,; \quad D_2Y = 0\,. \tag{1.7}$$

Ниже представлены алгоритмы построения решений уравнений (1.5) – (1.7).

§2. Уравнение (1.5).

В [4] приведено конечное выражение для матрицы X, которая удовлетворяет матричному уравнению (1.5).

Согласно [5] решение этого уравнения имеет вид

$$X = -\left(C_n + p_1C_{n-1} + \ldots + p_{n-1}C_1\right)\left[P_A(B)\right]^{-1}, \tag{2.1}$$

где $P_A(t)$ – характеристический полином матрицы A

$$P_A(t) = t^n + p_1t^{n-1} + \ldots + p_{n-1}t + p_n\,,$$

а матрицы C_n определяются так:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A^{n-k}CB^{k-1}\,. \tag{2.2}$$

Выражение (2.1) является следствием более общего соотношения, полученного в [15], а именно: если $\Pi(t) = t^n + \pi_1t^{n-1} + \ldots + \pi_{n-1}t + \pi_n$ есть некоторый полином, то решение уравнения (2.1) удовлетворяет следующему соотношению [15]:

$$\Pi(A)X - X\Pi(B) = C_n + \pi_1C_{n-1} + \ldots + \pi_{n-1}C\,. \tag{2.3}$$

Формулу (1.5) получаем, если $\Pi(t)$ в (2.3) выбрать равным $P_A(t)$.

Если в (2.3) в качестве полинома $\Pi(t)$ выбрать характеристический полином матрицы B

$$P_b(t) = t^m + q_1t^{m-1} + \cdots + q_{m-1}t + q_m\,,$$

то решение (1.5) будет удовлетворять следующему соотношению:

$$P_b(A)X = C_m + q_1C_{m-1} + \cdots + q_{m-1}C\,. \tag{2.4}$$

Фигурирующие в (2.4) матрицы C_ℓ $(\ell = 1:m)$ определяются соотношениями, аналогичными (2.2).

Пополнив (2.4) соотношением

$$DX = G\,, \tag{2.5}$$

получим систему уравнений, определяющих искомую матрицу X:

$$\begin{bmatrix} P_b(A) \\ D \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} C_q \\ G \end{bmatrix}; \quad C_q = C_m + q\ C_{m-1} + \cdots + q_{m-1}C\,. \tag{2.6}$$

Для решения системы (2.6) можно использовать различные алгоритмы, в частности, процедуру «\» пакета MATLAB.

Пример 1. Проиллюстрируем эффективность изложенного выше алгоритма на следующем примере. Пусть в (1.5) имеем

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix};\; C^T=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 & 8 & 5 & 0 & -7 & -16 & -27 \\ 76{,}5 & 60 & 45{,}5 & 33 & 22{,}5 & 14 & 7{,}5 & 3 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее верхний индекс T означает процедуру транспонирования.

Отметим, что матрицы A и B имеют одно общее собственное значение $\lambda = 4$, и, как следствие, матрица $P_b(A)$ имеет нулевую строку.

Матрицы D, G, фигурирующие в (2.5), имеют вид

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; G=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Точное значение $X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Фигурирующие в (2.4), (2.6) матрицы $P_b(A)$, C_q имеют вид:

$$P_b(A)=\begin{bmatrix} 42{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}5 \end{bmatrix};$$

$$C_q^T=\begin{bmatrix} 42{,}5 & 60 & 58{,}5 & 44 & 22{,}5 & 0 & -17{,}5 & -24 & -13{,}5 \\ 382{,}5 & 240 & 136{,}5 & 66 & 22{,}5 & 0 & -7{,}5 & -6 & -1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Погрешность полученного, согласно (2.6), значения X_* имеет порядок 10^{-15}

$$\|X - X_*\| = 5{,}65 \cdot 10^{-15}.$$

§3. Декомпозиция системы матричных уравнений (1.6) – (1.7).

Обобщим соотношение (1.6) – (1.7)

$$\overline{A}_{11}X - Y\overline{A}_{12} = C_1;\; \overline{A}_{21}X - Y\overline{A}_{22} = C_2; \tag{3.1}$$

$$D_1X = C_3\,;\;\; D_2Y = C_4\,. \tag{3.2}$$

Представим соотношения (3.1) следующим образом:

$$\alpha X + \bar{Y}\beta = \bar{C}\,;\;\; \alpha = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{21} \end{bmatrix};\;\; \beta = \begin{bmatrix} -\bar{A}_{12} \\ -\bar{A}_{22} \end{bmatrix};\;\; \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix};\;\; \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Определим матрицу N, удовлетворяющую следующему соотношению:

$$N\alpha = 0\,. \tag{3.4}$$

Отметим, что для определения матрицы N можно использовать процедуру null.m пакета MATLAB. Умножив (3.3) слева на матрицу N, которую представим в виде $N = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix}$, получим следующее уравнение для матрицы Y:

$$n_1Y\bar{A}_{12} + n_2Y\bar{A}_{22} = -\left(n_1C_1 + n_2C_2\right). \tag{3.5}$$

Таким образом, матрица Y определяется последним уравнением системы (3.2) и соотношением (3.5).

Определив из этих соотношений матрицу Y, матрицу X можно определить из следующих уравнений:

$$\bar{A}_{11}X = C_1 + Y\bar{A}_{12}\,;\;\; \bar{A}_{21}X = C_2 + Y\bar{A}_{22}\,;\;\; D_1X = C_3\,. \tag{3.6}$$

Для построения матрицы X, определяемой (3.6), можно использовать стандартную процедуру «\» пакета MATLAB.

Как будет показано ниже, для получения матрицы Y, определяемой (3.5) и уравнением $D_2Y = C_4$, могут быть использованы процедуры линейных матричных неравенств (ЛМН) [6, 8].

§4. Общие соотношения ЛМН.

Как отмечено в [6], (соотношения (2.2), (2.3)), матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0\,, \tag{4.1}$$

где матрицы $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$, $S(x)$ линейно зависят от x, эквивалентно следующим матричным неравенствам:

$$R(x) > 0\,;\;\; Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0\,. \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующее ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T \\ T^T & I \end{bmatrix} > 0\,;\quad Z = Z^T\,, \tag{4.3}$$

которое, согласно (4.1), (4.2), можно записать в виде $Z > TT^T$. Здесь и далее I – единичная матрица соответствующего размера.

Соотношения (4.1) – (4.3) позволяют рассмотреть следующую стандартную задачу ЛМН на собственные значения (соотношения (п.2.2.2 [6] (2.9)). А именно, задачу минимизации линейной функции cx (например, $cx = \mathrm{tr}(Z)$, где $\mathrm{tr}(Z)$ – след матрицы Z) при выполнении условий (4.3).

Соотношения (4.3) можно обобщить в виде следующей системы ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z_i & T_i \\ T_i^T & I \end{bmatrix} > 0\,,\;\; i = 1,\, 2,\, \dots\,,\, k\,;\;\; Z_i = Z_i^T\,,$$

которые можно представить в виде аналогичном (4.2):

$$Z_i > T_i T_i^T ,\ \ i = 1,\ 2,\ \dots ,\ k . \tag{4.4}$$

Применительно к (4.4), также можно рассматривать стандартную задачу ЛМН на собственные значения. А именно, задачу минимизации

$$cx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \operatorname{tr}(Z_i) \tag{4.5}$$

при выполнении условий (4.4) (в (4.5) α_i – весовые коэффициенты). Для решения этой задачи можно использовать процедуру mincx.m пакета MATLAB [8].

§5. Определение матрицы Y .

Итак, уравнение (3.4) и второе соотношение в системе (3.2) определяют матрицу Y **.** Используем приведенные в п. 4 соотношения для определения матрицы Y **.**

Рассмотрим матричные неравенства:

$$\begin{bmatrix} Z & T_1 \\ T_1^T & I \end{bmatrix} > 0\ ;\ \ T_1 = n_1 Y\overline{A}_{12} + n_2 Y\overline{A}_{22} + n_1 C_1 + n_2 C_2\ ; \tag{5.1}$$

$$\begin{bmatrix} Z & T_2 \\ T_2^T & I \end{bmatrix} > 0\ ;\ \ T_2 = D_2 Y - C_4 . \tag{5.2}$$

Как отмечено в п. 4, используя соотношения (5.1), (5.2), матрицу Y можно определить, минимизируя след матрицы Z , используя процедуру mincx.m пакета MATLAB. Далее, после определения матрицы Y , матрицу X можно получить из уравнения (3.6), используя стандартную процедуру «\» пакета MATLAB.

Проиллюстрируем описанную процедуру получения решения системы (3.1), (3.2) на следующем примере.

Пример 2. Матрицы, фигурирующие в (3.1), (3.2), имеют вид:

$$\overline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix};\ \ \overline{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \ \overline{A}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};\ \ \overline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \ D_2 = D_1\ ;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 22 & 23 \\ 34 & 31 \end{bmatrix};\ \ C_2 = \begin{bmatrix} 18 & 35 \\ 25 & 52 \\ 32 & 69 \end{bmatrix};\ \ C_3 = 0\ ;\ \ C_4 = 0\ .$$

Этим исходным данным соответствуют следующие (точные) значения матриц X, Y :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};\ \ Y_0 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Матрица N, фигурирующая в (3.4), имеет вид:

$$N = \begin{bmatrix} 0,8464 & -0,3854 & 0,0267 & 0,1556 & 0,2578 & 0,2090 \\ -0,1136 & 0,4135 & -0,1449 & 0,2786 & 0,8470 & -0,0112 \\ -0,3234 & -0,1267 & 0,2851 & 0,2785 & -0,0132 & 0,8487 \end{bmatrix},$$

соответственно, ее блоки (n_1, n_2) выглядят так:

$$n_1 = \begin{bmatrix} 0,8464 & -0,3854 & 0,0267 \\ -0,1136 & 0,4135 & -0,1449 \\ -0,3234 & -0,1267 & 0,2851 \end{bmatrix}; \; n_2 = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,2578 & 0,2090 \\ 0,2786 & 0,8470 & -0,0112 \\ 0,2785 & -0,0132 & 0,8487 \end{bmatrix}.$$

Используя алгоритм, описанный выше (п. 5), были определены значения матриц X, Y, которым соответствуют следующие погрешности:

$$\delta X = \|X - X_0\|_\infty = 7,77 \cdot 10^{-15}; \; \delta Y = \|Y - Y_0\|_\infty = 4,62 \cdot 10^{-14}.$$

Таким образом, можно констатировать достаточно высокую точность предлагаемого алгоритма решения системы (3.1), (3.2).

Заключение.

Рассмотрены системы матричных уравнений типа Сильвестра с ограничениями. Эти уравнения возникают при использовании метода Ньютона для построения решения несимметричных уравнений Риккати с ограничениями [7]. Предложена процедура декомпозиции исходной системы уравнений Сильвестра. Показано, что предложенная процедура декомпозиции позволяет получить решение исходной системы, используя стандартные процедуры пакета MATLAB. На примере показана эффективность алгоритма, базирующегося на предложенной процедуре декомпозиции.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто матричні рівняння типу Сільвестра з обмеженнями. Ці рівняння виникають при використанні методу Ньютона для побудови розв’язку несиметричних рівнянь Ріккаті з обмеженнями. Запропоновано процедуру декомпозиції вихідної системи рівнянь Сільвестра. Показано, що запропонована процедура декомпозиції дозволяє отримати розв’язок початкової системи, використовуючи стандартні процедури пакета MATLAB. На числовому прикладі показана ефективність алгоритму, що базується на запропонованій процедурі декомпозиції.

1. *Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V.* Controllability of process described by linear system of ordinary differential equations // TWMS J. Pure and Appl. Math. – 2017. – **8**, N 2. – P. 170 – 185.
2. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of linear control systems: analytical methods and computational algorithms. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher, 1998. – 261 p.
3. *Aliev F.A., Larin V.B.* On the construction of general solution of the generalized Sylvester equation // TWMS J. of Applied and Engineering Mathematics. – 2017. – 7, N 1. – P. 1 – 6.
4. *Aliev F.A., Larin V.B.* A note about the solution of constrained matrix Sylvester equation // TWMS J.Pure Appl.Math. – 2017. – **8**, N 2. – P.251 – 255.
5. *Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Gasimova K.G.* On periodic solution of generalized Sylvester matrix equations // Appl. Comput. Math. – 2017. – **16**, N 1. – P. 78 – 84.
6. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.
7. *Fan H.-Y., Chu E.K.* Projected nonsymmetric algebraic Riccati equations and refining estimates of invariant and deflating subspaces // Comput. Appl. Math. – 2017. – **315**. – P. 70 – 86.

8. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI Control Toolbox: User's Guide. – Natick, MA: The Math. Works, Inc. – 1995. – 320 p.
9. *Jbilou K.* A survey of Krylov-based methods for model reduction in large-scale MIMO dynamical systems // Appl. Comput. Math. – 2016. – **15**, N 2. – P. 117 –148.
10. *Larin V.B.* Correcting the Parameters of Undamped Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53,** N 1. – P. 111 – 115.
11. *Larin V.B*. On Control of a Wheeled Transport Robot with Two Steering Wheels // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 140 – 144.
12. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Problem of Synthesis of Control System for Quadrocopter // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 342 – 348.
13. *Mahmudov N.I.* Finite-approximate controllability of evolution equations // Appl. Comput. Math. – 2017. – **16**, N 2. – P.159 – 167.
14. *Mahmudov N.I., Mckibben M.A.* On approximately controllable system (survey) // Appl. Comput. Math. – 2016. – **15**, N 3. – P. 247 – 264.
15. *Shestopal V.E.* Solving the matrix equation $AX - XB = C$ // Mat. Zametki. – 1975. – **19**, N 3. – P. 449 – 451.
16. *Yari A.A., Mirnia M.K., Lakestani M.* Investigation of optimal control problems and solving them using Bezier polynomials // Appl. Comput. Math. – 2017. – **16**, N 2. – P.133 – 147.

Поступила 23.10.2017 Утверждена в печать 22.05.2018