А.А.Мартынюк[1], Д.Я.Хусаинов[2], В.А.Черниенко[2]

КОНСТРУКТИВНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

[1]Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; martynyukanan@gmail.com
[2]Киевский Национальный университет им. Тараса Шевченко,
ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина

Abstract. A system of perturbed motion equations with quadratic nonlinearity is considered. The new estimates of the Lyapunov function are established and two conclusions are given. The new conditions of restriction for movement are pointed. For two coupled systems of equations, the conditions of restriction for movement with respect to part of variables are established. The practical conditions of restriction for movement relative to predetermined areas of the initial and subsequent disturbances are obtained. As an example, a system of quasi-linear equations is considered.

Key words: equations with quadratic nonlinearity, Lyapunov function, boundedness movement.

Введение.

Оценки изменения функций Ляпунова вдоль решения уравнений возмущенного движения являются ключевым элементом его прямого метода в качественной теории уравнений (см. [1]). Одним из способов получения такого рода оценок является использование линейных и нелинейных интегральных неравенств (см. [2, 6 и библиографию там]).

В данной статье получены новые оценки функций Ляпунова для некоторых классов нелинейных непрерывных систем и дано их применение при исследовании различных типов ограниченности движения.

Статья построена по следующему плану.

В разделе 1 дана постановка задачи об оценке функции Ляпунова на решениях уравнений с квадратичной нелинейностью.

В разделе 2 установлена оценка функции Ляпунова для случая, когда ее полная производная в силу уравнений движения удовлетворяет квадратичному неравенству.

В разделе 3 установлены условия ограниченности, равномерной ограниченности и экви-ограниченности движения.

В разделе 4 исследована ограниченность движения относительно части переменных.

В разделе 5 получены условия ограниченности движения относительно заданных областей начальных и последующих возмущений.

В разделе 6 приведен пример анализа квазилинейной системы.

В заключительном разделе 7 кратко обсуждаются полученные результаты и указаны некоторые нерешенные проблемы раздела 1.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f : R_+ \times R^n \to R^n$ вектор-функция с непрерывными на любом конечном интервале элементами, достаточно гладкая, обеспечивающая существование решения задачи (1) при всех $t \geq t_0$.

Пусть в окрестности G состояния $x = 0$ системы (1) существует функция V однозначная, непрерывная и определенно положительная в смысле Ляпунова.

Полная производная функции V в силу системы (1) вычисляется по формуле

$$D^+V(t, x) = \limsup\left\{\left[\left(V(t+h, x+hf(t, x)\right) - V(t, x))\right]h^{-1}\colon\ h \to 0^+\right\}.$$

Далее исследуем систему уравнений возмущенного движения (1) с нелинейностью конкретного вида, а именно с квадратичной нелинейностью (см. [3, 5] и библиографию там)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + X^T(t)B(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $A(t) - n \times n$ –матрица с непрерывными на любом конечном интервале элементами, $B(t)$ – прямоугольная $n^2 \times n$ –матрица, состоящая из симметрических квадратных матриц $B_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n,$

$$B_i(t) = \begin{bmatrix} b_{11}^i(t) & b_{12}^i(t) & \ldots & b_{1n}^i(t) \\ b_{21}^i(t) & b_{22}^i(t) & \ldots & b_{2n}^i(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^i(t) & b_{n2}^i(t) & \ldots & b_{nn}^i(t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$X^T(t) = \{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$ – прямоугольная $n \times n^2$ – матрица, состоящая из квадратных матриц $n \times n$ – матриц $X_i(t)$, у которых на i -х строках находятся векторы $x(t)$, другие элементы равны нулю, т.е.

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}; \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\ldots,$$

$$X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Целью данной статьи является получение новой оценки функции Ляпунова V вдоль решений системы (2) и условий ограниченности движения, практической ограниченности, сходимости решений.

2. Оценка V -функций Ляпунова.

Основополагающим при получении интегрального неравенства для заданной функции Ляпунова, отображающей $R_+ \times R^n \to R_+$ является соотношение Ляпунова (см. [1]), связывающее функцию $V(t, x)$ с ее производной $D^+V(t, x)$ в силу уравнений движения (1). Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть для полной производной $D^{+}V(t,x)\big|_{(1)}$ существуют положительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (интегрируемые на любом конечном интервале) такие, что

$$D^{+}V(t,x)\big|_{(1)} \le f_1(t)V(t,x) + f_2(t)V^2(t,x) \qquad (3)$$

в области значений $(t,x) \in R_{+} \times D$, где $D \subseteq R^n$.

Тогда вдоль решений системы (1) верна оценка

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1} \qquad (4)$$

для всех $t \ge t_0$, для которых

$$L(t) = 1 - V(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} f_2(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau\right]ds > 0.$$

Доказательство. Из соотношения Ляпунова

$$V(t,x) = V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} D^{+}V(s,x(s))ds$$

и неравенства (3) следует, что

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} (f_1(s)\ V(s,x(s)) + f_2(s)V^2(s,x(s))ds, \quad t \ge t_0. \qquad (5)$$

Пусть $m(t) = V(t,x(t))$ при всех $t \ge t_0$ и $m(t_0) = V(t_0,x_0)$. Из (5) получим оценку

$$m(t) \le m(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f_1(s) + f_2(s)m(s))m(s)ds, \quad t \ge t_0. \qquad (6)$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана к оценке (6), приходим к неравенству

$$m(t) \le m(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} (f_1(s) + f_2(s)m(s))ds\right], \quad t \ge t_0, \qquad (7)$$

которое преобразуем к виду

$$-m(t)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} f_2(s)m(s)ds\right] \ge -m(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right] \qquad (8)$$

при всех $t \ge t_0$.

Умножая на $f_2(t)$ обе стороны неравенства (8), получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-\int_{t_0}^{t} f_2(s)m(s)ds\right]\right\} \ge -m(t_0)f_2(t) \times \exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right] \text{ при всех } t \ge t_0.$$

Интегрируя это неравенство от t_0 до $t \in R_{+}$, получим оценку

$$(m(t))^{-1}m(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right] \ge 1 - m(t_0) \times \int_{t_0}^{t} f_2(s)\exp\left[f_1(\tau)d\tau\right]ds, \quad t \ge t_0. \qquad (9)$$

Из неравенства (9) следует, что

$$m(t) \le m(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1}, \qquad (10)$$

где $L(t) = 1 - m(t_0)\int\limits_{t_0}^{t} f_2(s)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau\right]ds$.

Неравенство (10) выполняется для всех $t \ge t_0$, для которых $L(t) > 0$. Учитывая, что $m(t) = V(t, x(t))$, оценка V -функции вдоль решений системы (1) получается в виде (9).

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Пусть в неравенстве (3) $f_2(t) \equiv 0$ при всех $t \ge t_0$, тогда из (4) следует, что

$$V(t, x(t)) \le V(t_0, x_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right], \quad t \ge t_0. \tag{11}$$

Следствие 2. Пусть в неравенстве (3) функция $f_1(t) \equiv 0$ при всех $t \ge t_0$. Тогда из (4) следует, что $V(t, x(t)) \le V(t_0, x_0)(L^*(t))^{-1}$ при всех $t \ge t_0$, для которых

$$L^*(t) = 1 - V(t_0, x_0)\int\limits_{t_0}^{t} f_2(s)ds > 0.$$

Полученная оценка (4) и следствия 1, 2 допускают применение во многих задачах общей теории устойчивости движения. Рассмотрим некоторые из них.

3. Ограниченность движения.

Здесь и далее под векторными и матричными нормами будем понимать

$$\|x(t)\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}; \quad \|B\| = \left\{\lambda_{\max}(B^T B)\right\}^{1/2},$$

где $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – экстремальные собственные числа соответствующих симметричных матриц. Систему (1) рассмотрим в области $R_+ \times R^n$, и предполагаем, что векторфункция $f(t, x)$ определена и непрерывна.

Определение 1 (см. [7]). Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) ограничено, если существует положительная постоянная $\beta > 0$ такая, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \ge t_0$, где β может зависеть от каждого решения.

Определение 2. Решение системы (1) экви-ограничено, если для любого $\alpha > 0$ и $t_0 \in R_+$ существует $\beta(t_0, \alpha) > 0$ такая, что если $x_0 \in S_\alpha = \left\{x \in R^n : \|x_0\| < \alpha\right\}$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta(t_0, \alpha)$ при всех $t \ge t_0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) существует функция Ляпунова $V(t, x)$ определенная на $R_+ \times R^n$, для которой выполняются условия леммы 1 и кроме того:*

(1) $a(\|x\|) \le V(t, x)$, где $a \in KR$ – классу Хана;

(2) $D^+V(t, x)\big|_{(1)}$ удовлетворяет оценке (3) при всех $(t, x) \in R_+ \times R^n$;

(3) $V(t_0, x_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1} < a(\beta)$ при всех $t \ge t_0$ для некоторого значения $\beta > 0$.

Тогда решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) экви-ограничено.

Доказательство. Пусть $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1) такое, что $x_0 \in S_\alpha$. При выполнении условия (1) теоремы 1 имеем $\|x(t)\| \le a^{-1}(V(t, x(t))$ при всех $t \ge t_0$. Следствием условия (2) теоремы 1 является оценка (4), которая имеет место при всех $t \ge t_0$, для которых $L(t) > 0$.

Из условия (3) следует, что $\|x(t)\| \le a^{-1}(V(t, x(t)) < a^{-1}a(\beta) = \beta(t_0, \alpha)$ при всех $t \ge t_0$. Этим экви-ограниченность решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ доказана.

Теорема 2. *Пусть существует функция $V(t,x)$, определенная на $R_+ \times R^n$, $\|x\| \ge R$, где R – сколь угодно большое число, которое удовлетворяет условиям:*

(1) $a(\|x\|) \le V(t,x) \in b(\|x\|)$, где $a \in KR$ –классу Хана, $b(r)$ – непрерывная функция на R_+;

(2) выполняются условия леммы 1 при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$;

(3) для $x_0 \in S_\alpha$, $V(t_0, x_0) \le b(\alpha)$ и $\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1} < \dfrac{a(\beta)}{b(\alpha)}$ при всех $t \ge t_0$.

Тогда решения системы (1) равномерно ограничены.

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) с начальными условиями $x_0 \in S_\alpha$. При выполнении условий (1), (2) теоремы 2 имеем оценки: $\|x(t)\| \le a^{-1}(V(t, x))$ при всех $t \ge t_0$ и $V(t, x(t)) \le V(t_0, x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1}$, где $L(t) > 0$ при всех $t \ge t_0$. Из того, что $\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds\right](L(t))^{-1} < \dfrac{a(\beta)}{b(\alpha)}$, $t \ge t_0$ следует оценка $\|x(t, t_0, x_0)\| < a^{-1}(a(\beta)) = \beta(\alpha)$, где $\beta(\alpha)$ не зависит от t_0. Этим теорема 2 доказана.

4. Ограниченность движения двух связанных систем.

Рассмотрим систему связанных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y); \quad \frac{dy}{dt} = G(t, x, y), \tag{12}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$ и вектор-функции $F(t,x,y)$ и $G(t,x,y)$ определены и непрерывны на $R_+ \times R^n \times R^m$. Предположим, что для системы (12) построена функция Ляпунова $V(t, x, y)$, для которой установим оценку, аналогичную оценке (10).

Лемма 2. *Пусть для системы (12) построена функция Ляпунова $V(t,x,y)$ такая, что*

$$D^+V(t, x, y)\big|_{(12)} \le \psi_1(t)V(t, x, y) + \psi_2(t)V^2(t, x, y) \tag{13}$$

при всех $t \in R_+$, где $\psi_1(t), \psi_2(t)$ – положительные интегрируемые функции на любом конечном интервале.

Тогда для функции $V(t, x, y)$ верна оценка

$$V(t, x(t), y(t)) \le V(t_0, x_0, y_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds\right](M(t))^{-1} \tag{14}$$

для всех $t \ge t_0$, для которых

$$M(t) = 1 - V(t_0, x_0, y_0)\int_{t_0}^{t} \psi_2(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \psi_1(\tau)d\tau\right]ds > 0.$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Далее приведем некоторые следствия леммы 2.

Следствие 3. Пусть в неравенстве (13) $\psi_2(t) \equiv 0$ при всех $t \geq t_0$. Тогда

$$V(t, x(t), y(t)) \leq V(t_0, x_0, y_0)\exp\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds \tag{15}$$

при всех $t \geq t_0$.

Следствие 4. Пусть в неравенстве (13) $\psi_1(t) \equiv 0$ при всех $t \geq t_0$. Тогда

$$V(t, x(t), y(t)) \leq V(t_0, x_0, y_0)(M^*(t))^{-1} \tag{16}$$

при всех $t \geq t_0$, для которых

$$M^*(t) = 1 - V(t_0, x_0, y_0)\int_{t_0}^{t} \psi_2(s)\,ds > 0.$$

Теорема 3. *Пусть для системы (12) построена функция Ляпунова* $V(t,x,y)$ *определенная в области* $S(r) = \{(x, y) \in R^n \times R^m : \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq r^2\}$*, где* r *может быть сколь угодно большим числом. Кроме того:*

(а) существует функция $a \in K$ *-классу Хана такая, что* $a(\|y\|) \leq V(t, x, y)$ *равномерно по* (t, x)*;*

(б) существует непрерывная функция $b(r,s)$ *такая, что* $V(t, x, y) \leq b(\|x\|, \|y\|)$*;*

(в) для значений (t_0, x_0, y_0) *таких, что* $\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 \leq \alpha^2$*,* $\alpha > r$ *существует* $\beta(\alpha) > 0$ *такое, что* $V(t_0, x_0, y_0) \leq b(\alpha)$ *и*

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds\right](M(t))^{-1} < \frac{a(\beta)}{b(\alpha)} \quad \forall \geq t_0.$$

Тогда решения системы (12) равномерно y *-ограничены.*

Доказательство. Рассмотрим решение $(x^T(t, x_0, y_0)$, $y^T(t, x_0, y_0))^T$ системы (12) с начальными условиями (t_0, x_0, y_0) такими, что $\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 \leq \alpha^2$, $\alpha > r$. Для функции $V(t, x, y)$, удовлетворяющей условию (*а*) вдоль решений системы (12), верна оценка

$$\|y(t)\| \leq a^{-1}(V(t,x,y)) \quad \forall \geq t_0. \tag{17}$$

Далее, из условий (*б*) и (*в*) следует, что оценка (14) может быть усилена так:

$$V\left(t, x(t), y(t)\right) \leq b\left(\|x_0\|, \|y_0\|\right)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds\right](M(t))^{-1} \tag{18}$$

при всех $t \geq t_0$. Из оценки (18) условия (в) и неравенства (17) следует, что при всех $t \geq t_0$ верна оценка $\|y(t)\| < a^{-1}(a(\beta)) = \beta(\alpha)$. Этим теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Предположим, что для системы (12) существует функция Ляпунова $V(t,x,y)$, определенная на множестве $t_0 \le t < \infty$, $\|x\| < \infty$, $\|y\| \ge k > 0$ и удовлетворяет следующим условиям:*

(а) $a(\|y\|) \le V(t,x,y) \le b(\|y\|)$, *где* $a, b \in KR$ *классу Хана;*

(б) $D^+V(t,x,y)\big|_{(12)} \le \psi_1(t)V(t,x,y) + \psi_2(t)V^2(t,x,y)$,

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ *– положительные интегрируемые функции на любом конечном интервале;*

(в) $\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right](M(t))^{-1} < \dfrac{a(\beta)}{b(\alpha)}$ *при всех* $t \ge t_0$.

Кроме того, для каждого $m > 0$ *существует функция Ляпунова* $W(t,x,y)$, *определенная на множестве* $t_0 \le t < \infty$, $\|x\| \ge K_1(m)$, $\|y\| \le m$ *и удовлетворяющая условиям:*

(г) $a_1(\|x\|) \le W(t,x,y) \le b_1(\|x\|)$, *где* $a_1, b_1 \in KR$ *-классу Хана;*

(д) $D^+W(t,x,y)\big|_{(12)} \le \varphi_1(t)V(t,x,y) + \varphi_2(t)W^2(t,x,y)$,

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ *– положительные функции, интегрируемые на любом конечном интервале.*

(е) $\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_1(s)ds\right](M^*(t))^{-1} < \dfrac{a_1(\beta_1)}{b_1(\alpha_1)}$ *при всех* $t \ge t_0$, *где*

$$M^*(t) = 1 - W(t_0,x_0,y_0)\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_2(s)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau\right]ds.$$

Тогда решения системы (12) равномерно ограничены.

Доказательство. Пусть задано $\alpha > 0$ такое, что $K < \alpha$. Рассмотрим решение $(x(t), y(t))^T$ системы (12) при начальных условиях $t_0 \ge 0$, $\|x_0\| \le \alpha$ и $\|y_0\| \le \alpha$. Выберем $\beta(\alpha)$ настолько большим, что $b(\alpha) < a(\beta)$ и покажем, что при выполнении условий (*а*) – (*в*) теоремы 4 $\|y(t)\| < \beta(\alpha)$ при всех $t \ge t_0$, для которых решение $(x(t), y(t))^T$ системы (12) существует. При выполнении условия (*б*) теоремы 4 согласно лемме 2 имеем оценку (14) из которой следует, что

$$V(t,x(t),y(t)) \le b(\alpha)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right](M(t))^{-1}, \quad \forall \ge t_0, \tag{19}$$

так как по условию (*а*) $V(t_0,x_0,y_0) \le b(\alpha)$. Из оценки (19) и условия (*в*) теоремы 4 получим

$$\|y(t)\| \le a^{-1}(V(t,x,y)) < a^{-1}(a(\beta)) = \beta(\alpha) \tag{20}$$

при всех $t \ge t_0$, для которых решения системы (12) существуют.

Пусть $\alpha_1(\alpha) = \max\{\alpha, K_1(\beta(\alpha))\}$ и рассмотрим функцию $W(t,x,y)$ в области: $t_0 \le t < \infty$, $\|x\| \ge K_1(\beta)$, $\|y\| \le \beta$. Выберем $\beta_1(\alpha)$ настолько большим, что $b_1(\alpha_1) < a_1(\beta_1)$ и покажем, что при выполнении условий (*г*) – (*е*) теоремы 4 верна оценка $\|x(t)\| < \beta_1(\alpha)$ при всех $t \ge t_0$, для которых решение системы (12) существует. Из условия (*д*) теоремы 4 согласно лемме 2 следует, что

$$W\left(t, x(t), y(t)\right) \le W\left(t_0, x_0, y_0\right)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)ds\right](M^*(t))^{-1}, \tag{21}$$

для всех $t \ge t_0$, для которых

$$M^*(t) = 1 - W\left(t_0, x_0, y_0\right)\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau\right]ds > 0.$$

Из условия (2) следует, что $W(t_0, x_0, y_0) < b_1(\alpha_1)$ и, следовательно, условие (e) приводит к оценке

$$\|x(t)\| \le a_1^{-1}(W(t, x(t), y(t)) < a_1^{-1}(a_1(\beta_1)) = \beta_1(\alpha). \tag{22}$$

Из оценки компонент решения системы (12) следует, что $\|x(t)\| < \beta_1(\alpha)$ и $\|y(t)\| < \beta\,(\alpha)$ при всех $t \ge t_0$, для которых решения существуют и выполняются условия $M(t) > 0$ и $M^*(t) > 0$. Этим теорема доказана.

5. Практическая ограниченность движения.

Продолжим исследование свойств движения системы (1).

В пространстве R^n определим открытые подмножества $S(t), S_0(t)$ при всех $t \ge t_0$. Границу $S(t)$ обозначим $\partial S(t)$ и ее замыкание $\overline{S}(t)$. Далее предполагается, что $\partial S_0(t) \bigcap \partial S(t) = \varnothing$ при всех $t \ge t_0$.

Определение 5.1. Движение системы (1) практически ограничено относительно $\left\{S_0(t), S(t), t_0\right\}$ если решение $x(t, t_0, x_0)$ с начальным условием $x_0 \in S_0(t_0)$ удовлетворяет условию $x(t, t_0, x_0) \in S(t)$ при всех $t \ge t_0$.

Определение 5.2. Движение системы (1) практически равномерно ограничено относительно $\left\{S_0(t), S(t)\right\}$ если для любых $t_i \ge t_0$, $x_i \in S_0(t_i)$ решение $x(t, t_i, x_i) \in S(t)$ при всех $t \in [t_i, \infty)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Предположим, что для системы (1) существует непрерывная вещественная функция $V(t, x)$ локально липшицева по x и функции $\nu_1(t), \nu_2(t)$ положительные интегрируемые на любом конечном интервале такие, что:*

(1) $|V(t,x') - V(t,x'')| \le L\|x' - x''\|$, *где* $L > 0$ *при всех* $(x', x'') \in S(t)$ *и* $t \ge t_0$;

(2) $D^+V(t,x)\big|_{(1)} \le \nu_1(t)V(t,x) + \nu_2(t)V^2(t,x)$ *при всех* $t \ge t_0$ *и* $x \in S(t)$;

(3) $\exp\left[\int_{t_0}^{t}\gamma_1(s)ds\right](K(t))^{-1} < \dfrac{\inf\limits_{x\in S(t)} V(t,x)}{\sup\limits_{x_0\in S_0(t_0)} V(t_0,x_0)}$

и $K(t) = 1 - V(t_0, x_0)\int_{t_0}^{t}\nu_2(s)\exp\left[\int_{t_0}^{s}\nu_1(\tau)d\tau\right]ds > 0$ *при всех* $t \ge t_0$.

Тогда движение системы (1) практически ограничено.

Если условие (3) заменить условием

(3)* $\exp\left[\int_{t_1}^{t_2}\gamma_1(s)ds\right](K^*(t))^{-1} < \dfrac{\inf\limits_{x\in\partial S(t_2)} V(t_2,x)}{\sup\limits_{x_1\in\partial S_0(t_1)} V(t_1,x_1)}$

и $K^*(t)=1-V(t_1,x_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}\nu_2(s)\exp\left[\int\limits_{t_1}^{s}\nu_1(\tau)d\tau\right]ds>0$ при любых $t_2>t_1,\ \ t_1,t_2\in[t_0,\infty)$. *Тогда движение системы (1) равномерно практически ограничено.*

Доказательство. Пусть $x(t,t_0,x_0)$ решение системы (1) с начальными условиями $x_0\in S_0(t_0)$. Предположим, что при выполнении условий (1) – (3) теоремы 7 существует $t_2\in(t_0,\infty)$ такое, что $x(t_2,t_0,x_0)\,\overline{\in}\,S(t_2)$. Из того, что $S_0(t)\subset S(t)\forall t\ge t_0$ и $\partial S_0(t)\cap\partial S(t)=\varnothing\ \ \forall\ge t_0$, следует, что найдется $t_1>t_0$ такое, что $x(t,t_0,x_0)\in S(t)$ при всех $t\in[t_0,t_1)$ и $x(t_1,t_0,x_0)\in\partial S(t_1)$. При выполнении условий (1), (2) теорема 7 согласно лемме 1 имеем оценку

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\nu_1(s)ds\right](K(t))^{-1}$$

при всех $t\ge t_0$. Так как $\sup\limits_{x\in S_0(t_0)}V(t_0,x)\ge V(t_0,x_0),$ в силу условия (3) теоремы 7 получим

$$V(t_1,x(t),t_0,x_0)<\sup_{x\in S_0(t_0)}V(t_0,x)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\nu_1(s)ds\right](K(t))^{-1}<\inf_{x\in\partial S(t_1)}V(t_1,x).$$

Из этого неравенства следует, что $x(t_1,t_0,x_0)\,\overline{\in}\,\partial S(t_1)$, что является противоречием сделанному выше предположению. Поэтому $x(t,t_0,x_0)\in S(t)$ при всех $t\ge t_0$ как только $x_0\in S_0(t_0)$.

При выполнении условия (3^*) рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к утверждению, что $x(t,t_i,x_0)\,\overline{\in}\,S(t_i)$ при любых $t_i\in(t_0,\infty)$. Этим теорема 5 доказана.

6. Анализ ограниченности квазилинейной системы. Пусть в системе (1)

$$f(t,x)=P(t)x+g(t,x),$$

где $P(t)-n\times n$-матрица с непрерывными на любом конечном интервале элементами и $g:R_t\times R^n\to R^n$. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+g(t,x); \tag{23}$$

$$x(t_0)=x_0. \tag{24}$$

Обозначим $\lambda_n(t)$ и $\lambda_m(t)$ – максимальные и минимальные собственные значения матрицы $C(t)=(P^T(t)+P(t))/2$ и применим функцию Ляпунова $V(t,x)=V(x)=x^Tx$. Нетрудно показать, что

$$D^+V(x)\Big|_{(23)}\le\lambda_m(t)V(x)+x^Tg(t,x). \tag{25}$$

Пусть существует число $R>0$ такое, что для скалярной функции $K(t)$, непрерывной при всех $t\ge t_0$, выполняется оценка

$$\left\|x^Tg(t,x)\right\|\le k(t)(x^Tx)^2 \tag{26}$$

при всех $t\ge t_0$ и $\|x\|\ge R$. Тогда из неравенства (25) при условии (26) получаем неравенство

$$D^{+}V(x)\Big|_{(23)} \le \lambda_m(t)V(x) + K(t)V^2(x),$$

из которого, согласно лемме 1, следует, что

$$V(x(t)) \le V(x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_m(s)ds\right]\left(N(t)\right)^{-1} \tag{27}$$

при всех $t \ge t_0$, для которых

$$N(t) = 1 - V(x_0)\int_{t_0}^{t} k(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_m(\tau)d\tau\right]ds > 0.$$

Применяя к неравенству (27) теорему 1, нетрудно получить условия ограниченности решений системы (23) при начальных условиях x_0 таких, что $x_0 \in S_\alpha$.

7. Сходимость решений систем с квадратичной нелинейностью.

Рассмотрим автономную систему вида (2) (см. [3, 5] и библиографию там)

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + X^T(t)Bx(t). \tag{28}$$

Пусть матрица A линейной части системы (28) асимптотически устойчива. Тогда, как следует из теории устойчивости по линейному приближению, нулевое решение нелинейной системы (28) также будет асимптотически устойчивым. В качестве функции Ляпунова выберем квадратичную форму $V(x) = x^T Hx$, и вычислим ее полную производную в силу системы (28):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \left[Ax(t) + X^T(t)Bx(t)\right]^T Hx(t) + x^T(t)H\left[Ax(t) + X^T(t)Bx(t)\right] = \\ &= x^T(t)\left[\left(A^T H + HA\right) + \left(B^T X(t)H + HX^T(t)B\right)\right]x(t).\end{aligned} \tag{29}$$

Так как по предположению матрица A является асимптотически устойчивой, то для произвольной положительно определенной матрицы C матричное уравнение Ляпунова $A^T H + HA = -C$ имеет единственное решение – положительно определенную матрицу H. Учитывая, что H является решением уравнения Ляпунова из (29), получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^T(t)\left[C - (B^T X(t)H + HX^T(t)B)\right]x(t). \tag{30}$$

Областью устойчивости нулевого положения равновесия системы (28) является внутренность поверхности уровня функции Ляпунова $V(x) = r > 0$, лежащая внутри области $G_0 = \left\{x \in R^n : C - B^T XH - HX^T B > \Theta\right\}$, где под символом

$$C - B^T XH - HX^T B > \Theta \tag{31}$$

понимается положительная определенность матрицы. Заменим условие (31) более «грубым». Поскольку, в силу выбранных матричных и векторных норм будет выполняться соотношение

$$\|X(t)\| = \|x(t)\|,$$

то для полной производной функции Ляпунова $V(x) = x^T Hx$ будет выполняться оценка

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\left[\lambda_{\min}(C) - 2\|H\|\,B\|x(t)\|\right]\|x(t)\|^2. \tag{32}$$

Обозначим

$$G_0 = \left\{ x \in R^n \; \|x\| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H\|B|} \right\} \tag{33}$$

и заметим, что область «гарантированной» устойчивости имеет вид

$$G_{r_0} = \max_{r>0} \left\{ G_r : G_r \subset G_0 \right\}; \quad G_r = \left\{ x \in R^n : x^T H x < r^2 \right\}. \tag{34}$$

Как следует из этой зависимости, для определения «максимальной» области устойчивости следует «вложить» эллипсоид $x^T Hx = r^2$ внутрь сферы радиуса $R = \dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\|H\| \; \|B\|}$ и «растягивать» его при $r \to \infty$ до тех пор, пока эллипс не коснется сферы.

Теорема 6. *Пусть матрица линейной части системы (28) асимптотически устойчива. Тогда нулевое решение системы (28) также асимптотически устойчиво и для ее решений, удовлетворяющих начальным условиям*

$$\|x(0)\| < \frac{\gamma(H)}{2\|B\|\varphi(H)}; \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}; \quad \gamma(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \tag{35}$$

справедлива следующая оценка сходимости:

$$\|x(t)\| \le \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,\|x(0)\|}{\left[\gamma(H) - 2\|B\|\varphi(H)\|x(0)\|\right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\|B\|\varphi(H)\|x(0)\|}. \tag{36}$$

Доказательство. Оценку сходимости решений, находящихся в области устойчивости, будем получать с использованием квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T Hx$. Ее полная производная в силу системы (28) оценивается неравенством (32). Поскольку для квадратичной функции $V(x) = x^T Hx$ имеет место двустороннее неравенство

$$\lambda_{\min}(H)\|x\|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}(H)\|x\|^2, \tag{37}$$

то неравенство (32) можно переписать в виде

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} V(x(t)) + 2\lambda_{\max}(H)|B| \frac{V^{3/2}(x(t))}{\lambda_{\min}^{3/2}(H)}. \tag{38}$$

Используя обозначения (35) перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma(H)V(x(t)) + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} V^{3/2} x(t)).$$

Разделим его на $V^{3/2}(x)$ и получим оценку

$$V^{3/2} x(t)) \frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma(H)V^{-1/2} x(t)) + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Обозначив $V^{-1/2} x(t)) = z(t)$, получим

$$-2\frac{dz(t)}{dt} \le -\gamma(H)z(t) + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Отсюда следует такое неравенство:

$$\frac{dz(t)}{dt} \ge \frac{1}{2}\gamma(H)z(t) - \frac{\|B\|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Решая полученное неравенство (по аналогии с линейным неоднородным уравнением Бернулли), получим

$$z(t) \ge \left[z(0) - 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}$$

и учитывая, что $V^{-1/2}x(t)) = z(t),$ получим такое неравенство:

$$V^{-1/2}x(t)) \ge \left[V^{-1/2}x(0)) - 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Отсюда определим, что

$$V^{-1/2}x(t)) \le \left\{ \left[V^{-1/2}x(0)) - 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1}.$$

Используя двусторонние неравенства квадратичных форм (37), получаем

$$\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\|x(t)\| \le \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{V(x(0))}} - 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} \le$$

$$\le \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|} - 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{\|B\|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\|x(0)\|}{\left[\gamma(H) - 2\|B\|\varphi(H)\|x(0)\|\right] e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\|B\|\varphi(H)\|x(0)\|}.$$

Таким образом, для решений $x(t)$ системы (28) с начальными условиями, находящимися в области (34), т.е. $x_0 \in G_0$, будет справедлива оценка сходимости (36).

Замечание 2. Рассмотрим скалярное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx^2(t); \quad a > 0, \quad x(0) = x_0, \tag{39}$$

где $a > 0$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его точным решением является функция

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-at}}{a - x_0\left[1 - e^{-at}\right]}. \tag{40}$$

Рассмотрим применение метода функций Ляпунова с функцией $V(x) = x^2$ для уравнения (39). Для этой функции – $\lambda_{\max}(H) = \lambda_{\min}(H) = 1.$ Полная производная в силу линейной части имеет вид $\frac{d}{dt}V(x(t)) = -2ax^2(t).$

Поэтому $\varphi(H) = 1,$ $\gamma(H) = 2a$. Оценка сходимости (36) для решений с начальными условиями $|x_0| < a/b$ имеет аналогичный вид

$$|x(t)| \le \frac{a|x(0)|}{\left[a - |b||x(0)|\right]e^{at} + |b||x(0)|} = \frac{a|x(0)|e^{-at}}{a - |b||x(0)|\left[1 - e^{-at}\right]} \to 0.$$

Таким образом, для скалярного уравнения (39) с точным решением (40) оценка сходимости совпадает с оценкой, которая получается применением квадратичной функции Ляпунова.

Заключение.

В статье установлены новые оценки функции Ляпунова на решениях нелинейной системы (1). Эти оценки позволяют установить достаточные условия различных типов ограниченности движения системы (1) при более широких предположениях по сравнению с известными. А именно: в теоремах 10.1 и 10.2 монографии [7] требуется, чтобы $D^{+}V(t,x)\big|_{(1)} \leq 0$. В теоремах 10.3 из монографии [7] и 8.11 из монографии [8] применяются две функции и требуется выполнение условий $D^{+}V(t,x,y)\big|_{(12)} \leq -c_1(\|y\|)$ и $D^{+}W(t,x,y)\big|_{(12)} \leq 0$, где $c_1(r) > 0$ – непрерывная функция. Предложенный подход может быть интересен при исследовании ограниченности движения (см. теорему 5) относительно заданных областей для начальных и последующих возмущений. На примере системы (23) показан способ получения квадратичного неравенства для производной функции Ляпунова, пригодного для качественного анализа движений квазилинейных систем.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто систему рівнянь збуреного руху з квадратичною нелінійністю, вздовж розв’зків якої встановлено нові оцінки функції Ляпунова і приведено два висновки. Вказано нові умови обмеження руху. Для двох зв’язаних систем рівнянь встановлено умови обмеження руху відносно частини змінних. Отримано також умови практичного обмеження руху відносно заданих областей початкових і наступних збурень. Як приклад, розглянуто систему квазілінійних рівнянь.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М. – Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
2. *Мартынюк А.А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1979. – 249 с.
3. *Хусаінов Д.Я., Джалладова І.А., Шатирко О.А.* Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною // Вісник Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – в. 3. – С. 227 – 230.
4. *Martynyuk A.A.* Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations // Applied Mathematics. – 2015. – **6**. – P. 182 – 194. Published Online January 2015 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.61018.
5. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya, Chernienko V.A.* Integral estimates of solutions to nonlinear systems and their applications // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2016. – (**16**) (1). – P. 1 – 11.
6. *Pachpatte B.G.* Inequalities for Differential and Integral Equations. – Boston: Academic Press, 1997. – 611 p.
7. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. – Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. – 223 p.
8. *Yoshizawa T.* Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. – Berlin: Springer, 1975. – 233 p.

Поступила 23.02.2017 Утверждена в печать 30.01.2018