

В. П. Легеца

### ДИНАМИКА ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ С ШАРОВЫМ ГАСИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

*Национальный технический университет Украины «КПИ»,  
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: Viktor.Legeza@gmail.com*

**Abstract.** The forced oscillations are considered for a damping mechanical system of coupled solids «ball vibration absorber (BVA) with linearly viscous resistance – a movable carrier body» under action of external harmonic excitation are considered. On the basis of Appell's formalism, the dynamic equations are formulated and solved numerically for a joint motion of heavy ball without sliding in the spherical cavity of a carrier body. An amplitude-frequency characteristic of the damping mechanical system and the curves of dependences of the maximum amplitude of oscillations of the carrier body on the values of the spherical cavity radius and coefficient of viscous resistance of BVA are obtained. The conditions and restrictions on the rolling of heavy ball in the absorber spherical cavity without sliding are determined.

**Key words:** damping mechanical system, carrier body, working body, external harmonic excitation, ball vibration absorber, Appell's formalism, amplitude-frequency characteristic.

#### §1. Современное состояние проблемы и предложения по ее решению.

В процессе эксплуатации несущих объектов (таких, как строительные здания и сооружения, промышленные и транспортные машины и механизмы, вантовые мосты, мощные линии электропередач и т.п.) часто возникают вынужденные колебания их отдельных элементов или самих объектов в целом. Следствием этого являются дополнительные динамические нагрузки и воздействия на указанные несущие объекты и их элементы, борьба с которыми превращается в большую техническую проблему.

Природа возникновения вынужденных колебаний разнообразна. Например, к такому можно отнести ветровые, сейсмические, промышленные, гидродинамические, транспортные и иные силовые или кинематические воздействия. Вынужденные колебания способны нарушить нормальные условия функционирования элементов механических систем, а связанные с ними вибрационные динамические нагрузки создают прямую угрозу их прочности, надежности и устойчивости.

Для подавления вынужденных колебаний гибких и протяженных объектов, используют разнообразные динамические гасители колебаний [1 – 9, 14, 17, 19 – 21, 23 – 25]. Конструктивно существующие виброгасители можно разделить на три основные группы: пружинные, маятниковые, ударные [1 – 9, 22, 25]. Однако их динамическое поведение и корректное применение в составе виброзащитных систем четко регламентируется соответствующими нормативными документами только в определенных диапазонах частот несущих объектов [1, 2, 8].

По своим динамическим характеристикам и функциональному назначению значительное число указанных выше протяженных крупногабаритных объектов имеют собственные частоты основного тона, которые находятся в диапазоне от 12 рад/с до 3,0

рад/с и ниже. Например, это касается современных высотных сооружений типа телебашен. При этом конструктивные решения гасителей существенно зависят от уровня собственных частот основного тона колебаний несущих объектов. В зависимости от их величины гасители могут быть разделены на три основные группы с такими диапазонами частот [1, 2, 8]:

высокочастотный диапазон: 5 – 12 рад/с;

среднечастотный диапазон: 3 – 5 рад/с;

низкочастотный диапазон: ниже 3 рад/с.

Пружинные гасители обычно применяют для виброзащиты объектов в среднечастотном и высокочастотном диапазонах с малыми амплитудами колебаний, поэтому в условиях низких частот (до 3,0 рад/с) и больших амплитуд (1–3 м) их использовать физически невозможно [1, 2, 6, 8].

Приемлемые гасители для средних частот – это упомянутые выше маятниковые гасители. При частотах выше 5 рад/с на маятниковых гасителях необходимо дополнительно устанавливать упругие элементы.

Использование маятниковых гасителей полностью определяется длиной подвеса рабочего тела маятника [1, 2, 8, 25]. При малых собственных частотах длина подвеса их рабочих тел значительно увеличивается, а амплитуда колебаний может превышать поперечные размеры самого несущего объекта. С другой стороны, как правило, рабочее пространство для размещения, крепления и функционирования гасителя ограничено как по вертикали, так и по горизонтали, поэтому значительные габариты маятниковых гасителей исключают возможность их использования для виброзащиты несущих объектов в низкочастотном диапазоне.

Ударные гасители на указанных объектах (например, на телебашнях или радиомачтах) вообще применять не рекомендуется по причине присутствия на них обслуживающего персонала и наличия точной аппаратуры и приемо-передающего оборудования [1, 2, 8].

Таким образом, для решения проблемы виброзащиты объектов в низкочастотном диапазоне следует искать принципиально новые конструктивные решения гасителей, которые позволят значительно уменьшить их габариты при сохранении того же маятникового характера их функционирования [8, 14, 19 – 21].

Вместе с тем условия эксплуатации гасителей характеризуются тем, что их конструкции не могут находиться под постоянным наблюдением. В этой связи они должны быть функционально простыми и устойчивыми к внешнему воздействию атмосферных явлений, превращаясь в постоянный рабочий элемент несущего объекта (например, высотного сооружения).

В последнее время получили развитие альтернативные конструкции динамических гасителей, при функционировании которых используются другие принципы подавления вынужденных колебаний. Они основаны на обеспечении больших взаимных перемещений несущих и несомых (рабочих) тел в различных направлениях. Для реализации таких перемещений наиболее удачными оказались механические системы с качением без скольжения одних твердых тел по **подвижным** поверхностям других тел (так называемые **катково-демпфирующие системы**). Автор был одним из первых, кто обратил внимание на возможность использования таких систем для амортизации ударов на транспорте и виброподавления вынужденных колебаний несущих тел [10 – 13]. При этом в таких системах с качением колебательные движения твердых тел ограничены кинематическими связями. Аналитический учет этих связей требует новых подходов и методов для построения и исследования математических моделей, которые корректно описывали бы динамические процессы подавления вынужденных колебаний несущих тел.

В области динамики связанных твердых тел ранее рассматривались неголономные задачи, в которых исследовались динамические эффекты, связанные с собственным движением тяжелых шаров и цилиндров по неподвижным алгебраическим поверхностям второго порядка [16, 18], а также динамическое поведение других механических

систем, ограниченных неголономными связями [15]. Однако влияние колебательных движений тяжелых шаров и цилиндров (как рабочих тел гасителей или их элементов) на подвижные несущие тела и связанные с таким движением динамические эффекты подавления колебаний до последнего времени совсем не рассматривались.

В этой связи отметим несколько работ [14, 17, 19 – 21, 23, 24], направленных на исследование динамики систем виброзащиты несущих тел с шаровым гасителем вынужденных колебаний (Ball Vibration Absorber – BVA). Эффект подавления вынужденных колебаний несущего объекта с использованием BVA заключается в перекатывании тяжелого шара без скольжения в сферической выемке с постоянным радиусом  $R$ , выложенной специальным гибким материалом с высоким коэффициентом трения. Одновременно этот гибкий материал играет роль нерегулируемого фрикционно-демпфирующего устройства для подавления колебаний тяжелого шара в выемке. При этом движение шара при надлежащей настройке должно происходить в противофазе по отношению к движению несущего тела. Шар имеет радиус  $r$ , меньший, чем радиус  $R$  сферической выемки BVA, и представляет собой рабочее тело BVA с относительно большой массой. Разница  $\bar{R} = R - r$  между этими радиусами представляет собою основной регулирующий параметр собственной частоты  $\omega_{abs}$  шарового гасителя, которая при малых колебаниях шара в выемке определяется формулой:  $\omega_{abs} = \sqrt{g / 1,4\bar{R}}$ . Поэтому для несущих объектов с собственной частотой из диапазона  $0 \leq \omega \leq 3,0$  рад/с необходимо, чтобы величина параметра  $\bar{R}$  BVA удовлетворяла неравенству:  $\bar{R} \geq 0,78$  м.

Основным конструктивным недостатком BVA-гасителей является неизохронность колебаний рабочего тела (шара) в сферической выемке. А именно при низких частотах (до  $\omega \leq 3,0$  рад/с) несущего тела и больших относительных перемещениях (1,0 – 3,0 м) рабочего тела BVA это существенно сказывается на качестве его функционирования. Вместе с тем при малых относительных перемещениях рабочего тела BVA вполне может работать в нормальном режиме виброзащиты несущих объектов. Кроме того, имеется еще один конструктивный недостаток BVA-гасителей. Он состоит в том, что гибкий материал, которым выложена сферическая выемка, со временем теряет свои фрикционно-демпфирующие свойства и гаситель перестает функционировать как демпфер.

Что касается сути исследований [14, 17, 19 – 21, 23, 24], то в них есть одно существенное упущение: в них отсутствуют условия и ограничения на «чистое» перекатывание шара в сферической выемке гасителя, а также не изучена возможность отрыва шара от сферической поверхности выемки. А ведь эти условия являются важной теоретической основой физической реализуемости и обоснованием адекватного функционирования таких гасителей. Кроме этого, в них не предложена методика определения оптимальных параметров настройки BVA-гасителя.

Таким образом, отсутствие соответствующих теоретических основ для обоснования динамического поведения виброзащитных систем с катково-демпфирующими устройствами (с учетом специфики их движения) сдерживает их широкое внедрение в современную практику виброзащиты несущих объектов. В то же самое время экспериментальные исследования динамического поведения катковых механизмов в составе виброзащитных систем, применяемых в судостроении, транспортном машиностроении, в сейсмостойком строительстве доказали их высокую эффективность.

Ниже рассмотрен простейший тип виброзащитной системы, в составе которой используется шаровой гаситель с регулируемым линейно-вязким сопротивлением. Динамическая задача такого класса относится к классу задач неголономной механики. Поэтому для построения уравнений движения исследуемой виброзащитной системы использовался специальный методический подход, основанный на формализме Аппеля [16, 18].

Данная работа является продолжением исследований автора в связи с созданием нового класса катково-демпфирующих систем (см. [10 – 13]).

## §2. Постановка задачи и цели работы.

Рассмотрим динамику виброзащитной механической системы двух связанных твердых тел – «шаровой гаситель с вязким сопротивлением – подвижное несущее тело», которая находится под действием внешнего периодического возбуждения. Схема, принятая для моделирования динамического поведения виброзащитной системы с шаровым гасителем, показана на рис.2.1. Введем две системы координат: одну неподвижную  $OXYZ$  и другую подвижную  $O_1X_1Y_1Z_1$ , связанную с несущим телом.

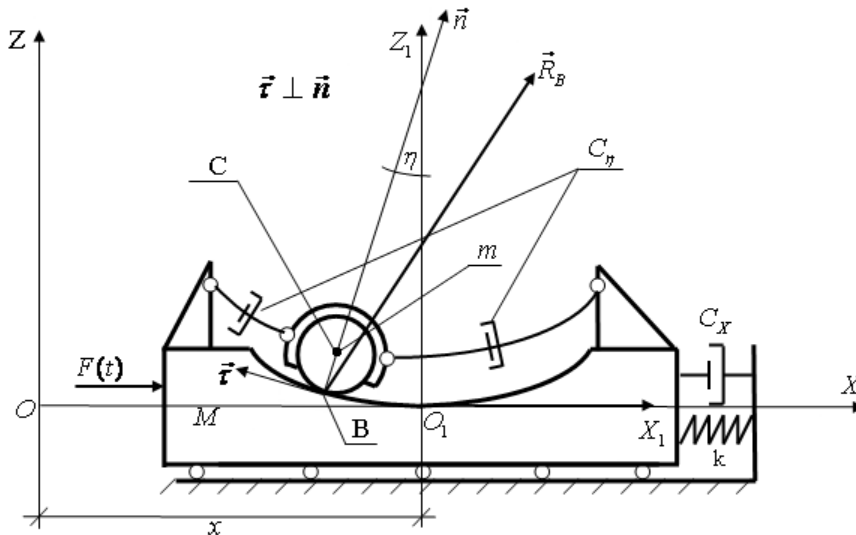


Рис. 2.1

Эффект виброзащиты BVA-гасителей основан на перекачивании рабочего тела в форме тяжелого шара массой  $m$  и радиусом  $r$  без скольжения в полости со сферической выемкой радиуса  $R$ . Последняя жестко соединена с несущим телом и вместе с ним имеет возможность перемещаться горизонтально вдоль оси  $OX$ . Этому движению препятствует система упругих элементов с эквивалентным коэффициентом жесткости  $k$  и вязких демпферов с коэффициентом вязкого сопротивления  $C_x$ .

Тяжелый шар с помощью невесомой сферической обоймы соединен с несущим телом системой регулируемых воздушных демпферов. С одной стороны, штоки воздушных демпферов шарнирно связаны со сферической обоймой тяжелого шара, а с другой стороны – с несущим телом. Указанная сферическая обойма без трения взаимодействует с тяжелым шаром. Эта пара создает сферический шарнир, работающий в любом горизонтальном направлении, передавая силы взаимодействия воздушным демпферам, которые, в свою очередь, передают их несущему телу и наоборот.

В процессе моделирования демпферы, работающие в одном продольном направлении, заменяются одним демпфером с эквивалентным коэффициентом вязкого сопротивления  $C_η$ . Модуль силы сопротивления такого эквивалентного демпфера определяется линейной функцией относительной скорости центра масс шара  $F_η = C_η \cdot \bar{R} \cdot \dot{\eta}$  и эта сила направлена по вектору последней. Один из возможных вариантов реализации такого взаимодействия шара и воздушных демпферов показан на рис. 2.1.

На несущее тело действует внешнее силовое возмущение, которое описывается гармонической функцией со стабильной несущей частотой  $\omega$ , т.е.

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (2.1)$$

Данная конструкция BVA-гасителя отличается от известных тем, что в ней возможно регулирование уровня демпфирования рабочего тела гасителя.

**Цели работы:** 1) построение математической модели процесса виброподавления вынужденных колебаний несущего тела с использованием шарового гасителя;

2) определение условий и ограничений на «чистое» перекачивание шара в сферической выемке гасителя, которые обосновывают возможность физического применения таких катково-демпфирующих систем в качестве виброгасителей;

3) оценка эффективности функционирования предложенного гасителя.

Перейдем к формулировке геометрических и кинематических соотношений, которые используются в дальнейших преобразованиях.

### §3. Геометрические и кинематические соотношения.

Обозначим через  $\vec{n}$  единичный вектор внутренней единичной нормали, проведенной в точке  $B$  – точке контакта однородного шара и сферической выемки. Введем две независимые обобщенные координаты для исследуемой двухмассовой системы:  $x$  – перемещение центра масс несущего тела  $M$  вдоль горизонтальной оси  $OX$ ;  $\eta$  – угол отклонения внутренней единичной нормали  $\vec{n}$  от орта  $\vec{k}$  вертикальной оси  $OZ_1$  ( $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$ ).

Координаты единичного вектора внутренней нормали  $\vec{n}$  выразим с помощью угла  $\eta$  ее отклонения от вертикали  $OZ_1$  (рис. 2.1):

$$\vec{n} = (\sin(\eta); 0; \cos(\eta)). \quad (3.1)$$

Запишем векторное кинематическое уравнение, которое следует из условия непроскальзывания шара относительно сферической поверхности выемки:

$$\vec{V}_C = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{\varphi} \cdot \vec{j} \times r \cdot \vec{n}, \quad (3.2)$$

где  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость шара относительно своего центра масс  $C$ ;  $r$  – радиус шара;  $\vec{V}_C$  – абсолютная линейная скорость центра масс  $C$  шара,  $\vec{V}_C = (\dot{x}_C; 0; \dot{z}_C)$ ;  $R$  – радиус сферической поверхности выемки;  $\vec{i}$  – орт оси  $OX$  (рис. 2.1);  $\vec{j}$  – орт оси  $OY$ , которая направлена «за плоскость рисунка» перпендикулярно осям  $OX$  и  $OZ$  и на рис. 2.1 не показана; при этом векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , взятые в такой последовательности, составляют правую тройку векторов.

Перепишем уравнение (3.2) в скалярном виде с учетом введенных обобщенных координат, формулы (3.1) и того факта, что  $\dot{\varphi} \cdot r = \dot{\eta} \cdot \bar{R}$ , де  $\bar{R} = R - r$ . Это следует из условия непроскальзывания шара с центром масс в точке  $C$  относительно подвижной сферической выемки в точке  $B$ . Здесь следует подчеркнуть, что векторы  $\dot{\varphi} \cdot \vec{j}$  и  $\dot{\eta} \cdot \vec{j}$  направлены в противоположные стороны, поэтому угловые скорости  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\eta}$  имеют разные знаки:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} - \bar{R} \cdot \cos(\eta) \cdot \dot{\eta}; \\ \dot{z}_C = \bar{R} \cdot \sin(\eta) \cdot \dot{\eta}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Перейдем к выводу уравнений движения исследуемой виброзащитной системы. Для этого используем формализм Аппеля для неголономных систем [16, 18].

### §4. Построение уравнений движения виброзащитной системы.

Запишем в общем виде функцию  $S$  – энергию ускорений всех масс системы [16, 18]:

$$S = \frac{M \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m \cdot (\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2)}{2} + \frac{J \cdot \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (4.1)$$

где  $J = 0,4 \cdot m \cdot r^2$ ;  $|\dot{\varphi}| = \frac{\bar{R}}{r} \cdot |\dot{\eta}|$ .

С учетом (3.3) определим все вторые производные, которые входят в выражение (4.1):

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} - \bar{R} \cdot (\dot{\eta} \cdot \cos(\eta) - \dot{\eta}^2 \cdot \sin(\eta)), \quad (4.2)$$

$$\ddot{z}_C = \bar{R} \cdot (\dot{\eta} \cdot \sin(\eta) + \dot{\eta}^2 \cdot \cos(\eta)). \quad (4.3)$$

Подставим полученные выражения (4.2) и (4.3) в (4.1) и учтем только те члены функции ускорений  $S$ , которые зависят от вторых производных обобщенных координат  $x$  и  $\eta$ . Полученную таким образом функцию обозначим  $S^*$ :

$$S^* = \frac{M+m}{2} \cdot \ddot{x}^2 + 0,7 \cdot m \cdot \bar{R}^2 \cdot \dot{\eta}^2 + m \cdot \bar{R} \cdot \ddot{x} \cdot (\dot{\eta}^2 \cdot \sin(\eta) - \dot{\eta} \cdot \cos(\eta)). \quad (4.4)$$

Запишем уравнения Лагранжа в общем виде:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{x}} = P_x; \quad \frac{\partial S^*}{\partial \dot{\eta}} = P_\eta. \quad (4.5)$$

Определим правые части  $P_x, P_\eta$  уравнений (4.5), отнесенные к независимым обобщенным координатам  $x$  и  $\eta$ . Для этого запишем выражения для суммы элементарных работ  $\delta A$ , заметив, что механическая система перемещается под действием следующих силовых факторов:

1) силы тяжести, которая действует на тяжелый шар:  $\vec{P}_{ball} = -mg\vec{k}$ ;

2) вязкого сопротивления, модуль вектора которого равен  $F_\eta = C_\eta \cdot \bar{R} \cdot \dot{\eta}$  и которое действует на тяжелый шар в направлении, противоположном вектору  $\vec{V}_C - \vec{V}_M$ , где  $\vec{V}_M$  – вектор линейной скорости центра масс несущего тела,  $\vec{V}_M = \dot{x}\vec{i}$ , и  $\vec{V}_C$  – вектор линейной скорости центра масс  $C$  тяжелого шара;

3) силы упругости  $\vec{F}_{sp} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$ , которая действует на несущее тело;

4) вязкого сопротивления  $\vec{F}_x = -C_x \cdot \dot{x} \cdot \vec{i}$ , которое действует на несущее тело;

Соотношения для моделирования сил упругости и вязкого сопротивления, которые представлены выше в п.3) и 4), приняты в соответствии с нормативными документами строительной отрасли относительно высотных сооружений [1, 2, 8].

5) внешнего периодического возмущения, действующего горизонтально на несущее тело; его модуль определяется функцией  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

В этой задаче работа реакции кинематической связи в точке  $B$  равна нулю, так как виртуальное перемещение этой точки равно нулю из-за отсутствия проскальзывания. Поэтому выражение  $\delta A$  имеет вид

$$\delta A = (F(t) - k \cdot x - C_x \cdot \dot{x}) \cdot \delta x - C_\eta \cdot \bar{R}^2 \cdot \dot{\eta} \cdot \delta \eta - m \cdot g \cdot \delta z_C. \quad (4.6)$$

С учетом соотношения (3.3) выражение (4.6) в вариациях обобщенных координат приобретает следующий вид:

$$\delta A = (F(t) - k \cdot x - C_x \cdot \dot{x}) \cdot \delta x - C_\eta \cdot \bar{R}^2 \cdot \dot{\eta} \cdot \delta \eta - m \cdot g \cdot \bar{R} \cdot \sin(\eta) \cdot \delta \eta. \quad (4.7)$$

С другой стороны, выражение для суммы элементарных работ  $\delta A$  через обобщенные силы  $P_x$  и  $P_\eta$ , отнесенные к независимым обобщенным координатам  $x$  и  $\eta$ , запишем таким образом:

$$\delta A = P_x \cdot \delta x + P_\eta \cdot \delta \eta. \quad (4.8)$$

Используя соотношения (4.7) и (4.8), получим выражения для  $P_x$  и  $P_\eta$ :

$$P_x = F(t) - k \cdot x - C_x \cdot \dot{x}; \quad (4.9)$$

$$P_\eta = -C_\eta \cdot \bar{R}^2 \cdot \dot{\eta} - m \cdot g \cdot \bar{R} \cdot \sin(\eta). \quad (4.10)$$

Продифференцируем выражение (4.4) в соответствии с уравнениями (4.5) и учтем соотношения (4.9) и (4.10) в правых частях уравнений (4.5). В результате после некоторых преобразований получим следующие уравнения движения исследуемой механической системы в обобщенных координатах  $x$  и  $\eta$ :

$$(m + M) \cdot \ddot{x} + k \cdot x + C_x \cdot \dot{x} + m \cdot \bar{R} \cdot (\dot{\eta}^2 \cdot \sin(\eta) - \ddot{\eta} \cdot \cos(\eta)) = F(t); \quad (4.11)$$

$$\cos(\eta) \cdot \ddot{x} - 1,4 \cdot \bar{R} \cdot \ddot{\eta} = \frac{C_\eta}{m} \cdot \bar{R} \dot{\eta} + g \cdot \sin(\eta). \quad (4.12)$$

Разделим на  $M$  первое уравнение системы (4.11) – (4.12). Запишем окончательную систему нелинейных дифференциальных уравнений движения виброзащитной системы в новых обозначениях, на основе которой будем проводить дальнейшие исследования:

$$(1 + \nu) \ddot{x} + 2n_x \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x + \nu \cdot \bar{R} \cdot (\sin(\eta) \cdot \dot{\eta}^2 - \cos(\eta) \ddot{\eta}) = \bar{F}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t);, \quad (4.13)$$

$$\cos(\eta) \cdot \ddot{x} = 1,4 \cdot \bar{R} \cdot \ddot{\eta} + 2n_\eta \cdot \bar{R} \dot{\eta} + g \cdot \sin(\eta), \quad (4.14)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ ;  $2n_x = \frac{C_x}{M}$ ;  $2n_\eta = \frac{C_\eta}{m}$ ;  $\bar{F}_0 = \frac{F_0}{M}$ ;  $\nu = \frac{m}{M}$ .

### §5. Численно-графический метод определения оптимальных параметров настройки BVA-гасителей (линейная модель).

После линеаризации дифференциальных уравнений (4.13) – (4.14) с использованием известных методов было получено уравнение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $A = A(\omega)$  [5, 8, 22] в явной форме для задачи в линейной постановке (здесь промежуточные выкладки не приводим):

$$A(\omega) = \bar{F}_0 \sqrt{\frac{F_7(\omega)}{F_8(\omega) + F_9(\omega) + F_{10}(\omega)}}, \quad (5.1)$$

где

$$F_1(\omega) = 2n_x \omega; F_2(\omega) = g - 1,4 \bar{R} \omega^2; F_3(\omega) = 2n_\eta \bar{R} \omega; F_5(\omega) = \nu \bar{R} \omega^4;$$

$$F_{10}(\omega) = F_5^2(\omega); F_4(\omega) = F_1(\omega) F_3(\omega) - F_2(\omega) \Omega(\omega); F_6(\omega) = \Omega^2(\omega) + F_1^2(\omega);$$

$$F_7(\omega) = F_2^2(\omega) + F_3^2(\omega); F_8(\omega) = F_6(\omega) F_7(\omega); F_9(\omega) = 2F_4(\omega) F_5(\omega);$$

$$\Omega(\omega) = \omega_0^2 - (1 + \nu) \omega^2.$$

Кратко изложим суть численно-графического метода определения оптимальных параметров настройки BVA-гасителей. В его основе лежит принцип «**равенства двух максимумов**» АЧХ [5, 6, 8, 22], которые достигаются на двух основных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , расположенных в окрестности собственной частоты  $\omega_0$  несущего тела с приведенной массой  $M$ . При оптимальной настройке гасителя график АЧХ системы должен иметь вид, симметричный относительно частоты  $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2) / 2$  с двумя равными по амплитуде максимумами на двух указанных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При этом один

из максимумов кривой  $A = A(\omega)$  отвечает приведенной массе  $M$  несущего тела, а другой – массе  $m$  рабочего тела гасителя.

В качестве параметров настройки BVA-гасителя выбраны: геометрическая характеристика  $\bar{R} = R - r$  и коэффициент демпфирования  $n_\eta$  его рабочего тела. Величину массового параметра  $\nu = m/M$  гасителя принимаем заданной и равной  $\nu = 0,05$ .

Численная реализация была проведена для конкретной виброзащитной системы со следующими параметрами:  $n_x = 0,03 \text{ с}^{-1}$ ;  $\bar{F}_0 = 0,03g$ ;  $\nu = 0,05$ ;  $\omega_0 = 1,3 \text{ рад/с}$ ;  $\bar{R}_{\text{opt}} = 4,559 \text{ м}$ .

Результат определения оптимальной величины параметра  $\bar{R}$  гасителя с использованием численно-графического метода приведен на графике (рис. 5.1)

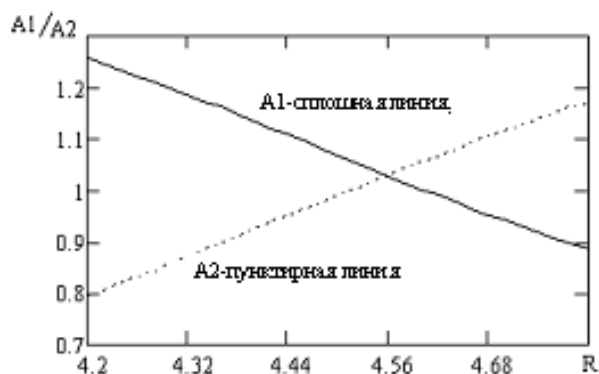


Рис. 5.1

Вначале определим частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , на которых достигаются два максимума АЧХ [5, 8, 22]:

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{1+\nu} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\nu}{2+\nu}} \right) \quad (\gamma_{1,2} = \omega_{1,2} / \omega_0). \quad (5.2)$$

Далее графически определяем точку пересечения фрагментов кривых  $A_1$  и  $A_2$ , построенных для двух фиксированных частот ( $\omega_1 = 1,1654 \text{ рад/с}$  и  $\omega_2 = 1,3641 \text{ рад/с}$ ) при изменении параметра  $\bar{R}$  гасителя, на которых функция  $A = A(\omega)$  достигает двух равных максимумов. Значение  $\bar{R}$ , при котором имеет место такое пересечение, определяет оптимальную величину параметра гасителя ( $\bar{R} = 4,559 \text{ м}$ ).

Перейдем к определению оптимальной величины коэффициента демпфирования  $n_\eta$  с использованием предложенного графического метода. Используем те же частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , на которых достигаются два максимума АЧХ, и величину определенного выше частотного параметра гасителя ( $\bar{R}_{\text{opt}} = 4,559 \text{ м}$ ). На графике (рис. 5.2) показаны фрагменты кривых  $A_1$  и  $A_2$ , построенных для двух фиксированных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при изменении коэффициента демпфирования  $n_\eta$  рабочего тела гасителя ( $n_\eta = 0,18 \text{ с}^{-1}$ ).

Как видим, пересечение кривых  $A_1$  и  $A_2$  достигается в двух местах – при большей и меньшей амплитудах. Выбираем точку пересечения с меньшей амплитудой, при этом искомый коэффициент демпфирования будет иметь величину  $n_\eta = 0,18 \text{ с}^{-1}$ .



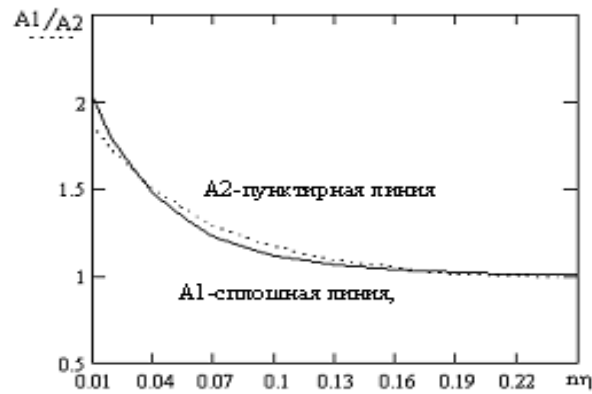


Рис. 5.2

Теперь построим результирующий график АЧХ (рис. 5.3) для виброзащитной системы с оптимальными параметрами гасителя ( $\bar{R}_{opt} = 4,559$  м и  $n_{\eta} = 0,18$  с<sup>-1</sup>). На графике АЧХ хорошо видно, что он имеет два равных максимума амплитуды несущего тела, каждый из которых равен  $A_{max} = 1,03$  м.

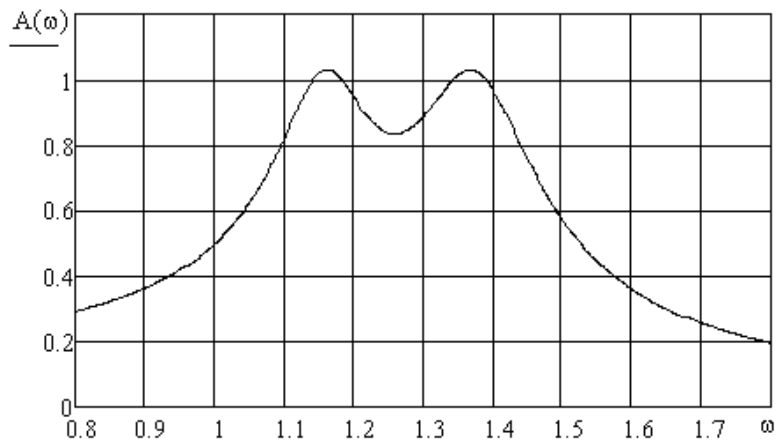


Рис. 5.3

Для сравнения приведем график АЧХ механической системы без гасителя, т.е. для случая, когда масса рабочего тела (шара) равняется нулю (рис. 5.4). В этом случае максимальная амплитуда достигает величины  $A_{max} = 3,774$  м.

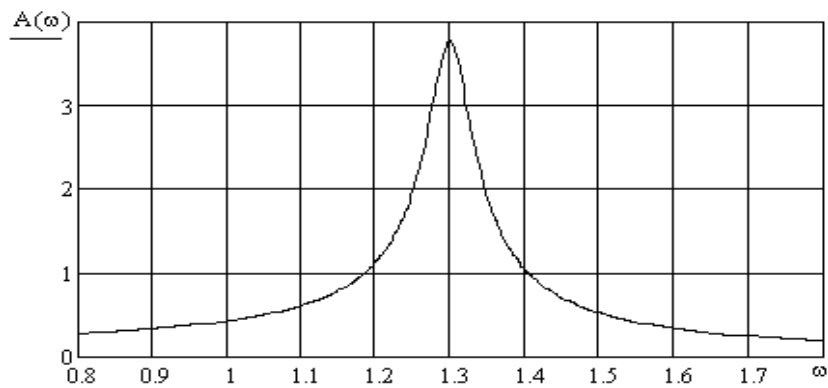


Рис. 5.4

Сравнивая максимальные амплитуды на двух графиках (5.3 и 5.4), убеждаемся в значительном снижении уровня амплитуд вынужденных колебаний несущего тела при условии оптимальной настройки гасителей такого типа.

Результаты, полученные выше, имеют силу при условии реализации качения тяжелого шара в сферической выемке без скольжения. Поэтому важной составной задачей настоящего исследования является определение условий обеспечения и реализации чистого качения шара в выемке несущего тела.

### §6. Условия реализации качения шара в сферической выемке несущего тела без скольжения. Условия отрыва шара относительно сферической выемки.

Запишем векторное уравнение движения тяжелого шара, в которое входит реакция кинематической связи  $\vec{R}_B$  (рис. 2.1):

$$m\vec{V}_\eta = \vec{R}_B - mg\vec{k} - C_\eta(\vec{V}_\eta - \vec{V}_M), \quad (6.1)$$

где  $\vec{V}_\eta$  – линейная скорость ЦМ тяжелого шара;  $\vec{V}_M$  – линейная скорость ЦМ несущего тела.

Определим из (6.1) проекции реакции связи  $\vec{R}_B$  на координатные оси  $OX$  и  $OZ$ , соответственно:

$$R_B^X = m[\ddot{x} - \bar{R}(\ddot{\eta} \cos \eta - \dot{\eta}^2 \sin \eta)] - C_\eta \bar{R} \dot{\eta} \cos \eta; \quad (6.2)$$

$$R_B^Z = mg + m\bar{R}(\ddot{\eta} \sin \eta + \dot{\eta}^2 \cos \eta) + C_\eta \bar{R} \dot{\eta} \sin \eta. \quad (6.3)$$

С использованием соотношений (6.2) и (6.3) определим проекции реакции  $\vec{R}_B$  на нормаль  $\vec{n}$  и касательную  $\vec{\tau}$  к сферической поверхности выемки несущего тела (рис. 2.1). После некоторых преобразований получим:

$$R_B^N = (\vec{R}_B \cdot \vec{n}) = m(g \cos \eta + \ddot{x} \sin \eta + \bar{R} \dot{\eta}^2); \quad (6.4)$$

$$R_B^\tau = (\vec{R}_B \cdot \vec{\tau}) = |\vec{R}_B - R_B^N \cdot \vec{n}| = m(g \sin \eta - \ddot{x} \cos \eta + \bar{R} \ddot{\eta}) + C_\eta \bar{R} \dot{\eta}. \quad (6.5)$$

Теперь запишем условие качения шара относительно сферической поверхности без скольжения:

$$R_B^\tau < \mu R_B^N. \quad (6.6)$$

Подставим выражения (6.4) и (6.5) в неравенство (6.6) с учетом уравнения (4.14). В результате получим основную формулу для определения минимально необходимого коэффициента сухого трения скольжения, при котором обеспечивается чистое качение шара:

$$\mu > \frac{|0, 4\dot{\eta} \cos \eta|}{\left| \frac{g}{\bar{R}} + 1, 4\ddot{\eta} \sin \eta + 2n_\eta \dot{\eta} \sin \eta + \dot{\eta}^2 \cos \eta \right|}. \quad (6.7)$$

Для численного эксперимента по определению минимально необходимого коэффициента сухого трения выберем конкретную систему с параметрами из §5.

На рис. 6.1 представлен график зависимости  $\mu = \mu(T)$  величины коэффициента сухого трения скольжения от времени  $T$  (с) полученный на фиксированной частоте  $\omega_2 = 1,3641$  рад/с вынужденных колебаний. В этом случае величина коэффициента трения, обеспечивающая чистое качение шара, равна  $\mu = 0,296$ .

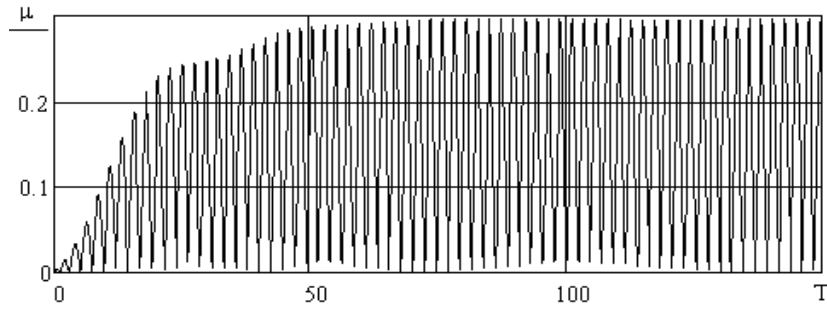


Рис. 6.1

Ниже на рис. 6.2 приведен график зависимости  $\mu = \mu(\omega)$  величины коэффициента сухого трения скольжения от частоты  $\omega$  вынужденных колебаний виброзащитной системы. Он построен для максимальных коэффициентов трения, которые были определены на каждой фиксированной частоте  $\omega$  в «резонансном» диапазоне  $1.1 \leq \omega \leq 1.4$  по аналогичным графикам, показанным на рис. 6.1.

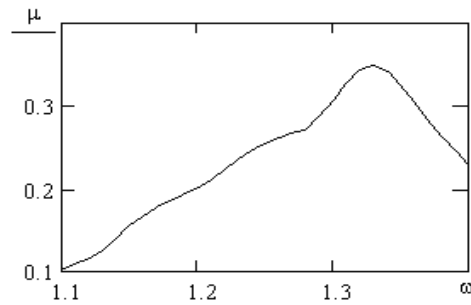


Рис. 6.2

Численный эксперимент показал, что минимальная величина коэффициента сухого трения скольжения, обеспечивающая «чистое» качение шара в сферической выемке, для выбранной системы должна удовлетворять неравенству:  $\mu \geq 0,35$  (рис. 6.2).

Итак, установлен следующий важный факт: при проектировании шарового гасителя для фрикционной пары «шар – сферическая поверхность» следует выбирать такие конструктивные материалы, коэффициент сухого трения скольжения которых имеет величину, не меньшую определенного выше значения. При этом частота входного воздействия  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  существенно влияет на его величину, что является конструктивным недостатком гасителя такого типа.

Кроме того, взаимодействие обычных фрикционных пар типа «сталь – сталь», «бетон – сталь» или «бетон – бетон» не обеспечивает реализацию качения шара без скольжения в сферической выемке. Таким образом, необходимо либо использовать специальные конструктивные материалы для искусственного увеличения коэффициента трения между шаром и сферической поверхностью (как это сделано в [19 – 21]), либо изменить конструкцию гасителя, в которой роль его рабочего тела будет играть не шар, а совершенно другое тело [10, 11].

Теперь определим условие, при котором возможен отрыв шара относительно сферической поверхности несущего тела. Для этого приравняем нулю проекцию реакции  $\bar{R}_B$  связи (6.4) на нормаль  $\bar{n}$ . В результате получим искомое условие отрыва шара относительно сферической поверхности выемки:

$$R_B^N = m(g \cos \eta + \ddot{x} \sin \eta + \bar{R} \dot{\eta}^2) = 0. \quad (6.8)$$

Исходя из (6.8), можно определить возможные случаи отрыва. Например, отрывы шара возможны при таких динамических ситуациях, когда взаимные положения и движения шара и несущего тела таковы:  $\eta = \pm \pi / 2$ ,  $\dot{\eta} = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$ . В этих случаях шар останавливается (условие  $\dot{\eta} = 0$ ) в двух крайних положениях с углами отклонения от вертикали  $\eta = \pm \pi / 2$  на сферической поверхности, а несущее тело в этот момент времени перемещается без ускорения (условие  $\ddot{x} = 0$ ).

Приведем график функциональной зависимости  $R_B^N$  от времени  $T$  (с) (рис. 6.3), полученной при численном интегрировании системы уравнений (4.13) – (4.14) для исследуемого в §5 случая.

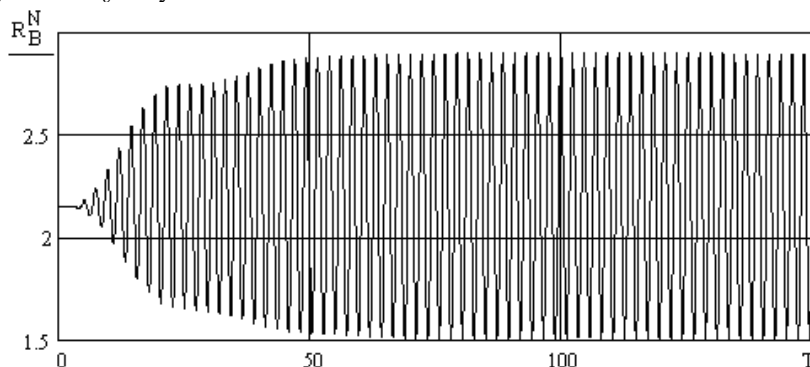


Рис. 6.3

Как видно из рис. 6.3, периодическая кривая  $R_B^N$  ни в одной точке не пересекает горизонтальную ось. Из этого следует, что движение шара в сферической выемке для данной виброзащитной системы и при выбранных силовых и частотных характеристиках происходит без отрывов.

#### §7. Заключение.

В работе построена математическая модель, которая описывает вынужденные колебания виброзащитной системы с шаровым виброгасителем. В модели аналитически учтен эффект «чистого» качения шара относительно сферической выемки и влияние такого движения на динамическое поведение несущего объекта.

Обоснована принципиальная возможность применения устройства «шар в сферической выемке» в качестве гасителя вынужденных колебаний несущих объектов.

Проведен анализ динамического поведения виброзащитной системы с шаровым гасителем в зависимости от параметров его настройки. Установлено, что основными параметрами регулирования и настройки гасителя являются: а) разница  $\bar{R} = R - r$  между радиусами сферической выемки и тяжелого шара; б) коэффициент демпфирования  $n_n$  рабочего тела гасителя; в) соотношение масс  $\nu = m / M$  шара и несущего объекта.

На основе предложенной модели разработан простой численно-графический метод определения оптимальных величин параметров настройки шарового гасителя.

Доказана эффективность метода виброзащиты крупногабаритных несущих объектов с использованием предложенного шарового гасителя. Показано, что при оптимальной настройке его параметров уровень амплитуд вынужденных колебаний несущих объектов можно уменьшить более чем в 3,5 раза.

Установлены условия физической реализации чистого качения шара в сферической выемке гасителя, а также условия его качения без отрывов. При проектировании шарового гасителя для фрикционной пары «шар – сферическая выемка» следует выбирать такие конструктивные материалы, которые обеспечивают качение шара в выемке без скольжения.

Отмечены существенные конструктивные недостатки шаровых гасителей предложенного типа.

1) Они не являются изохронными (т.е. не удерживают необходимую частоту настройки) и могут корректно применяться только при малых относительных отклонениях шара от равновесного положения.

2) Частота входного воздействия существенно влияет на величину коэффициента сухого трения скольжения, минимально необходимого для физической реализации чистого качения шара в сферической выемке.

Результаты этого исследования могут быть использованы разработчиками и проектировщиками виброгасителей крупногабаритных объектов при подготовке их конструктивных решений и в процессе выбора оптимальных параметров.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто вимушені коливання механічної віброзахисної системи зв'язаних твердих тіл «кульовий гаситель (BVA) з лінійно-в'язким опором – рухливе несуче тіло» під впливом зовнішнього гармонічного збудження. На основі формалізму Аппеля сформульовано і чисельно досліджено динамічні рівняння спільного руху важкої кулі без ковзання в сферичній порожнині несучого тіла. Отримано амплітудно-частотну характеристику демпфуючої механічної системи та криві залежностей максимальної амплітуди коливань несучого тіла від значень радіуса сферичної порожнини та коефіцієнта в'язкого опору BVA. Визначено умови та обмеження на кочення важкої кулі в сферичній виїмці гасника без ковзання.

1. *Динамический расчет* зданий и сооружений: Справочник проектировщика / Под ред. Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984. – 304 с.
2. *Динамический расчет* специальных инженерных сооружений и конструкций: Справочник проектировщика / Под ред. Б.Г.Коренева, А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1986. – 185 с.
3. *Adhikari S., Ali F.* Energy Harvesting Dynamic Vibration Absorbers // *J. App. Mech.* – 2013. – **80**. – P. 1 – 9.
4. *Chang C.C.* Mass dampers and their optimal designs for building vibration control // *Eng. Struct.* – 1999. – **21**. – P. 454 – 463.
5. *Den Hartog J.P.* *Mechanical Vibrations.* – McGraw-Hill, New York, 1956. – 436 p.
6. *Kärnä T.* Damping methods to mitigate wind-induced vibrations // *J. Struct. Mech.* – 2009. – **42**, N 1. – P. 38 – 47.
7. *Keutgen R., Lilien J.-L.* A new damper to solve galloping on bundled lines. Theoretical background, laboratory and field results // *IEEE Transactions on Power Delivery* – 1998. – **13**, N 1. – P. 260 – 265.
8. *Korenev B.G., Reznikov L.M.* *Dynamic Vibration Absorbers – Theory and Technical Applications.* – Chichester: John Willey and Sons, 1993. – 296 p.
9. *Kwok K.C.S.* Damping increase in building with tuned mass damper // *ASCE J. Eng. Mech.* – 1984. – **110**, N 11. – P. 1645 – 1649.
10. *Legeza V.P.* Numerical Analysis of the Motion of a Ball in an Ellipsoidal Cavity with a Moving Upper Bearing // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 2. – P. 191 – 195.
11. *Legeza V.P.* Kinematics and dynamics of a mechanical system on rollers that provide nonholonomic constraints // *J. of Mathematical Sci.* – 1994. – **72**, N 5. – P. 3299 – 3305.
12. *Legeza V.P.* Plane Problem on a Heavy Ball Rolling in a Spherical Recess of an Inverted Pendulum // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 8. – P. 1089 – 1093.
13. *Legeza V.P.* Rolling of a Heavy Ball in a Spherical Recess of a Translationally Moving Body // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 6. – P. 758 – 764.
14. *Li J., Zhang Z., Chen J.* Experimental Study on Vibration Control of Offshore Wind Turbines Using a Ball Vibration Absorber // *J. Energy and Power Engineering* – 2012. – N 4. – P. 153 – 157.
15. *Lobas L.G.* On Rolling Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 5. – P. 691 – 696.
16. *Lurie A.I.* *Analytical Mechanics.* – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 864 p.
17. *Naprstek J., Fischer C., Pirner M., Fisher O.* Non-linear dynamic behavior of a ball vibration absorber // 3<sup>rd</sup> ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2011). Corfu, Greece, 26 – 28 May 2011. – P. 1 – 14.
18. *Neimark Yu.I., Fufayev N.A.* *Dynamics of Nonholonomic Systems.* – Providence: Amer. Mathem. Soc., 2004. – 518 p.
19. *Pirner M.* Actual Behaviour of a Ball Vibration Absorber // *Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* – 2002. – **90**, N 8. – P. 987 – 1005.
20. *Pirner M., Fischer O.* One prototype of the ball absorber and its effect on the tower // *Int. Association for Shell and Spatial Struct. Proc. Working Group IV Masts and Towers. 19th Meeting in Krakow, Poland, September, 1999.* – P. 187–196.
21. *Pirner M., Fischer O.* The development of a ball vibration absorber for the use on towers // *IASS.* – 2000. – **41**, N 2. – P. 91 – 99.
22. *Weaver W., Timoshenko S.P., Young D.H.* *Vibration Problems in Engineering, 5<sup>th</sup> Edition.* – New York: John Wiley, 1990. – 624 p.
23. *Zhang Z. -L., Chen J.-B., Li J.* Theoretical study and experimental verification of vibration control of offshore wind turbines by a ball vibration absorber // *Structure and Infrastructure Engineering.* – 2014. – **10**, N 8. – P. 1087 – 1100.
24. *Zhang Z. -L., Li J., Nielsen S.R.K., Basu B.* Mitigation of edgewise vibrations in wind turbine blades by means of roller dampers // *J. Sound and Vibration.* – 2014. – **333**. – P. 5283 – 5298.
25. *Zhengbing Hu, Legeza V.P., Dychka I.A., Legeza D.V.* Mathematical Modeling of the Process of Vibration Protection in a System with two-mass Damper Pendulum // *Int. J. of Intelligent Systems and Applications (IJISA).* – 2017. – **9**, N.3. – P. 18 – 25.

Поступила 10.03.2017

Утверждена в печать 22.05.2018