А . А . М а р т ы н ю к

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ V-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова. 303057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. For the nonlinear equations of perturbed motion, an estimate of the Lyapunov function is given basing on the pseudo-linear representation of the nonlinear integral inequality. By use of established estimates, the sufficient conditions of stability of motion on a finite interval are found.

Key words. nonlinear system, estimation of the Lyapunov function, stability on a finite interval.

Введение.

Ключевым элементом прямого метода Ляпунова [1] является оценка изменения (убывания или возрастания) вспомогательной функции вдоль решений уравнений возмущенного движения. Наличие такой оценки позволяет следить за расстоянием интегральной кривой рассматриваемой системы до начала координат при изменении времени от начального момента движения до любого последующего (конечного или бесконечного).

Фактически, при исследовании конкретных уравнений возмущенного движения (линейных или нелинейных) проблема оценки изменения функции Ляпунова сводится к построению такой мажоранты полной производной этой функции, при которой возможно сделать заключение о ее убывании или возрастании с течением времени (см. [2, 9] и библиографию там).

Целью данной работы является получение новой оценки изменения функции Ляпунова вдоль траекторий нелинейной системы уравнений. Для этого применяется псевдо-линейное представление нелинейного интегрального неравенства, которым оценивается полная производная функции Ляпунова вдоль решений рассматриваемой системы уравнений возмущенного движения.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$dx/dt = f(t,\ x); \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, вектор-функция $f(t,x)$ достаточно гладкая и решение задачи (1), (2) существует на любом конечном интервале $J = [t_0, t_0 + a)$, $a = \text{const} < \infty$.

Следуя [1], функция $V(t,x)$, $V(t,0) = 0$ называется V-функцией Ляпунова, если она однозначная, непрерывная и положительно определенная в некоторой окрестности состояния равновесия системы (1).

Предположим, что для системы (1) построена V-функция Ляпунова. Одним из вопросов, возникающих в ходе применения прямого метода Ляпунова, является вопрос оценки изменения функции $V(t,x)$ вдоль решений системы (1). Ниже изложен один способ получения такой оценки на основе метода интегральных неравенств.

2. Лемма об оценке V-функции Ляпунова.

Пусть V -функция определенно положительная и локально Липшицева. Определим ее полную производную $D^{+}V(t,x)$ вдоль решений системы (1) при всех $(t,\ x)\in J\times D$, где $D\subseteq \mathrm{R}^{n}$, по формуле

$$D^{+}V(t,x)=\operatorname{limsup}\left\{\left[V(t+\theta,x+\theta f(t,x))-V(t,x)\right]\theta^{-1}:\ \theta\to 0^{+}\right\}. \qquad (3)$$

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть уравнения возмущенного движения (1) такие, что:

1) существует функция $V(t,x)$, указанная выше;

2) существуют неотрицательные интегрируемые функции $a(t)$, $b(t)$ и постоянная $k>1$, при которых

$$D^{+}V(t,x)\le a(t)V(t,x)+b(t)V^{k}(t,x) \qquad (4)$$

при всех $(t,x)\in J\times D$;

3) при всех $t\in J^{*}\subseteq J$ выполняется неравенство

$$(k-1)V^{k}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left((k-1)\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right)ds<1. \qquad (5)$$

Тогда вдоль решений системы (1) верна оценка

$$V(t,x(t))\le \frac{V(t_0,x_0)\exp\int_{t_0}^{t} a(s)ds}{\left(1-(k-1)V^{k}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left((k-1)\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)ds\right)^{\frac{1}{k-1}}} \qquad (6)$$

при всех $t\in J^{*}$.

Доказательство. Из неравенства (4) получим:

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{t}\Big(a(s)V(s,x(s))+b(s)V^{k}(s,x(s))\Big)ds \qquad (7)$$

при всех $t\in J$. Неравенство (7) представим в виде

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{t}\Big(a(s)+b(s)V^{k-1}(s,x(s))\Big)V(s,x(s))ds, \qquad (8)$$

из которого следует, что

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\Big(a(s)+b(s)V^{k-1}(s,x(s))\Big)ds\right] \qquad (9)$$

при всех $t\in J$.

Для оценки множителя $\exp\left[\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right]$ в правой части неравенства (9) применим некоторые результаты из работ [10, 11].

Неравенство (9) представим в виде

$$V^{k-1}(t,x(t)) \le V^{k-1}(t_0,x_0)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{t}\left(a(s)+b(s)V^{k-1}(s,x(s))\right)ds\right]. \tag{10}$$

Умножив обе части неравенства (10) на отрицательный множитель

$$-(k-1)b(t)\exp\left[-(k-1)\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right],$$

получим

$$\begin{gathered}-V^{k-1}(t,x(t))(k-1)b(t)\exp\left[-(k-1)\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right] \ge \\ \ge -(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)b(t)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right].\end{gathered} \tag{11}$$

Из неравенства (11) находим, что

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-(k-1)\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right]\right\} \ge \\ \ge -(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)b(t)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right].\end{gathered} \tag{12}$$

Интегрируя неравенство (12) от 0 до $t \in J$, получим:

$$\begin{gathered}\exp\left[-(k-1)\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right] \ge 1-(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} b(s)\times \\ \times\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right]ds.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{t} b(s)V^{k-1}(s,x(s))ds\right] \le \left\{1-(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} b(s)\times \right.\\ \left.\times\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{-1}\end{gathered} \tag{14}$$

при всех $t \in J^*$. Комбинируя оценку (14) и неравенство (10), получим оценку

$$V^{k-1}(t,x(t)) \le \frac{V^{k-1}(t_0,x_0)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right]}{1-(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right]ds},$$

из которой, учитывая, что $k>1$ и $V(t,x)>0$, получим оценку (6). Этим лемма 1 доказана.

Следствие 1. Пусть в оценке (4) функция $b(t)=0$ при всех $t\in J$. Тогда оценка (6) принимает вид

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right) \quad (15)$$

при всех $t\in J$.

Следствие 2. Пусть в оценке (4) функция $a(t)=0$ при всех $t\in J$. Тогда оценка (6) принимает вид

$$V(t,x(t))\le \frac{V(t_0,x_0)}{\left(1-(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t}b(s)ds\right)^{\frac{1}{k-1}}} \quad (16)$$

при всех $t\in J^*\subseteq J$, для которых

$$1-(k-1)V^{k-1}(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t}b(s)ds>0.$$

3. Условия устойчивости на конечном интервале.

Рассмотрим задачу об устойчивости на конечном интервале системы (1). Принимая во внимание результаты работ [3, 4] приведем следующее определение.

Определение 1. Для заданных функции $V(t,x)$, постоянных $0<c_1<c_2$ и интервала $J=[t_0,t_0+\tau]$ система (1) устойчива на конечном интервале, если при начальных условиях (2) из условия $V(t_0,x_0)\le c_1$ следует оценка $V(t,x(t))<c_2$ при всех $t\in J$ вдоль любого решения $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ системы (1).

Замечание 1. Область $V(t,x)\le c$, $c\in(0,H)$, $t\in[t_0,t_0+\tau]$, была введена в работе [3]. В работе [6] аналогичная область использована при получении условий асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы вида (1).

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполняются условия следствия 1 и при всех $t\in J$ имеем

$$\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds<\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right).$$

Тогда система (1) устойчива на конечном интервале в смысле определения 1.

Доказательство. Пусть решение $x(t)$ выходит из области $G_0=\{V(t,x_0)\le c_1\}$ и в момент $t^*\in J$ покидает область $G=\{V(t^*,x)\le c_2\}$.

Из неравенства (10) следует, что в момент $t=t^*$ должно выполняться условие $c_1\exp\left(\int_{t_0}^{t^*}a(s)ds\right)=c_2$, откуда следует, что $\int_{t_0}^{t^*}a(s)ds=\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$.

Это соотношение противоречит условию Теоремы 1 и, следовательно, предположение о существовании момента $t^*\in J$, для которого $x(t^*)$ покидает область G, не верно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполняются условия следствия 2 и, кроме того:

1) при всех $t\in J$ выполняются неравенства $1-(k-1)c_1^{k-1}\int_{t_0}^{t}b(s)ds>0;$

2) – $$\frac{1}{\left[1-(k-1)c_1^{k-1}\int\limits_{t_0}^{t} b(s)ds\right]^{\frac{1}{k-1}}} < \frac{c_2}{c_1}.$$

Тогда система (1) устойчива на конечном интервале в смысле Определения 1.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству Теоремы 1.

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполняются все условия Леммы 1 и, кроме того,

$$\frac{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)}{\left\{1-(k-1)c_1^{k-1}\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\exp\left[(k-1)\int\limits_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{k-1}}} < \frac{c_2}{c_1}.$$

Тогда система (1) устойчива на конечном интервале в смысле определения 1.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

4. Иллюстративные примеры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение второго порядка (см. [2 , стр. 139])

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [a^2 + q(t)]x = 0;\ \ a = \text{const} \neq 0, \tag{17}$$

где $p(t) \geq 0$ при всех $t \in J$ и $\int^{\infty} q(s)ds < +\infty$; функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывные на J.

Уравнение (17) перепишем в виде системы

$$\begin{cases} dx/dt = y, & x(t_0) = x_0; \\ dy/dt = -p(t)y - [a^2 + q(t)]x, & y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

и для функции $V(x, y) = a^2x^2 + y^2$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= -2p(t)y^2(t) - 2q(t)x(t)y(t) \leq 2\,|\,q(t)\,\|\,x(t)y(t)\,| \leq \\ &\leq \frac{|\,q(t)\,|}{|\,a\,|}\left(a^2x^2(t) + y^2(t)\right) = \bar{a}(t)V(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{19}$$

Применяя Теорему 1 к неравенству (19), находим, что система (18) устойчива на конечном интервале, если

$$\int\limits_{t_0}^{t} \bar{a}(t)ds < \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \text{ при всех } t \in J. \tag{20}$$

Здесь $0 < c_1 < c_2$ – заранее заданные величины.

Пример 2. Предположим, что для системы (1) существует скалярная функция $\chi(t)$, непрерывная при всех $t \in J$, такая, что

$$\|f(t, x)\| \leq \chi(t)\|x\| \tag{21}$$

в области значений $(t, x) \in J \times D$. Для функции $V(x) = \|x\|^2 = x^T x$ получаем оценку

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = 2x^T(t)f(t,x(t)) \le 2\chi(t)\|x(t)\|^2 = 2\chi(t)V(x(t)). \qquad (22)$$

Применение Теоремы 1 к неравенству (22) приводит к такому заключению: система (1) устойчива на конечном интервале, если выполняется условие (21) и

$$\int_{t_0}^{t} \chi(s)ds < \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \text{ при всех } t \in J.$$

Пример 3. В системе (1) выделим линейное приближение и перепишем ее в виде

$$dx/dt = A(t)x + X(t,x), \qquad (23)$$

где $X(t,x)$ – n-кратные ряды, абсолютно сходящиеся в области D. Используя функцию $V = x^T x$, получим оценку

$$D^+V(x(t)) \le \lambda_M(t)V(x(t)) + 2R(t)V(x(t)), \qquad (24)$$

где $\lambda_M(t)$ – максимальное собственное значение матрицы $0{,}5\left(A^T(t)+A(t)\right)$, а непрерывная неотрицательная функция $R(t)$ определяется выражением (см. [4])

$$R(t) = \max_{V(x)=c_2} \frac{\left|x^T X(t,x)\right|}{x^T x}.$$

Применяя к неравенству (24) Теорему 1, получим условия устойчивости на конечном интервале системы (23) в виде

$$\int_{t_0}^{t} (\lambda_M(s) + 2R(s))ds < \ln\left(c_2/c_1\right) \text{ при всех } t \in J.$$

Пример 4. Рассмотрим систему (23) при других предположениях об оценке полной производной функции $V(x) = x^T x$. Поскольку выражение $F(t,x) \equiv x^T X(t,x)$ является голоморфной функцией, нетрудно получить оценку

$$D^+V(x(t)) \le \lambda_M(t)V(x(t)) + \chi(t)V^k(x(t)), \qquad (25)$$

где $k > 1$ (если разложение функции $F(t,x)$ начинается с членов третьего, четвертого и т.д. порядка, а $\chi(t)$ – непрерывная ограниченная функция). Применяя к неравенству (25) Теорему 3, получим условия устойчивости на конечном интервале в виде двух неравенств:

1) – $$1-(k-1)c_1^{k-1}\int_{t_0}^{t} \chi(s)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{s} \lambda_M(\tau)d\tau\right]ds > 0$$

при всех $t \in J$;

2) – $$\frac{\exp\int_{t_0}^{t} \lambda_M(s)ds}{\left\{1-(k-1)c_1^{k-1}\int_{t_0}^{t} \chi(s)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^{s} \lambda_M(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{k-1}}} < \frac{c_2}{c_1}$$

при всех $t \in J$.

5. Заключительные замечания.

Метод интегральных неравенств в теории устойчивости движения изложен в монографии [5]. При этом наибольшее распространение получили линейное интегральное неравенство Гронуолла – Беллмана и нелинейное неравенство Бихари. Оценка вида (6) является нелинейным аналогом неравенства Гронуолла – Беллмана со значительным потенциалом ее применения. Эта оценка позволяет исследовать различные проблемы в общей теории устойчивости движения. А именно, устойчивость по Ляпунову, ограниченность, практическую устойчивость движения нелинейных систем. Предложенный подход может быть применен также при исследовании крупномасштабных систем на конечном интервале. В задаче о стабилизации движения при интервальных начальных условиях этот подход применяется в ряде работ (см. [7, 8 и библиографию там]).

Р Е З Ю М Е . Для нелінійних рівнянь збуреного руху наведено оцінку функції Ляпунова на основі псевдо-лінійного зображення нелінійної інтегральної нерівності. На основі встановлених оцінок знайдено достатні умови стійкості руху на скінченному інтервалі.

1. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
2. *Лебедев А.А.* К задаче об устойчивость движения на конечном интервале времени // Прикл. матем. и механика. – 1954. – **18**, вып. 1. – С. 75 – 94.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л. – М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
4. *Мартынюк А.А.* К устойчивости неустановившегося движения на заданном интервале времени // Прикл. механика. – 1967. – **3**, вып.5. – С.121 – 125.
5. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук. думка, 1989. – 270 с.
6. *Мельников Г.И.* Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // ДАН СССР. – 1956. – **110**, вып. 3. – С. 326 – 329.
7. *Babenko E.A., Martynyuk A.A.* Stabilization of the Motion of a Nonlinear System with Interval Initial Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 182 – 191.
8. *Babenko E.A., Martynyuk A.A.* Stabilization of the Motion of Affine Systems // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 413 – 421.
9. *Hahn W.* Stability of Motion. – New York: Springer – Verlag, 1967. – 446 p.
10. *Lovartassi Y., El Mazoudi EL H., Elalami N.* A new generalization of lemma Gronwall-Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – **6**, N 13. – P. 621 – 628.
11. *Martynyuk A.A.* Novel Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Equations // Appl. Mathematics. – 2015. – **6.** – P. 182 – 194.

Поступила 04.07.2016 Утверждена в печать 30.05.2017