УДК 621.454.2 https://doi.org/10.15407/itm2019.04.005

О. В. ПИЛИПЕНКО, Н. В. ХОРЯК, С. И. ДОЛГОПОЛОВ, А. Д. НИКОЛАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ГАЗОВЫХ ТРАКТАХ ПРИ ЗАПУСКЕ ЖРД С ДОЖИГАНИЕМ ГЕНЕРАТОРНОГО ГАЗА

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: khoryak@i.ua

Однією з основних задач при проектуванні рідинних ракетних двигунів (РРД) є забезпечення безвідмовного запуску РРД. Експериментальне відпрацювання РРД є вельми витратним, а в разі нештатних ситуацій можливі тяжкі наслідки (в тому числі, руйнування двигуна і стендового обладнання). Тому одним з головних інструментів, які дозволяють на етапах проектування і відпрацювання РРД прогнозувати його динамічні характеристики і особливості функціонування при запуску, є математичне моделювання. Стаття присвячена удосконаленню математичних моделей, що описують низькочастотні динамічні процеси в гідравлічних і газових трактах РРД із допалюванням генераторного газу при запуску двигуна. Представлено модифіковану математичну модель динаміки кавітуючих насосів, яка зберігає свою структуру і працездатність в широкому діапазоні зміни чисел кавітації і при взаємних переходах з кавітаційного режиму роботи насоса на безкавітаційний, що необхідно при числовому дослідженні робочих процесів у РРД при запуску. Розроблено підхід до побудови нелінійної математичної моделі заповнення гідравлічних трактів РРД, який дозволяє в разі необхідності автоматично змінювати схему розбиття гідравлічного тракту на скінченні гідравлічні елементи в процесі його заповнення при розрахунках запуску. Запропоновано схему наближеної заміни рівнянь із запізнюваннями в математичній моделі динаміки газових трактів РРД, яка побудована із урахуванням особливостей розрахунку перехідних процесів при запуску РРД і дозволяє підвищити точність результатів моделювання при мінімальному ускладненні моделі. Працездатність розроблених математичних моделей продемонстровано на прикладі розрахунку запуску маршового РРД із допалюванням окислювального генераторного газу. Результати проведених досліджень можуть бути використані при математичному моделюванні запуску сучасних РРД.

Ключові слова: *рідинний ракетний двигун, запуск, перехідний процес, кавітація, шнековідцентровий насос, газогенератор, передавальна функція, частотна характеристика, ланка запізнювання*.

Одной из основных задач при проектировании жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) является обеспечение безотказного запуска ЖРД. Экспериментальная отработка ЖРД является весьма затратной, а нештатные ситуации могут иметь тяжелые последствия (в том числе, разрушение двигателя и стендового оборудования). Поэтому одним из главных инструментов, позволяющих на этапах проектирования и отработки ЖРД прогнозировать его динамические характеристики и особенности функционирования при запуске, является математическое моделирование. К числу наиболее важных и сложных вопросов при моделировании запуска ЖРД относится описание заполнения газожидкостных объемов двигателя, процессов, обусловленных кавитационными явлениями в насосах, и кинетики воспламенения и выгорания топлива в газогенераторе и камере сгорания. Представлена модифицированная математическая модель динамики кавитирующих насосов, которая сохраняет свою структуру и работоспособность в широком диапазоне изменения чисел кавитации и при взаимных переходах с кавитационного режима работы насоса на бескавитационный, что необходимо при численном исследовании рабочих процессов в ЖРД при запуске. Разработан подход к построению нелинейной математической модели заполнения гидравлических трактов ЖРД, позволяющий в случае необходимости автоматически изменять схему разбиения гидравлического тракта на конечные гидравлические элементы в процессе его заполнения при расчетах запуска. Предложена схема приближенной замены уравнений с запаздываниями в математической модели динамики газовых трактов ЖРД, построенная с учетом особенностей расчета переходных процессов при запуске ЖРД и позволяющая повысить точность результатов моделирования при минимальном усложнении модели. Работоспособность разработанных математических моделей продемонстрирована на примере расчета запуска маршевого ЖРД с дожиганием окислительного генераторного газа. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при математическом моделировании запуска современных ЖРД.

Ключевые слова: *жидкостной ракетный двигатель, запуск, переходный процесс, кавитация, шнекоцентробежный насос, газогенератор, передаточная функция, частотная характеристика, звено запаздывания.*

One of the key problems in the design of liquid-propellant rocket engines (LPREs) is the assurance of a trouble-free LPRE start. LPRE bench tryout is highly expensive, and emergency situations may have grave consequences (including engine and bench equipment destruction), Because of this, one of the main tools that allow one to predict the LPRE dynamic characteristics and start-up operation features at the design and tryout stages is mathematical simulation. One of the most important and complex problems in LPRE start simulation is the description of LPRE gas–liquid volume filling, processes caused by pump cavitation, and the kinetics of propellant ignition and burn-out in the gas generator and the combustion chamber. This paper presents a modified mathematical model of cavitating pipe dynamics, which keeps its structure and operability over a wide cavitation number range and in mutual transitions between the cavitation and the cavitation-free pump operation, which is required for the numerical study of working processes in an LPRE at its start. An approach to the construction of a nonlinear mathematical model of LPRE hydraulic path filling is presented. The approach allows one, if necessary, to automatically change the scheme of partitioning the hydraulic path into finite hydraulic elements in the process of its filling at engine start. A scheme of approximate substitution of delay equations in the mathematical model of LPRE gas path dynamics is proposed. The scheme is constructed with account for the features of calculation of LPRE start transients, and it allows the simulation accuracy to be improved with the minimum of model complication. The operability of the mathematical models developed is demonstrated by the example of simulating the start of a sustainer LPRE with oxidizing generator gas after-burning. The results of this study may be used in the mathematical simulation of the start of modern LPREs.

Keywords: *liquid-propellant rocket engine, start, transient, cavitation, inducer-equipped centrifugal pump, gas generator, transfer function, frequency characteristics, lagging element.*

Введение. Одним из наиболее сложных динамических режимов работы жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) является запуск [1 – 6]. Как показала практика создания и эксплуатации ЖРД, более 50 % аварий жидкостных ракет-носителей связаны с отказами двигателей [2], при этом именно на режимах запуска отмечается наибольшее количество отказов (по зарубежным данным – до 86 %) [3]. При запуске ЖРД параметры рабочего процесса за короткий промежуток времени изменяются от начальных до номинальных значений. При этом в системах и агрегатах жидкостной ракетной двигательной установки (ЖРДУ) возникают нестационарные переходные процессы, характеризующиеся экстремальным увеличением напряжений в конструкции, давления и расхода компонентов топлива, тепловых нагрузок, скоростей вращения валов турбонасосных агрегатов (ТНА). «Забросы» и «провалы» значений отдельных режимных параметров двигателя при запуске могут превысить допустимый уровень, что может привести к нештатным ситуациям и даже к разрушению двигателя [1, 3, 6]. Поэтому обеспечение надежного запуска является сложным и ответственным этапом проектирования ЖРД.

В настоящее время одним из главных инструментов, позволяющих на этапах проектирования ЖРД выявить характерные особенности его функционирования, выполнить прогноз устойчивости рабочих процессов, выбрать оптимальные характеристики его узлов и агрегатов, является математическое моделирование. Математическое моделирование переходных процессов при запуске ЖРД представляет собой неотъемлемую часть комплекса задач, которые необходимо решать при проектировании и отработке двигателя [4 – 10]. Оно позволяет не только найти наиболее рациональное решение проблем, возникающих при разработке и эксплуатации ЖРД, но также существенно сократить материальные и финансовые затраты [3], [4].

Цель настоящей работы – совершенствование математической модели запуска современных ЖРД с дожиганием генераторного газа в части описания низкочастотной динамики их гидравлических магистралей, газовых трактов и кавитирующих насосов.

1. Математическое моделирование низкочастотной динамики кавитирующих насосов ЖРД на переходных режимах. На номинальных режимах работы ЖРД насосы двигателя функционируют, как правило, в условиях скрытой или частичной кавитации. Кавитация приводит к качественному изменению динамических характеристик ЖРД, снижению собственной частоты колебаний жидкости в питающих магистралях (по сравнению с акустической), а также существенно влияет на устойчивость рабочих процессов в ЖРДУ [11], [12]. Наиболее полными и завершенными математическими моделями кавитационных колебаний в гидравлической системе со шнекоцентробежными насосами являются теоретические и экспериментально-расчетные гидродинамические модели, разработанные в Институте технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины (ИТМ НАНУ и ГКАУ) [11 – 13]. Среди экспериментально-расчетных гидродинамических моделей кавитационных колебаний следует выделить модель [13], в которой обобщены результаты большого количества экспериментальных исследований насосов в режиме кавитационных автоколебаний. С ее использованием получено удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных амплитуд продольных виброускорений ракет-носителей “Циклон” и “Днепр”. В соответствии с моделью [13], динамика кавитирующего насоса описывается тремя дифференциальными уравнениями: уравнением динамики кавитационных каверн, уравнением неразрывности и уравнением для определения давления на выходе из насоса

$$p_1 = p_{CP} + k^*(V_K, G_1) \cdot (\rho \cdot W_{1CP}^2 / 2) + B_1 \cdot T_K \frac{dV_K}{dt}, \qquad (1)$$

$$\gamma \cdot \frac{dV_K}{dt} = G_2 - G_1, \qquad (2)$$

$$p_2 = p_1 + p_H \cdot \tilde{p}_H(\tilde{V}_K) - J_H \frac{dG_2}{dt}, \qquad (3)$$

где p_1, G_1 – давление и расход на входе в насос; p_{CP} – давление срыва насоса; t – время; $k^*(V_K, G_1)$ – зависимость числа кавитации от объема кавитационных каверн V_K и расхода на входе в насос G_1; ($\rho W_{1CP}^2 / 2$) – скоростной напор шнекового преднасоса; B_1, T_K – упругость и постоянная времени кавитационных каверн; γ – удельный вес жидкости; p_2, G_2 – давление и расход жидкости на выходе из насоса; p_H, $\tilde{p}_H(\tilde{V}_K)$ – напор и кавитационная функция насоса; $\tilde{V}_K$ – относительный объем кавитационных каверн; J_H – коэффициент инерционного сопротивления жидкости в проточной части насоса.

Экспериментально-расчетная модель [13] построена с использованием результатов экспериментальных исследований кавитирующих насосов в режиме кавитационных автоколебаний и достоверна лишь в пределах области существования кавитационных автоколебаний. В работе [14] показано, что для достоверного определения параметров кавитационного течения в насосах при больших числах кавитации математическая модель [13] требует уточнения.

На переходных режимах работы ЖРД, в том числе при запуске, насосы могут функционировать как в условиях скрытой кавитации и кавитационного срыва, так и в условиях отсутствия кавитационных каверн [1], [10]. Бескавитационные режимы реализуются при больших числах кавитации – например, в начале запуска ЖРД, когда частота вращения вала основного ТНА сравнительно мала. Кроме того, в процессе запуска ЖРД возможны переходы от кавитационного режима работы насосов к бескавитационному и обратно. При использовании гидродинамической модели кавитационных колебаний [11], [12] такие переходы сопровождаются изменением вида уравнения динамики кавитационных каверн (1). В результате изменяется структура математической модели динамики ЖРД, что усложняет выполнение расчетов и может приводить к неустойчивости счета. Отметим, что критерием перехода от бескавитационного режима к кавитационному и обратно является либо критическое число кавитации, либо критический объем кавитационных каверн. Оба этих параметра определяются из условия устойчивости вычислительного процесса при изменениях структуры математической модели.

Известно, что для высоконапорных насосов ЖРД частота кавитационных колебаний в гидравлической системе связана с упругостью кавитационных каверн в насосе B_1 приближенным соотношением [1]

$$f \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|B_1|}{\gamma(J_1 + J_{OT})}}, \tag{4}$$

где J_1 – коэффициент инерционного сопротивления жидкости в питающем трубопроводе; J_{OT} – коэффициент инерционного сопротивления жидкости, обусловленного обратными течениями на входе в насос.

Из (4) следует, что при исчезновении кавитационных каверн в проточной части насоса определяемая ими упругость $|B_1| \to \infty$, а следовательно, и $f \to \infty$. Однако, как показано в [14], этому противоречат результаты расчетов, выполненных по теоретической [11] и расчетно-экспериментальной модели [13]. Чтобы устранить это противоречие, в работе [14] было предложено скорректировать выражение для определения относительной упругости кавитационных каверн $\tilde{B}_1(k^*, \varphi)$, дополнив его знаменателем:

$$\tilde{B}_1(k^*, \varphi) = [a(\varphi)\cdot k^{*2} + b(\varphi)\cdot k^*]\,/\,[1 - (k^*/k_O^*)^2], \tag{5}$$

где $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ – эмпирические коэффициенты [13]: $a(\varphi) = -2{,}236 - 0{,}098\,\varphi$, $b(\varphi) = -0{,}8396 - 2{,}509\varphi - 2{,}904\varphi^2$; k_O^* – число кавитации, при котором появляются кавитационные каверны в шнекоцентробежном насосе; φ – коэффициент расхода, равный отношению текущего значения параметра режима к значению, при котором появляются обратные течения на входе в насос [13].

Отметим, что упругость кавитационных каверн B_1 и их относительная упругость $\tilde{B}_1$ связаны между собой соотношением

$$\tilde{B}_1(k^*, \varphi) = B_1 V_{\text{ш.ср}}\,/\,(\rho W_{1CP}^2/2)], \tag{6}$$

где $V_{\text{ш.ср}}$ – объем проточной части шнека, в котором располагаются каверны перед кавитационным срывом насоса.

Зависимость частоты кавитационных колебаний от давления на входе в насос, рассчитанная с использованием формулы (5), согласуется с экспериментальными данными в области существования кавитационных автоколебаний и непротиворечива вблизи давлений, при которых исчезают кавитационные каверны в насосе [14].

С использованием уравнений (1) – (3) и скорректированной зависимости (5), построена нелинейная математическая модель, описывающая низкочастотную динамику кавитирующего насоса в расширенном диапазоне изменения давления на входе в насос:

$$\left(1+\alpha_p\right)\frac{dp_1}{dt}=\frac{G_1-G_2}{C_K}+R_{K1}\frac{dG_1}{dt}+R_{K2}\frac{dG_2}{dt}\,, \qquad (7)$$

$$p_2=p_1+p_H\cdot\tilde{p}_H\left(\tilde{V}_K\right)-J_H\frac{dG_2}{dt}\,, \qquad (8)$$

где $\alpha_p=\frac{\partial\left(B_1T_K\right)}{\partial p_1}\left(G_1-G_2\right)$; C_K – податливость кавитационных каверн

$$C_K=-\gamma/B_1\,; \qquad (9)$$

R_{K1}, R_{K2} – коэффициенты, имеющие размерность кавитационного сопротивления B_2: $R_{K1}=B_2-\frac{B_1T_K}{\gamma}+\frac{\partial p_{CP}}{\partial G_1}-\frac{\partial\left(B_1T_K\right)}{\partial G_1}\left(G_1-G_2\right)$, $R_{K2}=\frac{B_1T_K}{\gamma}$;

$B_2\left(p_1,G_1\right)=\frac{\partial p_1}{\partial G_1}$; $\tilde{V}_K(k^*,\varphi)=\int\limits_{k^*}^{k_O^*}\frac{dk^*}{\tilde{B}_1(k^*,\varphi)}$.

При увеличении давления на входе в насос податливость C_K, рассчитанная с использованием формул (5), (6), (9), уменьшается и начиная с некоторого значения становится меньше податливости жидкости в линии питания [14]. В этом случае в уравнении (7) вместо значения C_K следует использовать значение податливости жидкости на входе в насос.

Таким образом, экспериментально-расчетная модель динамики кавитирующего насоса [13] адаптирована для расчета переходных процессов при запуске ЖРД. При использовании адаптированной математической модели (5) – (9) переход от кавитационного режима работы насоса к бескавитационному и обратно не приводит к изменению структуры математической модели запуска ЖРД и скачкообразному изменению значений ее коэффициентов.

Для иллюстрации предложенного подхода были проведены расчеты запуска перспективного маршевого ЖРД [7], [17], выполненного по схеме с дожиганием окислительного генераторного газа. На рис. 1 показано изменение давления на входе в бустерный насос окислителя при запуске: кривая 1 – расчет без учета кавитации в насосах, кривая 2 – с учетом кавитации по модели [8], кривая 3– с учетом кавитации по предложенной модели. Из рисунка видно, что кавитация в насосах оказывает заметное влияние на характеристики переходных процессов при запуске. Использование новой модели динамики кавитирующих насосов ЖРД позволяет уточнить характеристики переходного процесса при запуске, в том числе величины «забросов» и «провалов» давления при гидравлических ударах, которые обычно имеют место при запуске ЖРД.

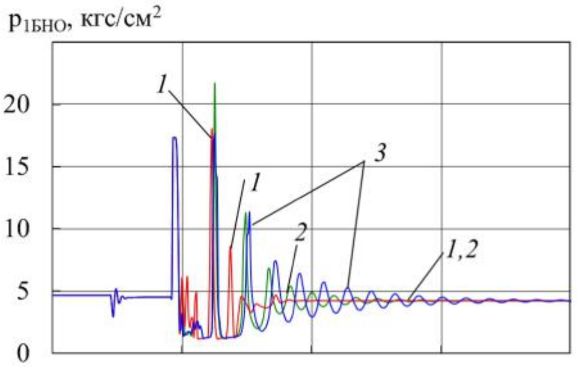

Рис. 1

2. Математическое моделирование заполнения гидравлических трактов ЖРД при его запуске. В настоящее время для расчета заполнения гидравлических трактов ЖРД обычно используется такая же схема разбиения гидравлического тракта на конечные гидравлические элементы [10], что и для моделирования его динамики в заполненном состоянии. При этом уравнения простейших гидравлических элементов имеют такой же вид, но используемые в них коэффициенты гидравлического сопротивления, массы и емкости, представляющие собой функции коэффициентов заполнения соответствующих участков гидравлического тракта, являются переменными. Для определения коэффициентов заполнения вводятся дополнительные дифференциальные уравнения, описывающие процессы накопления массы жидкости в участках магистрали.

Данный подход, несомненно, обладает простотой при математическом описании таких сложных явлений, как заполнение гидравлических трактов ЖРД жидкостью, и, как правило, дает положительный результат [1, 7, 10]. Однако он предполагает неизменность схемы разбиения гидравлического тракта на конечные гидравлические элементы в процессе его заполнения.

В настоящей работе разработан подход к построению нелинейной математической модели заполнения гидравлических трактов ЖРД при запуске двигателя, позволяющий в случае необходимости автоматически изменять при расчете схему разбиения гидравлического тракта на конечные гидравлические элементы в процессе его заполнения. Он состоит в следующем.

На первом этапе определяются частотные характеристики (ЧХ) заполняемого трубопровода как системы с распределенными параметрами.

Неустановившееся одномерное изотермическое движение реальной сжимаемой жидкости в цилиндрическом трубопроводе описывается системой уравнений, в которую входят уравнения движения и неразрывности [11]. Эти уравнения получены в предположении, что течение жидкости является турбулентным, а скорость течения много меньше скорости звука.

При определении частотных характеристик заполняемых жидкостью трубопроводов приняты следующие дополнительные предположения:

– заполняемый трубопровод состоит из трех участков, из которых первый полностью заполнен жидкостью, второй – частично заполнен, третий – заполнен газом или сообщается с безвоздушным пространством;

– могут быть определены ЧХ заполненной части трубопровода, поскольку скорость фронта заполнения трубопровода, близкая к скорости течения жидкости, много меньше скорости звука;

– граничные условия для этой части определяются участком, заполненным газом или сообщающимся с безвоздушным пространством – это конечная или бесконечная податливость;

– на частично заполненном жидкостью участке располагаются частицы жидкости, которые не взаимодействуют со сплошной массой жидкости и не влияют на граничные условия заполняемого трубопровода.

В силу этих дополнительных предположений ЧХ заполняемого жидкостью трубопровода могут быть определены так же, как для обычного заполненного трубопровода – с учетом указанных граничных условий и степени его заполнения жидкостью.

На втором этапе определяются ЧХ этого же трубопровода как системы с сосредоточенными параметрами. При этом каждый участок трубопровода представляется в виде четырехполюсника следующего вида:

$$\begin{cases} \delta\overline{p}_2 = \delta\overline{p}_1 - (R + sJ)\cdot\delta\overline{G}_1, \\ \delta\overline{G}_2 = -Cs\cdot\delta\overline{p}_1 + \delta\overline{G}_1, \end{cases} \tag{10}$$

где J, R, C – коэффициенты инерционного и линеаризованного гидравлического сопротивления и сосредоточенная податливость участка трубопровода.

Значения R и J определяются геометрией трубопровода, потерями давления и расходом жидкости. Количество сосредоточенных податливостей C и их величины выбираются исходя из необходимой точности согласования частотных характеристик трубопровода как системы с распределенными и системы с сосредоточенными параметрами в заданном частотном диапазоне. Место локализации сосредоточенной податливости будем задавать отношением $k_L = l_L / l_{тр}$ расстояния l_L от податливости до фронта заполнения к длине трубопровода $l_{тр}$.

Предложенный подход к построению нелинейной математической модели заполнения гидравлических трактов ЖРД при запуске двигателя является развитием подхода к построению математической модели гидравлических трактов ЖРД [15].

Продемонстрируем изложенный выше подход на конкретном примере заполнения трубопровода жидкостью. Будем рассматривать заполнение водой стального трубопровода диаметром 4 см, длиной 4 м с расходом 6,3 кгс/с и гидравлическими потерями давления 0,4 кгс/см^2.

На рис. 2 представлен расчетный модуль импеданса заполняемого жидкостью трубопровода, у которого фронт заполнения жидкости располагается на расстоянии l_Z =0,5$l_{тр}$ от начала трубопровода. Здесь кривые 2 и 3 представляют модуль импеданса трубопровода как системы с распределенными и, соответственно, сосредоточенными параметрами, кривая 1 – как системы с сосредоточенными параметрами без учета податливости.

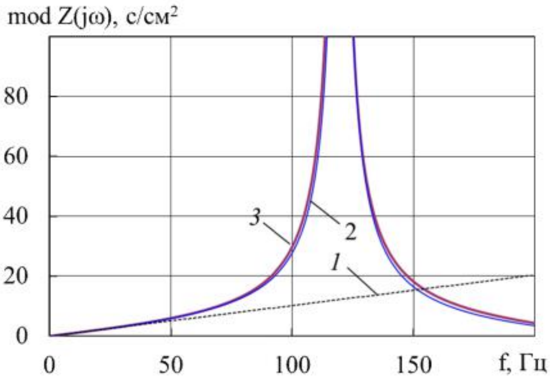

Рис. 2

Проведенные расчеты показали, что в рассмотренном случае место локализации сосредоточенной податливости, при котором получено наилучшее согласование ЧХ трубопровода как системы с распределенными и системы с сосредоточенными параметрами, не изменяется при различной степени заполнения трубопровода, при этом $k_L = 0{,}25$. Величина сосредоточенной податливости жидкости может быть определена по формуле

$$C = \frac{g\,F\,l_Z}{a_Z^2}\,k_C\,, \tag{11}$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли; F – площадь поперечного сечения трубопровода; l_Z – длина заполненного участка трубопровода; a_Z – скорость звука в жидкости; k_C – эмпирический коэффициент, (в рассматриваемом случае его значение не зависит от степени заполнения трубопровода и составляет 0,53).

На основе разработанного подхода к математическому моделированию заполнения гидравлических трактов ЖРД при запуске и результатов анализа расчетных ЧХ заполняемого трубопровода была построена нелинейная математическая модель заполнения тестового трубопровода. Эта модель включает уравнение заполнения трубопровода, описывающее процессы накопления массы жидкости, уравнение движения жидкости от входа до сосредоточенной податливости жидкости, уравнение неразрывности и уравнение движения жидкости от податливости жидкости до фронта заполнения

$$\gamma\,F\,\frac{dl_Z}{dt} = G_2\,, \tag{12}$$

$$J_1(l_Z)\,\frac{dG_1}{dt} = \overline{p}_Б - p_T - a_1(l_Z)\,G_1^2\,, \tag{13}$$

$$C(l_Z)\,\frac{dp_T}{dt} = G_1 - G_2\,, \tag{14}$$

$$J_2(l_Z)\,\frac{dG_2}{dt} = p_T - \overline{p}_K - a_2(l_Z)\,G_2^2\,, \tag{15}$$

где γ – удельный вес жидкости; $\overline{p}_Б$, p_T, $\overline{p}_K$ – давление жидкости на входе в заполняемый трубопровод, в месте локализации сосредоточенной податливости жидкости и на фронте заполнения трубопровода; G_1, G_2 – расход жидкости на входе в заполняемый трубопровод и на выходе из него; $a_1(l_Z)$, $J_1(l_Z)$ и $a_2(l_Z)$, $J_2(l_Z)$ – гидравлическое и инерционное сопротивления жидкости на участке от входа в трубопровод до сосредоточенной податливости и от сосредоточенной податливости до фронта заполнения; $C(l_Z)$ – сосредоточенная податливость жидкости заполняемого трубопровода.

В соответствии с результатами расчета и анализа ЧХ заполняемого тестового трубопровода, получаем:

$$J_1(l_Z) = 0{,}25\,J(l_Z)\,,\;\; J_2(l_Z) = 0{,}75\,J(l_Z)\,,\;\; J(l_Z) = \frac{l_Z}{g\,F}\,,$$

$$a_1(l_Z) = 0{,}25\,a(l_Z)\,,\;\; a_2(l_Z) = 0{,}75\,a(l_Z)\,,\;\; a(l_Z) = a_{\max}\,\left(l_Z / l_{mp}\right),$$

$$C(l_Z) = \frac{g\,F\,l_Z}{a_Z^2}\,k_C\,,$$

где $a_{\max}$ – максимальное гидравлическое сопротивление жидкости, т. е. сопротивление целиком заполненного трубопровода ($l_Z = l_{тр}$).

Некоторые результаты расчетов заполнения тестового трубопровода представлены на рис. 3 (кривая 1 – расчет при номинальном значении податливости, кривая 2 – при увеличенном значении). Из этого рисунка видно, что податливость жидкости в заполняемом трубопроводе может оказывать влияние на время заполнения трубопровода и расходы жидкости на входе и выходе из заполняемого трубопровода. В рассматриваемом случае при увеличении податливости жидкости время заполнения увеличилось с 0,6528 с до 0,6774 с.

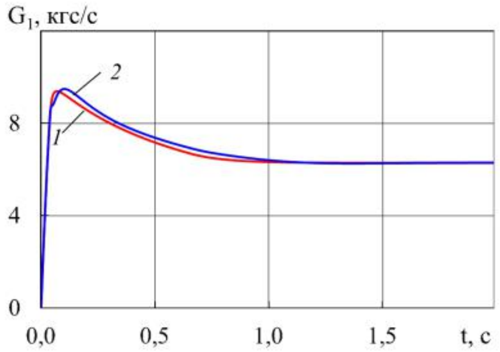

Рис. 3

3. Математическое моделирование низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД при его запуске. Рабочий процесс в камере сгорания и газогенераторе ЖРД представляет собой последовательность сложных взаимосвязанных физико-химических процессов (впрыск, распыление, образование капель, испарение, перемешивание, воспламенение, горение), который трудно описать аналитически. При построении приближенной математической модели низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД обычно принимаются следующие упрощения [10], [16]. Камера сгорания (КС), газогенератор (ГГ) и газовод (ГВ) рассматриваются как элементы с сосредоточенными параметрами; протекающие в них процессы полагаются адиабатическими. Для описания процесса преобразования жидких компонентов топлива в продукты сгорания используется приближенная феноменологическая модель, предложенная М. С. Натанзоном [16], в соответствии с которой реальная кривая выгорания заменяется ступенчатой функцией и аппроксимируется транспортным (чистым) запаздыванием: $\varphi_{выг}(t) = 1(t - \tau)$, где τ – время преобразования жидкого топлива в продукты сгорания (задержка газообразования). Транспортным запаздыванием аппроксимируется также кривая переноса температуры турбулентными потоками газа внутри газового тракта: $\varphi_n(t) = 1(t - \tau')$, где τ' – время пребывания газа на участке газового тракта. Значения τ составляют несколько миллисекунд, τ' – несколько сотых секунды. С учетом этих допущений низкочастотная динамика газовых трактов ЖРД описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями с малыми запаздываниями.

Ниже для примера приведены уравнения, описывающие рабочие процессы в газогенераторе при запуске двигателя с дожиганием генераторного газа:

– уравнение для определения давления в ГГ

$$\frac{dp_{ГГ}}{dt} = \frac{\kappa_{ГГ}(RT)_{ГГ}}{V_{ГГ}}\left(G^*_{ГГО} + G^*_{ГГГ} - G_T\right),$$

– уравнения для определения газообразования в ГГ с учетом задержки газообразования $\tau_{ГГ}$

$$G^*_{ГГО} = G_{ГГО}(t-\tau_{ГГ}), \quad G^*_{ГГГ} = G_{ГГГ}(t-\tau_{ГГ}),$$

– уравнения для определения работоспособности продуктов сгорания топлива на входе в ГГ и на выходе из него

$$(RT)_{ГГ1} = (RT)\ (k^*_{ГГ}), \quad (RT)_{ГГ2} = (RT)_{ГГ1}(t-\tau'_{ГГ}), \quad k^*_{ГГ} = G^*_{ГГО} / G^*_{ГГГ},$$

– уравнение для определения расхода продуктов сгорания на выходе из газогенератора

$$G_T = \mu_T F_T \sqrt{g\frac{2\kappa_{ГГ}}{\kappa_{ГГ}-1}\cdot\frac{p^2_{ГГ}}{(RT)_{ГГ2}}\left[\left(\frac{p_{ГВ}}{p_{ГГ}}\right)^{\frac{2}{\kappa_{ГГ}}} - \left(\frac{p_{ГВ}}{p_{ГГ}}\right)^{\frac{\kappa_{ГГ}+1}{\kappa_{ГГ}}}\right]},$$

где $p_{ГГ}$, $p_{ГВ}$ – давление в ГГ и ГВ; $\kappa_{ГГ}$ – показатель адиабаты в ГГ; $V_{ГГ}$ – объем газового тракта ГГ, включающий в себя объемы газовых полостей ГГ и объем газовой полости от ГГ до соплового аппарата турбины; $(RT)_{ГГ}$ – средняя величина работоспособности продуктов сгорания топлива по объему ГГ; $G_{ГГО}$, $G_{ГГГ}$ – весовые секундные расходы жидкого окислителя и горючего на входе в ГГ; $G^*_{ГГО}$, $G^*_{ГГГ}$ – весовые секундные расходы окислителя и горючего на входе в ГГ с учетом задержки газообразования $\tau_{ГГ}$; $k^*_{ГГ}$ – коэффициент соотношения компонентов топлива в ГГ; $\tau'_{ГГ}$ – время пребывания газа в ГГ; G_T – весовой секундный расход газа через ГГ; $(RT)_{ГГ1}$, $(RT)_{ГГ2}$ – работоспособности продуктов сгорания на входе в газовый тракт ГГ и на выходе из него; F_T, μ_T – площадь и коэффициент расхода сопловой решетки основной турбины двигателя.

Системы уравнений, описывающие возникновение и развитие огневых процессов в КС и ГГ при запуске ЖРД, имеют сходную структуру.

Запаздывания в уравнениях низкочастотной динамики элементов газового тракта и, прежде всего, ГГ существенно влияют на динамические характеристики и устойчивость рабочего процесса в ЖРД с дожиганием генераторного газа (напр., [7], [16] – [19]). Однако в вычислительном аспекте учет запаздываний при математическом моделировании запуска ЖРД создает определенные проблемы, связанные с численным интегрированием гибридной нелинейной нестационарной системы большого порядка, состоящей из дифференциальных и алгебраических уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе [19] анализ устойчивости динамической системы с малыми запаздываниями предложено свести к исследованию аппроксимирующей ее системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и даны методические рекомендации по учету запаздываний в уравнениях динамики газовых трактов при анализе устойчивости низкочастотных процессов в ЖРД на установившемся режиме. Для перехода от уравнения звена запаздывания

$$y(t) = x(t - \tau) \tag{16}$$

к ОДУ используется подход, основанный на аппроксимации передаточной функции звена запаздывания $W_e(p\tau) = \exp(-p\tau)$ в области малого параметра $p\tau$ дробно-рациональной функцией $F_{m,n}(p\tau)$:

$$W_e(p\tau) \approx F_{m,n}(p\tau) = \frac{B_m(p\tau)}{A_n(p\tau)} = \frac{b_0 + b_1 p\tau + ... + b_m p^m \tau^m}{a_0 + a_1 p\tau + ... + a_n p^n \tau^n} \quad , \tag{17}$$

где p – комплексная переменная преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях; $B_m(p\tau)$, $A_n(p\tau)$ – полиномы m-го и n-го порядка с действительными коэффициентами ($m \le n$).

Трансцендентное уравнение $y = W_e(p\tau)x$, соответствующее в области изображений уравнению (16), приближенно заменяется уравнением

$$y \approx F_{m,n}(p\tau)\, x = \frac{b_0 + b_1 p\tau + ... + b_m p^m \tau^m}{a_0 + a_1 p\tau + ... + a_n p^n \tau^n}\, x\,. \tag{18}$$

Уравнению (16) соответствует ОДУ n-го порядка [20]

$$a_0\, y + a_1 \tau \frac{dy}{dt} + ... + a_n \tau^n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0\, x + b_1 \tau \frac{dx}{dt} + ... + b_m \tau^m \frac{d^m x}{dt^m}\ . \tag{19}$$

Располагая удовлетворительным приближением $F_{m,n}(p\tau) \approx W_e(p\tau)$, с помощью описанной схемы легко перейти от уравнений с запаздываниями к ОДУ. Отметим, что при этом количество уравнений в системе увеличивается.

Такой переход считается корректным, если в частотном диапазоне модели обеспечивается приемлемая точность вычисления динамических характеристик ЖРДУ, а устойчивому состоянию исходной системы соответствует устойчивое состояние аппроксимирующей системы [19].

Выбор подходящего аппроксиманта для математической модели низкочастотной динамики ЖРД при запуске осложняется следующими факторами. Во-первых, наличие у аппроксимирующей функции (17) полюсов в правой полуплоскости может привести к ошибке в прогнозе динамических характеристик и устойчивости системы. Во-вторых, проведенное тестирование показало, что при численном интегрировании системы уравнений, описывающих низкочастотную динамику ЖРД при запуске с использованием аппроксимантов $F_{m,n}(p\tau)$, $m = n$, возникала неустойчивость счета. К такому же результату приводило использование аппроксимантов высокого порядка ($n > 3$).

В связи с этим к функциям $F_{m,n}(p\tau)$, применяющимся при математическом моделировании запуска ЖРД, предъявляются следующие требования:

– отсутствие полюсов в правой полуплоскости;

– $n \le 3$, $m < n$;

– приемлемая точность аппроксимации ЧХ звена запаздывания в интервале $0 \le \omega\tau \le (\omega\tau)_{\max}$, $\omega = 2\pi f$, соответствующем частотному диапазону модели $0 \le f \le f_{\max}$, $f_{\max} = 30 \ldots 50$ Гц.

– приемлемая точность аппроксимации коэффициента усиления ЖРД в частотном диапазоне модели.

Из рассмотренных в [19] аппроксимантов первым двум требованиям удовлетворяют три функции, получаемые при замене звена запаздывания апериодическим звеном, колебательным звеном и цепочкой из двух колебательных звеньев. Это дробные ряды Тейлора 1-го и 2-го порядка

$$T_{0,1}(p\tau) = 1/(1+p\tau),\quad T_{0,2}(p\tau) = 1/(1+p\tau+0{,}5p^2\tau^2)$$

и, соответственно, функция

$$R_{2(T_{02})}(p\tau) = [T_{0,2}(0{,}5p\tau)]^2 = 1/(1+0{,}5p\tau+0{,}125p^2\tau^2)^2 . \qquad (20)$$

Схема перехода от передаточной функции (20) к ОДУ описана в [19]. В результате ее реализации уравнение звена запаздывания (16) заменяется двумя дифференциальными уравнениями 2-го порядка

$$0{,}125\tau^2\frac{d^2z(t)}{dt^2} + 0{,}5\tau\frac{dz(t)}{dt} + z(t) = x(t),$$
$$0{,}125\tau^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0{,}5\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = z(t)$$

с начальными условиями $z(t_0) = y(t_0) = x(t_0 - \tau/2)$.

Функции $T_{0,1}(p\tau)$, $T_{0,2}(p\tau)$ обеспечивают приемлемую точность в очень узком диапазоне изменения $\omega\tau$, а аппроксимант $R_{2(T_{02})}(p\tau)$ имеет относительно высокий порядок ($n = 4$). В настоящей работе предложены более точные аппроксиманты передаточной функции звена запаздывания, имеющие невысокий порядок. Для их построения использовалось разложение функции $\exp(z)$ в ряд Тейлора, записанное в аналитическом виде, и метод неопределенных коэффициентов [21]. Полученные аппроксиманты имеют вид:

$$P_{1,2}(p\tau) = \frac{6-2p\tau}{6+4p\tau+(p\tau)^2}, \qquad (21)$$

$$P_{1,3}(p\tau) = \frac{24-6p\tau}{24+18p\tau+6(p\tau)^2+(p\tau)^3}, \qquad (22)$$

$$P_{2,3}(p\tau) = \frac{60-24p\tau+3(p\tau)^2}{60+36p\tau+9(p\tau)^2+(p\tau)^3}. \qquad (23)$$

На рис. 4, 5 помещены результаты расчета амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и погрешностей определения фазочастотной характеристики

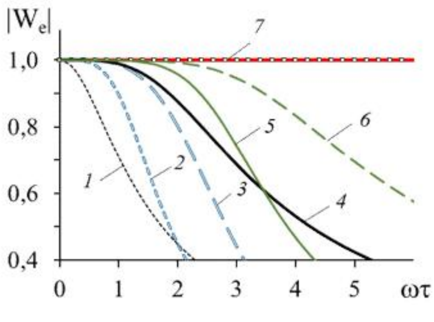

Рис. 4

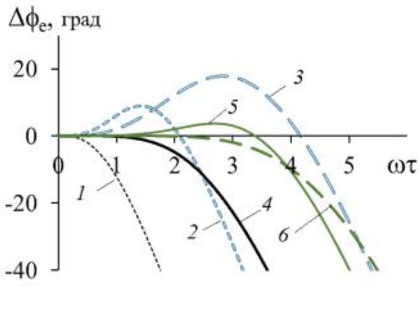

Рис. 5

(ФЧХ) звена запаздывания при аппроксимации его передаточной функции разными дробно-рациональными выражениями: кривые 1, 2, 3 – функциями $T_{0,1}(p\tau)$, $T_{0,2}(p\tau)$, $R_{2(T_{02})}(p\tau)$, кривые 4, 5, 6 – функциями $P_{1,2}(p\tau)$, $P_{1,3}(p\tau)$, $P_{2,3}(p\tau)$. Цифрой 7 на рис. 4 обозначена АЧХ непосредственно звена запаздывания: $|W_e(j\omega\tau)| = |\exp(j\omega\tau)| = 1$.

Из рисунков видно, что предложенные аппроксиманты (21) – (23), имея меньший порядок, чем аппроксимант (20), превосходят его по точности и могут применяться в гораздо более широком диапазоне изменения $\omega\tau$.

На рис. 6 приведены результаты расчетов модуля коэффициента усиления ЖРД с дожиганием окислительного генераторного газа (здесь $\delta\overline{p}_{1БНО}$ и $\delta\overline{p}_{K}$ – отклонения давления на входе в бустерный насос окислителя и в КС от номинальных значений). Расчеты проводились с учетом трех запаздываний, оказывающих наибольшее влияние на коэффициент усиления ЖРД – задержки газообразования в ГГ ($\tau_{ГГ}$ = 0,003с), времени пребывания газа в ГГ и ГВ ($\tau'_{ГГ}$ = 0,012 с, $\tau'_{ГВ}$ = 0,035 с). Кривая 1 на рис. 6 представляет модуль исходного коэффициента усиления ЖРД, кривые 2, 3, 4 – аппроксимированного с использованием разных наборов дробно-рациональных функций. Во всех трех вариантах 2 – 4 в уравнениях, описывающих газообразование в газогенераторе (с учетом задержки газообразования $\tau_{ГГ}$), для аппроксимации передаточных функций звеньев запаздывания использовался дробный ряд Тейлора 1-го порядка, а в уравнениях динамики газовода – функция $R_{2(T_{02})}(p\tau)$. Для уравнений с наиболее значимым запаздыванием – временем пребывания газа в газогенераторе – использовались разные дробно-рациональные функции: $T_{0,1}(p\tau)$, $R_{2(T_{02})}(p\tau)$, $P_{1,2}(p\tau)$. Результаты расчета модуля коэффициента усиления ЖРД, полученного при использовании указанных наборов аппроксимантов, показаны на рис. 6 кривыми 2, 3 и 4 соответственно.

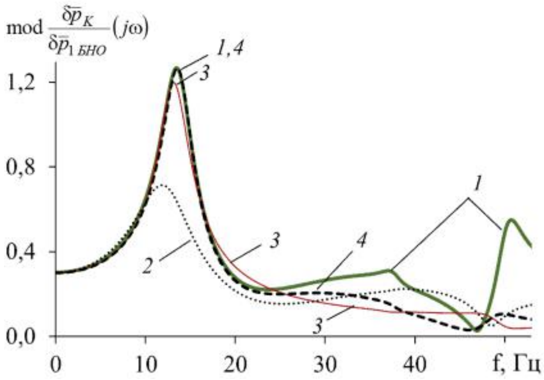

Рис. 6

Как видно из рис. 4, 5, приемлемую точность определения коэффициента усиления ЖРД обеспечивают два аппроксиманта – $P_{1,2}(p\tau)$ и $R_{2(T_{02})}(p\tau)$, однако при этом аппроксимант $P_{1,2}(p\tau)$ имеет вдвое меньший порядок, а его точность несколько выше.

Для демонстрации подхода по учету запаздываний в уравнениях динамики газовых трактов ЖРД были проведены расчеты запуска современного маршевого ЖРД [7], [17] с дожиганием генераторного газа. Результаты этих расчетов (в качестве примера – для давления в газогенераторе) представлены на рис. 7 (кривая 1 – расчет без учета запаздываний, кривые 2, 3, 4 – с учетом задержки газообразования в ГГ и времени пребывания газа в ГГ и ГВ). Учет этих трех запаздываний осуществлялся по таким же схемам, что и при расчете коэффициента усиления ЖРД. Нумерация кривых на рис. 7 соответствует их нумерации на рис. 6.

Результаты расчетов показали, что запаздывания в уравнениях динамики ГГ и ГВ заметно увеличивают «забросы» и «провалы» давлений, а использование аппроксимантов $R_{2(T_{02})}(p\tau)$ и $P_{1,2}(p\tau)$ для учета этих запаздываний дает близкие по точности результаты (кривые 3 и 4).

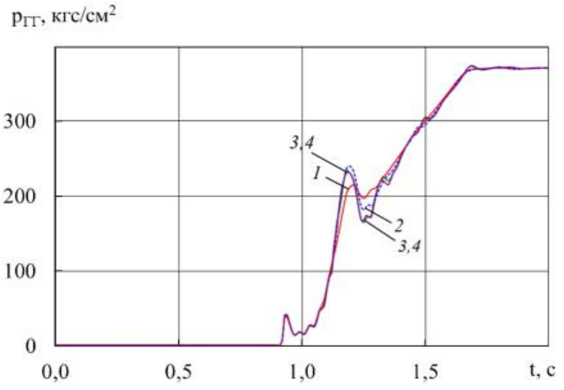

Рис. 7

Таким образом, функция $P_{1,2}(p\tau)$ является лучшим из рассмотренных дробно-рациональных аппроксимантов передаточной функции звена запаздывания. Она может быть рекомендована к использованию при математическом моделировании низкочастотных процессов в ЖРД при запуске для приближенной замены уравнений с запаздываниями (в частности, уравнений низкочастотной динамики газогенератора и газовода) обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Выводы. Рассмотрены вопросы математического моделирования динамических процессов в гидравлических и газовых трактах при запуске ЖРД с дожиганием генераторного газа.

Представлен подход к математическому моделированию низкочастотной динамики кавитирующих насосов ЖРД на переходных режимах. На основе этого подхода проведена корректировка зависимостей упругости и объема кавитационных каверн от режимных параметров для расширенного диапазона изменения чисел кавитации и выполнена адаптация математической модели динамики насосов к большим числам кавитации. Адаптированная математическая модель динамики кавитирующих насосов сохраняет свою структуру и работоспособность в широком диапазоне изменения чисел кавитации и при взаимных переходах с кавитационного режима работы насоса на бескавитационный, что необходимо для выполнения численных исследований рабочих процессов в ЖРД при запуске двигателя. Проведена серия расчетов запуска современного маршевого ЖРД с дожиганием генераторного газа и показано, что использование предложенной модели позволяет уточнить характеристики переходного процесса, в частности, величины «забросов» и «провалов» при гидравлических ударах, которые могут иметь место при запуске ЖРД.

Разработан подход к построению нелинейной математической модели заполнения гидравлических трактов ЖРД при запуске двигателя, который позволяет при необходимости изменять схему разбиения топливных магистралей на конечные элементы в процессе их заполнения. В основе этого подхода лежит математическое моделирование динамики гидравлических трактов ЖРД как системы с распределенными параметрами и ее аппроксимация системой с сосредоточенными параметрами, построенной из конечных гидродинамических элементов. Коэффициенты инерционного, гидравлического и емкостного сопротивления магистралей определяются из условия согласования частотных характеристик указанных систем при разной степени заполнения магистралей и используются для построения уточненной нелинейной модели низкочастотной динамики гидравлического тракта.

В развитие разработанного ранее подхода к приближенной замене уравнений с запаздываниями в математической модели низкочастотной динамики газовых трактов ЖРД обыкновенными дифференциальными уравнениями, для аппроксимации передаточных функций звеньев запаздывания предложены дробно-рациональные функции, построенные с учетом особенностей расчета переходных процессов при запуске ЖРД. На основе расчета частотных характеристик ЖРД с дожиганием генераторного газа и переходных процессов при запуске ЖРД проведено тестирование предложенных аппроксимантов. Показано, что запаздывания в уравнениях динамики газогенератора и газовода ЖРД с дожиганием генераторного газа оказывают заметное влияние на характеристики переходных процессов при запуске ЖРД с дожиганием генераторного газа, а использование предложенных аппроксимантов для учета этих запаздываний позволяет повысить точность результатов математического моделирования при минимальном усложнении математической модели и не создает проблем при численном интегрировании.

Использование предложенных математических моделей низкочастотной динамики гидравлических и газовых трактов ЖРД при моделировании запуска ЖРД позволит повысить достоверность результатов математического моделирования.

Исследования выполнены за счет финансирования по бюджетной программе «Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

1. *Беляев Е. Н., Черваков В. В.* Математическое моделирование ЖРД. М.: МАИ-ПРИНТ. 2009. 280 с.
2. *Солнцев В. Л., Радугин И. С., Задеба В. А.* Основные требования к маршевым двигателям перспективных ракет-носителей сверхтяжелого класса с жидкостными ракетными двигателями. Космическая техника и технологии. 2015. № 2(9). С. 25–38.
3. *Галеев А. Г., Иванов В. Н., Катенин А. В., Лисейкин В. А., Пикалов В. П., Поляков А. Д., Сайдов Г. Г., Шибанов А. А.* Методология экспериментальной отработки ЖРД и ДУ, основы проведения испытаний и устройства испытательных стендов. Киров: МЦНИП. 2015. 436 с. URL: http://www.nic-rkp.ru/doc/metodologiya.pdf
4. *Каторгин Б. И., Чванов В. К., Беляев Е. Н., Черваков В. В.* Математическое моделирование процессов в современных ЖРД. Двигатель. 2002. № 4(22). С. 13–16.
5. Машиностроение. Энциклопедия. В 40 т. Под общ.ред. *К. В. Фролова*. Ракетно-космическая техника. Т. IV-22 / *А. П. Аджян, Э. Аким, О. М. Алифанов* и др.; под ред. *В. П. Легостаева*. В 2 кн. Кн. 1. М.: Машиностроение. 2012. 925 с.
6. *Liu Wei, Chen Liping, Xie Gang, Ding Ji, Zhang Haiming, Yang Hao* Modeling and Simulation of Liquid Propellant Rocket Engine Transient Performance Using Modelica. Proc. of the 11th Int. Modelica Conf., 2015, Sept. 21–23, Versailles. France. P. 485–490. URL: www.ep.liu.se/ecp/118/052/ecp15118485.pdf от 13.07.2017
7. *Пилипенко О. В., Прокопчук А. А., Долгополов С. И., Писаренко В. Ю., Коваленко В. Н., Николаев А. Д., Хоряк Н. В.* Особенности математического моделирования низкочастотной динамики маршевого ЖРД с дожиганием генераторного газа при запуске. Космічна наука і технологія. 2017. Т. 23, № 5. С. 3–12. https://doi.org/10.15407/knit2017.05.003
8. *Лебединский Е. В., Калмыков Г. П., Мосолов С. В. И.* и др. ; под ред. *Коротеева А. С.* Рабочие процессы в жидкостном ракетном двигателе и их моделирование. М.: Машиностроение. 2008. 512 с.
9. *Di Matteo, Fr., De Rosa, M., Onofri, M.* Start-Up Transient Simulation of a Liquid Rocket Engine. AIAA 2011-6032 47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (31 July - 03 August 2011), San Diego, California. 15p. URL: www.enu.kz/repository/2011/AIAA-2011-6032.pdf. https://doi.org/10.2514/6.2011-6032
10. *Шевяков А. А., Калнин В. М., Науменкова М. В., Дятлов В. Г.* Теория автоматического управления ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978. 288 с.
11. *Пилипенко В. В., Задонцев В. А., Натанзон М. С.* Кавитационные колебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение. 1977. 352 с.
12. *Пилипенко В. В.* Кавитационные автоколебания. К: Наук.думка. 1989. 316 с.

13. *Пилипенко В. В., Долгополов С. И.* Экспериментально-расчетное определение коэффициентов уравнения динамики кавитационных каверн в шнекоцентробежных насосах различных типоразмеров. Техническая механика. 1998. № 8. С. 50–56. https://doi.org/10.1016/S0262-1762(99)80457-X
14. *Долгополов С. И.* Адаптация гидродинамической модели кавитационных колебаний для моделирования динамических процессов в насосных системах при больших числах кавитации. Техническая механика. 2017. № 2. С. 12–19. https://doi.org/10.15407/itm2017.02.012
15. *Долгополов С. И., Заволока А. Н., Николаев А. Д., Свириденко Н. Ф., Смоленский Д, Э.* Определение параметров гидродинамических процессов в системе питания космической ступени при остановах и запусках маршевого двигателя. Техническая механика. 2015. № 2. С. 23–36.
16. *Гликман Б. Ф.* Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 396 с.
17. *Пилипенко О. В., Прокопчук А. А., Долгополов С. И., Хоряк Н. В., Николаев А. Д., Писаренко В. Ю., Коваленко В. Н.* Математическое моделирование и анализ устойчивости низкочастотных процессов в маршевом ЖРД с дожиганием генераторного газа. Вестник двигателестроения. 2017. № 2. С. 34–42.
18. *Гемранова Е. А., Колбасенков А. И., Кошелев И. М., Левочкин П. С., Мартиросов Д. С.* Способы подавления низкочастотных колебаний в ЖРД на режимах глубокого дросселирования. НПО Энергомаш им. акад. В.П. Глушко (Химки), 2013. № 30. С. 104–110.
19. *Хоряк Н. В., Долгополов С И.* Особенности математического моделирования динамики газовых трактов в задаче об устойчивости низкочастотных процессов в жидкостных ракетных двигателях. Техническая механика. 2017. № 3. С. 30–44. https://doi.org/10.15407/itm2017.03.030
20. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1987. 712 с.
21. *Апресян Л. А.* Аппроксиманты Паде (обзор). Известия вузов. Радиофизика. 1979. Т. XXII, № 6. С. 653–674. https://doi.org/10.1007/BF01081220

Получено 06.11.2019,
в окончательном варианте 20.11.2019