

УДК 519.876.5, 663.452.2

## ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ТА АЛГОРИТМУ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕРВАЛЬНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

Т.М.Дивак, Ю.Р.Піговський, М.П.Дивак, Є.О.Марценюк

Тернопільський національний економічний університет,  
[mdy@tneu.edu.ua](mailto:mdy@tneu.edu.ua), [pigovsky@gmail.com](mailto:pigovsky@gmail.com)

Статтю присвячено питанням моделювання класу динамічних нелінійних нестационарних систем, у яких невизначеність динаміки лежить в апіорі відомих межах. Досліджено обчислювальні характеристики і збіжність нового методу ідентифікації моделей таких систем, що забезпечує задану точність прогнозування динаміки процесів у межах нестационарності і вимірних похибок. Дослідження виконано для класу хіміко-технологічних систем, що описуються моделями трьох рівнів складності при заданні похибки прогнозування в діапазоні типових для даного класу систем значень (15%-30%).  
*Ключеві слова:* моделювання із заданою точністю, методи ідентифікації, динамічні нелінійні нестационарні системи, дослідження обчислювальних характеристик, дослідження збіжності.

This study is devoted to modeling dynamical nonlinear non-stationary systems, whose uncertainty lies in a priori known bounds. The convergence and computational properties of a new method for identifying models of such systems is studied. The method provides specified prediction accuracy for dynamic processes within the bounds of non-stationary and measurement errors. A research for a class of chemical-engineering systems, which are described by models of three levels of difficulty and for typical prediction errors (15% -30%) is conducted.

*Keywords:* modeling under specified accuracy, identification methods, dynamical nonlinear non-stationary systems, computation properties, convergence properties.

Статья посвящена вопросам моделирования класса динамических нелинейных нестационарных систем, в которых неопределенность динамики лежит в априори известных пределах. Исследованы вычислительные характеристики и сходимость нового метода идентификации моделей этих систем, который обеспечивает заданную точность прогнозирования динамики процессов в пределах нестационарности и измерительных погрешностей. Исследование выполнено для класса химико-технологических систем, описываемых моделями трех уровней сложности при погрешностях прогнозирования в диапазоне типичных для данного класса систем значений (15% -30%).

*Ключевые слова:* моделирование с заданной точностью, методы идентификации, динамические нелинейные нестационарные системы, исследование вычислительных характеристик, исследование сходимости.

Одною із основних проблем сьогодення є пошук ефективних методів управління складними системами. Важливим інструментом розв'язування задач управління є методи математичного моделювання за умов невизначеності. Одним із класів складних систем є динамічні нелінійні нестационарні системи, моделювання яких є надзвичайно складним. Проте нестационарність в таких системах часто пов'язана із наявним шумом у вихідних змінних, статистичні характеристики якого змінюються в часі, але не виходять за відомі межі. До таких систем слід віднести хіміко-технологічні системи, де, незважаючи на

відсутність достатніх вибірок статистичних даних, невизначеність спостережень залишається в апіорі відомих межах. Для ідентифікації таких моделей доцільно використовувати інші, нетрадиційні підходи, які б забезпечували задану точність прогнозування динаміки процесів у межах нестационарності чи вимірювальних похибок, тобто включення прогнозованого коридору в експериментальний. Такі задачі розглянуто у праці [1], а алгоритми їх розв'язування – у праці [2]. Проте актуальними залишаються практичні аспекти дослідження вказаних методів, зокрема обчислювальної складності та збіжності при моделюванні різноманітних систем та за умов різної складності моделей.

**Постановка задачі.** Розглянемо багатовимірну динамічну систему за умов повної спостережуваності. Припустимо, що результати спостереження за вихідними змінними містять адитивні похибки, з невідомими статистичними характеристиками, але з відомими граничними значеннями. Таку систему будемо описувати у загальному випадку нелінійними рівняннями динаміки, а зв'язки між вихідними змінними та змінними стану системи представимо лінійними рівняннями

$$\begin{cases} x_{1k+1} = f_1(\bar{g}_1, \bar{q}_1, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \\ \vdots \\ x_{ik+1} = f_i(\bar{g}_i, \bar{q}_i, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \\ \vdots \\ x_{mk+1} = f_m(\bar{g}_m, \bar{q}_m, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \end{cases}, k = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$\bar{y}_{k+1} = C \cdot \bar{x}_{k+1} + \bar{e}_{k+1}, k = 0, \dots, N-1, \quad (2)$$

де  $f_i, i=1, \dots, m$  – в загальному випадку нелінійні функції за параметрами та за  $\bar{x}_k$  і  $\bar{u}_k$ ;

$\bar{g}_i$  – невідомі вектори параметрів системи,  $\bar{g}_i \in R^m, i=1, \dots, m$ ;  $\bar{q}_i$  – невідомі вектори параметрів управлінь,  $\bar{q}_i \in R^p, i=1, \dots, m$ ;  $C = R^{m \times n}$  – відома матриця виходів;  $k$  – дискретне часове значення,  $k = 0, \dots, N-1$ ;  $\bar{y}_{k+1}$  – вектор вихідних змінних об'єкта,  $\bar{y}_{k+1} \in R^n$ ;  $\bar{x}_k$  – вектор змінних стану об'єкта в  $k$ -й дискретний момент часу,  $\bar{x}_k \in R^m$ ;  $\bar{x}_{k+1}$  – вектор змінних стану системи в  $k+1$ -й дискретний момент часу,  $\bar{x}_{k+1} \in R^m$ ;  $\bar{u}_k$  – вектор управлінь в  $k$ -й дискретний момент часу,  $\bar{u}_k \in R^p$ ;  $\bar{e}_{k+1} = (e_{1k+1}, e_{2k+1}, \dots, e_{nk+1})^T$  – вектор похибок із відомими граничними значеннями.

Для похибок спостережень усіх виходів виконуються такі умови:

$$|e_{jk+1}| \leq \Delta_{jk+1}, \Delta_{jk+1} > 0, j = 1, \dots, n, k = 0, \dots, N-1. \quad (3)$$

де  $\Delta_{jk+1}$  – гранична амплітуда похибки спостереження за відповідним виходом.

Позначимо за **Tol** перетворення, що дозволяє отримати допускові оцінки інтервалів вектора параметрів стану  $[\bar{z}_{k+1}^-; \bar{z}_{k+1}^+]$  на основі даних спостережень за вихідними змінними, тобто:

$$[\bar{z}_{k+1}] = [\bar{z}_{k+1}^-; \bar{z}_{k+1}^+] = \mathbf{Tol}(\bar{y}_{k+1}, |\bar{e}_{k+1}| \leq \bar{\Delta}_{k+1}, C), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (4)$$

де  $\bar{\Delta}_{k+1} = (\Delta_{1k+1}, \dots, \Delta_{jk+1}, \dots, \Delta_{nk+1})^T$ .

Умовою отримання допускових коридорів динаміки параметрів стану системи є таке включення:

$$[\hat{x}_{k+1}] = [\hat{x}_{k+1}^-; \hat{x}_{k+1}^+] \subseteq [\bar{z}_{k+1}] = [\bar{z}_{k+1}^-; \bar{z}_{k+1}^+], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

де

$$\begin{cases} [\hat{x}_{1k+1}] = f_1(\hat{g}_1, \hat{q}_1, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \\ \vdots \\ [\hat{x}_{ik+1}] = f_i(\hat{g}_i, \hat{q}_i, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \\ \vdots \\ [\hat{x}_{mk+1}] = f_m(\hat{g}_m, \hat{q}_m, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (6)$$

При цьому передбачаємо, що інтервальні оцінки змінних стану у момент  $k=0$  є відомими, або задамо їх у такий спосіб, щоб вони належали інтервальним оцінкам змінних стану, що отримані за результатами спостережень за вихідними змінними, тобто

$$[\hat{x}_{k=0}] = [\hat{x}_0] \subseteq [\bar{z}_0]. \quad (7)$$

Математичні моделі представлені системою (6) називатимемо інтервальними моделями дискретної динамічної нелінійної системи.

Користуючись умовами (5), виразами для моделей об'єкта (6) та відомими інтервальними оцінками змінних стану у початковий момент (7), складемо систему інтервальних рівнянь для оцінювання параметрів  $\bar{g}_i$  моделі системи та управлінь  $\bar{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{x}_{k=0}] = [\hat{x}_0] \subseteq [\bar{z}_0] \\ z_{1k+1}^- \leq f_1(\hat{g}_1, \hat{q}_1, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \leq z_{1k+1}^+ \\ \vdots \\ z_{ik+1}^- \leq f_i(\hat{g}_i, \hat{q}_i, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \leq z_{ik+1}^+ \\ \vdots \\ z_{mk+1}^- \leq f_m(\hat{g}_m, \hat{q}_m, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \leq z_{mk+1}^+, \quad k = 0, \dots, N-1. \\ [\hat{x}_{1k+1}] = f_1(\hat{g}_1, \hat{q}_1, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \\ \vdots \\ [\hat{x}_{ik+1}] = f_i(\hat{g}_i, \hat{q}_i, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \\ \vdots \\ [\hat{x}_{mk+1}] = f_m(\hat{g}_m, \hat{q}_m, [\hat{x}_k], \bar{u}_k) \end{array} \right. \quad (8)$$

Зауважимо, що інтервальні оцінки вектора змінних стану  $[\vec{z}_{k+1}] = [\vec{z}_{k+1}^-; \vec{z}_{k+1}^+]$  отримані за результатами спостережень за вихідними змінними системи для заданих дискретних значень вектора управління  $\vec{u}_{k+1}$ . Методи отримання цих оцінок в залежності від розмірності матриці виходів  $C$  у достатній мірі розглянуті у праці [3]. У праці [2] розглянуто алгоритм розв'язування даної задачі.

**Особливості алгоритму.** В основу процедури пошуку розв'язків системи (8) покладено ітераційний метод уточнення наближеного розв'язку, описаний у праці [2]. Розглянемо даний алгоритм детальніше.

Крок 1. Задання початкового наближення  $\hat{g}_0$ . Для лінійної дискретної динамічної системи цей розв'язок можемо отримати із розв'язку задачі

$$g_j \rightarrow \min(\max).$$

за обмежень, заданих системою (8).

Крок 2. Покладемо  $l = 0$ , де  $l$  - номер ітерації пошуку  $\hat{g}_{dop}$ .

Крок 3. Обчислення  $[\hat{x}_{l+1,k+1}], k = 0, \dots, N-1$  за формулами (6), модифікованими для  $l+1$  - ітерації:

$$\begin{cases} [\hat{x}_{1k+1}^{l+1}] = f_1(\hat{g}_{1l+1}, \hat{q}_{1l+1}, [\hat{x}_k], \vec{u}_k) \\ \vdots \\ [\hat{x}_{mk+1}^{l+1}] = f_m(\hat{g}_{ml+1}, \hat{q}_{ml+1}, [\hat{x}_k], \vec{u}_k) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

Крок 4. Обчислення величини, що задає якість поточного наближення до допускового вектора за формулою

$$\delta_{l+1} = \max_{k+1=1 \dots N, i=1, \dots, m} \{wid([\hat{x}_{ik+1}^{l+1}]) - wid([\hat{x}_{ik+1}^{l+1}] \cap [z_{ik+1}])\}$$

Крок 5. Якщо  $\delta_l = 0$ , обчислене за вищенаведеною формулою, то  $\hat{g}_{dop} = \hat{g}_l$  і кінець пошуку, інакше – покладемо  $l=l+1$  і перехід на крок 6.

Крок 6. Генерування вектора  $\vec{\xi}_l$  за формулою:

$$\vec{\xi}_l = r \cdot \left( \frac{\Delta g_{11l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta g_{1ml}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta g_{m1l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta g_{mml}}{R_l}, \frac{\Delta q_{11l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta q_{1pl}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta q_{m1l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta q_{mpl}}{R_l} \right), \quad (9)$$

де  $\Delta g_{11l}, \dots, \Delta g_{1ml}, \dots, \Delta g_{m1l}, \dots, \Delta g_{mml}, \Delta q_{11l}, \dots, \Delta q_{1pl}, \dots, \Delta q_{m1l}, \dots, \Delta q_{mpl}$  – випадкові числа, згенеровані відповідно до рівномірного закону розподілу на інтервалі  $[-1;1]$ ;

$$R_l = \left( (\Delta g_{11l})^2 + (\Delta g_{1ml})^2 + \dots + (\Delta g_{m1l})^2 + \dots + (\Delta g_{mml})^2 + (\Delta q_{11l})^2 + \dots + (\Delta q_{1pl})^2 + \dots + (\Delta q_{m1l})^2 + \dots + (\Delta q_{mpl})^2 \right)^{1/2}.$$

Параметр пошуку  $r$  отримуємо на кожній ітерації за допомогою алгоритму настроювання, який розглянемо окремо.

Крок 7. Обчислення нового наближення  $\hat{g}_{l+1}$  за формулою

$$\hat{g}_{l+1} = \hat{g}_l + \bar{\xi}_l \quad (10)$$

і перехід на крок 3.

Як видно із формули (10) „якість“ нового наближення залежить від згенерованого вектора  $\bar{\xi}_l$ , зокрема від оптимального вибору параметра пошуку  $r$ . З метою забезпечення співвідношення  $\hat{g}_{l+1} \succ \hat{g}_l$ , де  $\succ$  – відношення переваги, а також забезпечення швидкої збіжності алгоритму необхідно розробити алгоритм настроювання параметра пошуку  $r$ . Для настроювання параметра  $r$  використовують метод дихотомії.

**Практичні аспекти реалізації алгоритму.** Метою даної праці є дослідження складності та збіжності розглянутого алгоритму.

Дослідження часової складності та збіжності запропонованого методу проведемо на основі комп'ютерного моделювання шляхом застосування розробленого методу і алгоритму та на їх основі програмного забезпечення для розв'язування задач параметричної ідентифікації дискретних динамічних лінійних та нелінійних моделей різної складності. Спроектвані UML-діаграми, на основі яких створено програмне забезпечення. Метою дослідження є встановлення ступеня впливу кількості параметрів моделі, точності моделі, яка задається шириною коридору на часову складність практичної реалізації методу.

Для досягнення вказаної мети використовуватимемо ряд відомих в теорії систем дискретних динамічних моделей [4-6] за різних умов їх побудови. А саме обчислювальні експерименти побудуємо таким чином, щоб для кожної моделі різної складності (із різною кількістю невідомих параметрів) встановити часову складність реалізації розробленого методу та алгоритму параметричної ідентифікації для шести варіантів задання точності 30%, 25%, 20%, 15%, 10%, 5%. Окрім цього, враховуючи використання процедури випадкового пошуку параметрів у запропонованому методі параметричної ідентифікації із настроюванням кроку необхідно для кожного випадку проводити серію експериментів і за оцінку часової складності реалізації методу приймати їхнє вибіркове середнє значення. Приймаємо кількість експериментів у серії за 10. Отже для кожної моделі необхідно провести 60 експериментів. З метою забезпечення чистоти обчислювальних експериментів за початкові умови для пошуку параметрів для усіх моделей приймаємо вектор параметрів із нульовими компонентами. Результати експериментів зводимо в таблиці, які в подальшому використовуємо для побудови залежностей, необхідних для аналізу часової складності та формулювання рекомендацій щодо практичного використання розробленого методу параметричної ідентифікації.

Найпростішою серед розглянутих у дослідженні моделей є дискретна динамічна модель, що описує колективи біологічних організмів, побудована із застосуванням явної схеми Ейлера – модель Мальтуса [4]

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + hA_1x_{1,k}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (11)$$

де  $A_1$  – коефіцієнт інтенсивності росту колективу організмів ( $A_1 > 0$ ). Інтервальні дані різної точності для проведення обчислювальних експериментів параметричної ідентифікації моделей у вигляді (11) підготовані за допомогою дискретної схеми

$$\left[ x_{1,k+1}^-; x_{1,k+1}^+ \right] = \left[ \left( x_{1,k} + hA_1x_{1,k} \right) \left( 1 - \frac{\delta}{100\%} \right); \left( x_{1,k} + hA_1x_{1,k} \right) \left( 1 + \frac{\delta}{100\%} \right) \right], \quad (12)$$

$$k = 0, \dots, N-1,$$

де  $h = 1.00$ ,  $A_1 = 0.20$ ,  $x_{1,k}$  – точне значення змінної стану чисельності популяції в  $k$ -ту часову дискрету, що в нашому випадку тотожне центру інтервалу  $[x_{1,k}^-; x_{1,k}^+]$ ,  $x_{1,0} = 2.00$  – точне початкове значення змінної стану,  $\delta$  – значення похибки формованих схемою інтервальних даних у процентах.

За допомогою схеми (12) сформовано дискретні інтервальні дані для модельних експериментів параметричної ідентифікації моделі Мальтуса (11) з точністю  $\delta = \{30\%, 25\%, 20\%, 15\%, 10\%, 5\% \}$ .

Результати ідентифікації параметрів (11) за даними схеми (12) на основі розробленого методу наведено в таблиці 1. У цій же таблиці наведено часову складність реалізації методу, де значення, розділені двокрапками відповідають кількості хвилин, секунд і мілісекунд, відповідно.

Таблиця 1

Результати комп'ютерного дослідження методу параметричної ідентифікації дискретної динамічної моделі Мальтуса

Структура моделі	$x_{1,k+1} = x_{1,k} + hA_1x_{1,k}$					
Точність моделі	30%	25%	20%	15%	10%	5%
Значення параметрів моделі	$A_1=21,769$	$A_1=21,849$	$A_1=21,935$	$A_1=22,005$	$A_1=22,026$	$A_1=22,088$
Часова складність реалізації методу, с	0:1:826	0:1:886	0:1:991	0:2:147	0:2:230	0:2:890

Результати розв'язування рівняння (11), побудованого за даними схеми (12) при точності  $\delta = 5\%$  наведено на рис. 1. Як видно, отримана математична модель є адекватною, оскільки прогнозовані інтервали знаходяться в межах експериментальних.

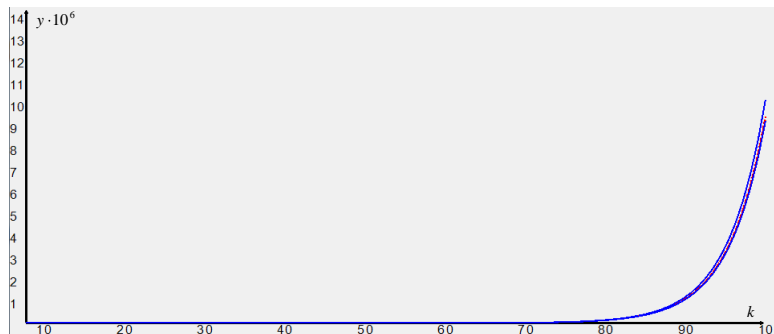


Рис. 1. Інтервальна дискретна динамічна модель Мальтуса

Таблиця 1 в подальшому буде слугувати для оцінки обчислювальної складності методу параметричної ідентифікації дискретних моделей динамічних систем.

Наступна модель для дослідження складності методу представлена у вигляді логістичного рівняння Ферхюльста з двома параметрами у такому вигляді [5]

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) \frac{A_2 - x_1(t)}{A_2}, \quad (13)$$

де  $x_1(t)$  – кількість особин в час  $t$ ,  $A_1$  – константа швидкості росту популяції,  $A_2$  – максимальна чисельність популяції, можлива в даних умовах.

Застосування явної схеми Ейлера уможливило представити дане рівняння у вигляді дискретного рівняння динаміки

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + hA_1 x_{1,k} \frac{A_2 - x_{1,k}}{A_2}. \quad (14)$$

Дані для параметричної ідентифікації моделі у вигляді (14) отримані за допомогою схеми

$$\begin{aligned} & [x_{1,k+1}^-; x_{1,k+1}^+] = \\ & = \left[ \left( x_{1,k} + hA_1 x_{1,k} \frac{A_2 - x_{1,k}}{A_2} \right) \left( 1 - \frac{\delta}{100\%} \right); \left( x_{1,k} + hA_1 x_{1,k} \frac{A_2 - x_{1,k}}{A_2} \right) \left( 1 + \frac{\delta}{100\%} \right) \right], \quad (15) \end{aligned}$$

при  $\delta = \{30\%, 25\%, 20\%, 15\%, 10\%, 5\%\}$ , де  $h = 1.00$ ,  $A_1 = 0.20$ ,  $A_2 = 300.00$ ,  $x_{1,k}$  – точне значення змінної стану чисельності популяції в  $k$ -ту часову дискрету, що тотожне центру інтервалу  $[x_{1,k}^-; x_{1,k}^+]$ ,  $x_{1,0} = 2.00$  – точне початкове значення змінної стану,  $\delta$  – значення похибки формованих схемою інтервальних даних у процентах.

Результати ідентифікації параметрів (13) за даними схеми (15) на основі розробленого методу наведено в таблиці 2. У цій же таблиці наведено часову складність реалізації методу.

Таблиця 2

Результати комп'ютерного дослідження методу параметричної ідентифікації дискретизованого за явною схемою Ейлера логістичного рівняння Ферхюльста

Структура моделі	$x_{1,k+1} = x_{1,k} + hA_1 x_{1,k} \frac{A_2 - x_{1,k}}{A_2}$					
Точність моделі	30%	25%	20%	15%	10%	5%
Значення параметрів моделі	$A_1=25,77$ $A_2=210,86$	$A_1= 20,71$ $A_2=225,62$	$A_1= 20,99$ $A_2=240,03$	$A_1= 21,19$ $A_2=256,15$	$A_1= 23,01$ $A_2=270,28$	$A_1=22,01$ $A_2=285,03$
Часова складність реалізації методу	0:5:13	0:5:330	0:5:622	0:5:930	0:6:265	0:6:928

Результати розв’язування рівняння (14), побудованого за даними схеми (15) при точності  $\delta = 10\%$  наведено на рис. 2. Отримана математична модель є адекватною, оскільки прогнозовані інтервали знаходяться в межах експериментальних.

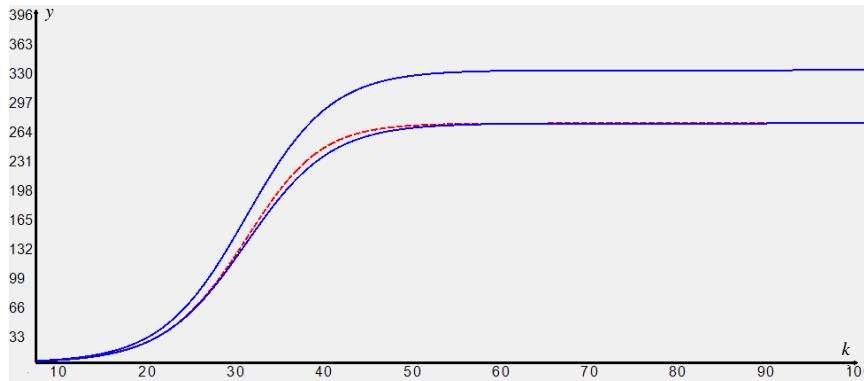


Рис. 2. Інтервальне представлення розв’язку дискретизованого за явною схемою Ейлера логістичного рівняння Ферхюльста

Тепер перейдемо до найскладнішої динамічної системи у серії досліджень складності методу. Розглянемо динамічні процеси мікробіологічного очищення води і ґрунтів від канцерогенних та токсичних речовин (поліциклічних вуглеводів, нафталіну і 2-метилнафталіну), які описують періодичною (batch) системою Моно у вигляді [6]

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = \left( A_1 \frac{y_2(t)}{A_3 + y_2(t)} - A_2 \right) y_1(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = - \frac{y_2(t)}{A_3 + y_2(t)} y_1(t), \end{cases} \quad (16)$$

де  $A_1$  – коефіцієнт максимальної швидкості росту мікроорганізмів,  $A_2$  – коефіцієнт швидкості відмирання мікроорганізмів,  $A_3$  – константа Моно, яка дорівнює концентрації субстрату при половині швидкості росту мікроорганізмів,  $y_1(t)$  – чисельність популяції мікроорганізмів,  $y_2(t)$  – маса субстрату з канцерогенними та токсичними речовинами.

Після застосування явної схеми Ейлера отримаємо таку систему різницьових рівнянь

$$\begin{cases} y_{1,k+1} = y_{1,k} + h \left( A_1 \frac{y_{2,k}}{A_3 + y_{2,k}} - A_2 \right) y_{1,k}, \\ y_{2,k+1} = y_{2,k} - h \frac{y_{2,k}}{A_3 + y_{2,k}} y_{1,k}. \end{cases} \quad (17)$$

Інтервальні дані різної точності для експериментів параметричної ідентифікації періодичної системи Моно у вигляді (17) сформовано за допомогою схеми



$$\begin{cases} [y_{1,k+1}^-; y_{1,k+1}^+] = \left[ \left( y_{1,k} + h \left( A_1 \frac{y_{2,k}}{A_3 + y_{2,k}} - A_2 \right) y_{1,k} \right) \left( 1 \pm \frac{\delta}{100\%} \right) \right], \\ [y_{2,k+1}^-; y_{2,k+1}^+] = \left[ \left( y_{2,k} - h \frac{y_{2,k}}{A_3 + y_{2,k}} y_{1,k} \right) \left( 1 \pm \frac{\delta}{100\%} \right) \right], \end{cases} \quad (18)$$

при  $\delta = \{30\%, 25\%, 20\%, 15\%, 10\%, 5\%\}$ , де  $h = 1.00$ ,  $A_1 = 0.50$ ,  $A_2 = 0.07$ ,  $A_3 = 10.00$ ,  $y_{1,k}, y_{2,k}$  – точні значення чисельності популяції та маси субстрату в  $k$ -ту часову дискрету, що тотожні центрам інтервалів  $[y_{1,k}^-; y_{1,k}^+]$  та  $[y_{2,k}^-; y_{2,k}^+]$ ,  $y_{1,0} = 1.00$ ,  $y_{2,0} = 3.00$  – точні початкові значення чисельності популяції та маси субстрату,  $\delta$  – значення похибки формованих схемою інтервальних даних у процентах.

Результати ідентифікації параметрів (17) за даними схеми (18) на основі розробленого методу наведено в таблиці 3. У цій же таблиці наведено часову складність реалізації методу у випадку задання різної точності моделі.

Таблиця 3

Результати комп'ютерного дослідження методу параметричної ідентифікації дискретного представлення періодичної системи Моно

Структура моделі	$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + h \left( A_1 \frac{y_{2,i}}{A_3 + y_{2,i}} - A_2 \right) y_{1,i}, \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} - h \frac{y_{2,i}}{A_3 + y_{2,i}} y_{1,i}. \end{cases}$			
Точність моделі	30%	25%	20%	15%
Значення параметрів моделі	$A_1=0,795$ $A_2=0,207$ $A_3=3,121$	$A_1=0,708$ $A_2=0,232$ $A_3=2,471$	$A_1=0,688$ $A_2=0,230$ $A_3=2,705$	$A_1=0,863$ $A_2=0,245$ $A_3=3,099$
Часова складність реалізації методу	0:4:0	0:12:0	0:15:0	0:31:0

Результати розв'язування рівняння (17), побудованого за даними схеми (18) при точності інтервальних даних  $\delta = 15\%$  наведено на рис. 3. Отримані математичні моделі є адекватними, оскільки прогнозовані інтервали знаходяться в межах експериментальних, що у черговий раз підтверджує працездатність запропонованого методу та програмного забезпечення для його реалізації.

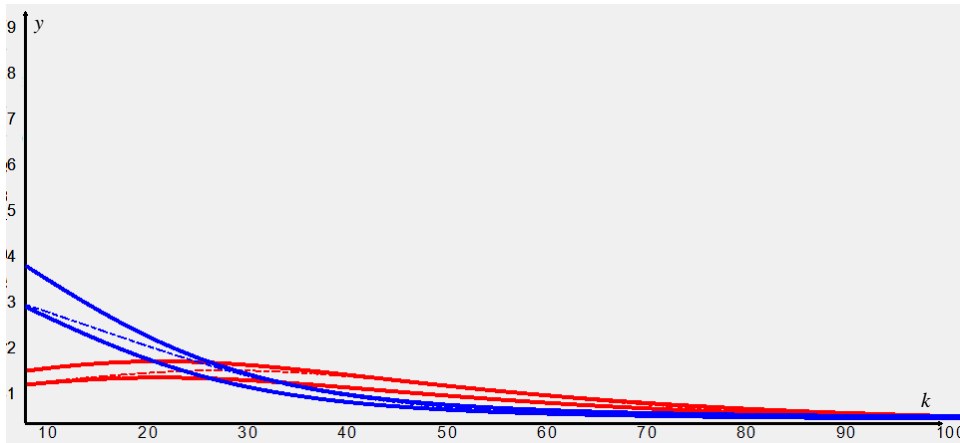


Рис. 3. Інтервальні дискретні моделі на основі періодичної системи Моно

Тепер на основі результатів комп'ютерного моделювання наведеного у таблицях 1-3 можемо провести аналіз обчислювальної складності алгоритму, що реалізує розроблений у статті метод параметричної ідентифікації інтервальних дискретних моделей динамічних систем.

На рис. 4 узагальнено результати досліджень представлених у табл. 1-3.

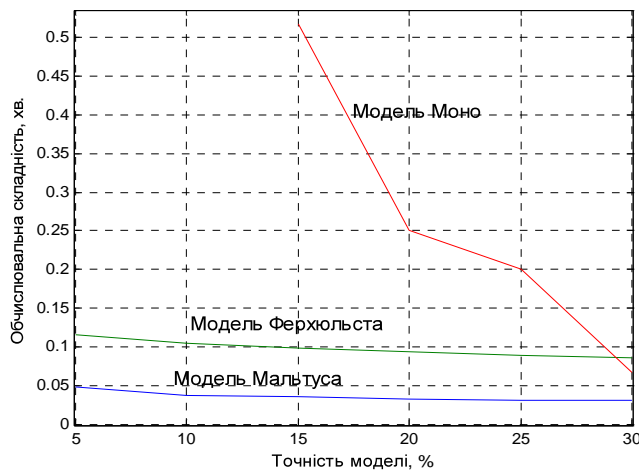


Рис. 4. Залежності часової складності реалізації методу параметричної ідентифікації від складності та точності моделі

Як видно із рис. 4 часова складність розробленого в дисертаційній роботі методу параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем суттєвим чином залежить від заданої точності моделі тільки для складних моделей. Для простих моделей така залежність не є відчутною.

Проведені дослідження розробленого в дисертації методу та алгоритму параметричної ідентифікації дискретних інтервальних моделей динамічних систем із настроюванням кроку дають можливість зробити такі висновки:

1) створений метод та його програмна реалізація є працездатними, тобто уможлиблює побудову адекватних моделей із заданою точністю (якщо вона існує в межах вибраної структури);

2) часова складність методу суттєвим чином залежить від складності структури моделі;

3) для складних моделей спостерігається суттєве зростання часової складності у випадку підвищення вимог до точності моделі.

4) Проведено комп'ютерне моделювання, дослідження та підтвердження працездатності методу у спосіб його апробації на прикладі побудови дискретних інтервальних моделей динаміки різної складності, відповідно із: одним, двома та трьома параметрами та для різних відсотків точності. За результатами комп'ютерного моделювання встановлено, що часова складність методу суттєвим чином залежить від складності структури моделі, а для складних моделей спостерігається суттєве зростання часової складності у випадку підвищення вимог до точності моделі.

## **Література**

1. Марценюк Є.О. Особливості розв'язку задач параметричної ідентифікації динамічних систем в умовах інтервальної невизначеності / Є.О. Марценюк // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2010. Т. 12, №1.– С. 30-38.
2. Дивак М.П. Оптимальна процедура настроювання параметрів методу ідентифікації інтервальної дискретної моделі динамічної системи. / М.П. Дивак, Є.О. Марценюк, І.Ф. Матола // Відбір і обробка інформації. Міжвідомчий збірник наукових праць. – Вип. 27 (103). – 2007. – С. 17-24.
3. Дивак М.П. Моделювання динамічних систем за умов інтервальної ідентифікації параметрів стану в каналі вимірювань / М.П. Дивак, Є.О. Марценюк, О.Л. Козак // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – №5(139). – С. 249-255.
4. Ахмеров Р.Р. Дифференциальные уравнения в биологии, химии, медицине (§ 037) / Р.Р. Ахмеров, Б.Н. Садовский // Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа [http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode\\_unicode/s-37/s-37.html](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode_unicode/s-37/s-37.html)
5. Рубин А. Б. Кинетика биологических процессов / А. Б. Рубин, Н. Ф. Пытьева, Г. Ю. Ризниченко. – Москва : Изд-во Мос. ун-та, 1987. – 304 с. – С.18-19.
6. Kinghtes C. D. Statistical analysis of nonlinear parameter estimation for Monod biodegradation kinetics using bivariate data / C. D. Kinghtes, C. A. Peters // Biotechnology and Bioengineering. – 2000. – Vol. 69, № 2. – P. 160-170.