УДК 534.134

Влияние жесткости упругой связи регулярной системы с повреждением на ее резонансные колебания

В. А. Круц

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Приведены результаты исследования влияния параметров жесткости упругой связи на формирование колебаний регулярной системы с повреждением, состоящей из двух однотипных элементов и моделирующей пакет двух лопаток, при основном резонансе. В качестве расчетной модели исследуемой системы, обладающей конструктивной регулярностью, выбрана дискретная двухмассовая модель, колебания которой описываются нелинейной системой дифференциальных уравнений 2-го порядка. Численные исследования проведены с использованием метода Рунге-Кутта для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений и быстрого преобразования Фурье для обработки полученных решений. Получены зависимости относительных резонансных частот и относительных резонансных амплитуд первой гармоники колебаний от параметра повреждения дискретной модели регулярной системы при синфазной и антифазной формах колебаний при различных параметрах упругой связи для поврежденной и неповрежденной подсистем. Показано, что при заданной величине параметра повреждения с увеличением коэффициента упругой связи подсистем частоты синфазной и антифазной форм колебаний возрастают. Причем наиболее существенное его влияние наблюдается при антифазной форме колебаний подсистем. Коэффициент упругой связи также значительно влияет на уровень резонансных амплитуд первой гармоники колебаний исследуемой модели регулярной системы. Установлено, что с его увеличением резонансная амплитуда неповрежденной подсистемы возрастает при синфазной форме колебаний и уменьшается при антифазной. На величины резонансных амплитуд колебаний поврежденной подсистемы он оказывает меньшее влияние. Максимум резонансных амплитуд колебаний поврежденной подсистемы практически не зависит от коэффициента упругой связи.

Ключевые слова: регулярная система, вибродиагностика усталостного повреждения, дышащая поверхностная трещина, основной резонанс, дискретная модель.

Введение и постановка задачи. Рабочие лопатки турбомашин из-за действия широкого спектра термосиловых нагрузок относятся к наиболее напряженным конструктивным элементам. При эксплуатации, как отмечалось ранее [1], в них возможно попадание таких посторонних предметов, как птицы, лед, пыль и др., что может вызвать повреждения пера лопаток. Своевременное их диагностирование является одним из условий обеспечения функциональной работоспособности турбомашины. Этому вопросу уделяется большое внимание как со стороны исследователей, так и создателей турбомашин, о чем свидетельствуют многочисленные работы.

При попадании посторонних предметов в проточную часть турбомашины на пере лопатки возникают локальные повреждения типа забоин, вмятин. Воздействие агрессивной среды приводит к образованию коррозионных и эрозионных язв, что обусловливает изменение характеристик колебаний лопаток. Результаты расчетно-экспериментальных исследований, посвященных решению некоторых вопросов влияния таких повреждений на спектр собственных частот и уровень вибронапряжений, приведены в [2–5].

Воздействие динамических нагрузок на перо лопатки обусловливает ее циклическое деформирование и может приводить к возникновению дышащей или закрывающейся трещины усталости. В настоящее время изучению влияния трещины на характеристики колебаний лопаток и их стержневых моделей уделяется большое внимание, о чем свидетельствуют результаты исследований, представленные, например, в [6–10].

В силу современных тенденций в практике проектирования объектов техники между узлами отдельных конструктивных элементов существуют различного рода механические связи. Для лопаток турбомашин таковыми являются бандажные полки, демпферные проволоки, диск. Рассмотрение в отдельности каждого конструктивного элемента не позволяет получить достоверную картину их динамического состояния. Поэтому в теории колебаний все большее внимание уделяется изучению сложных механических систем, особое место среди которых занимают регулярные системы, представляющие последовательное или параллельное соединения однотипных элементов (подсистем). К сложным системам в первую очередь относятся пакеты лопаток, а также их венцы как особый вид регулярных систем, обладающих поворотной симметрией.

При отклонении системы от строгой регулярности, одной из причин чего являются указанные выше повреждения, наблюдается возникновение разброса резонансных амплитуд колебаний в сходственных точках подсистем, что обусловлено расслоением спектра собственных частот колебаний системы вследствие нарушения ее регулярности. Об этом свидетельствуют приведенные на рис. 1 экспериментально полученные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) образца камертонного типа (рис. 2). На рис. 1 введены обозначения: ν – частота возбуждения; $\overline{p}^{(q)}$ – относительная резонансная частота q-й ($q = \text{I, II}$) формы колебаний образца при синфазном действии вынуждающих сил и расстройке частот колебаний стержней $\Delta p = \left|\dfrac{p_1 - p_2}{p_0}\right| \cdot 100\% = 1\%$ [11], где p_j ($j = 1, 2$) – собственная частота колебаний j-го стержня; p_0 – собственная частота колебаний стержня при строгой регулярности образца. Из рис. 1 видно, что даже при синфазном действии вынуждающих сил в узком частотном диапазоне возбуждаются синфазная ($q = \text{I}$) и антифазная ($q = \text{II}$) формы колебаний стержней.

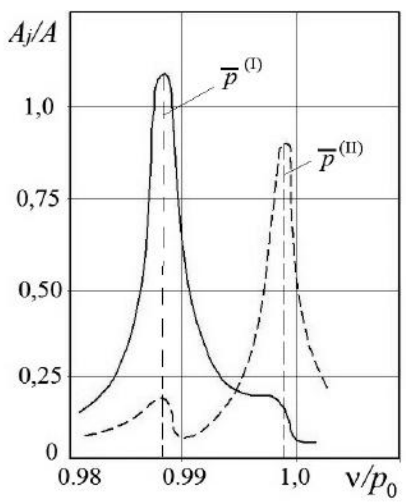


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики образца камертонного типа при расстройке частот колебаний $\Delta p = 1\%$ первого ($j = 1$) (сплошная линия) и второго ($j = 2$) (штриховая линия) стержней.

Анализ известных результатов исследований по оценке влияния дышащей трещины усталости на колебания регулярных систем показывает, что отдельные аспекты

Рис. 2. Образец камертонного типа.

этой задачи рассмотрены в [1, 2] на простейшем ее примере, состоящем из двух однотипных элементов, а также на модели лопаточного венца [3, 12].

Цель работы заключается в установлении закономерностей влияния параметров жесткости упругой связи на формирование колебаний регулярной системы с повреждением с учетом результатов численного исследования колебаний простейшей такой системы из двух однотипных элементов (подсистем), моделирующей пакет двух лопаток.

Объект исследования и его моделирование. Объектом исследования, как и ранее [1, 2], служил образец камертонного типа с дышащей трещиной в одном из его стержней, который можно рассматривать как стержневую модель пакета двух лопаток турбомашин (рис. 2).

В качестве модели исследуемой колебательной системы, обладающей конструктивной регулярностью, была выбрана дискретная модель образца [1] (рис. 3).

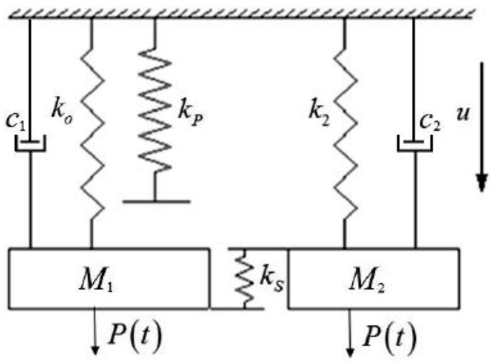


Рис. 3. Дискретная модель образца камертонного типа с трещиной усталости.

Предполагается, что дышащая трещина имеет место лишь в одном из стержней образца, в данном случае в первом ($j = 1$). Упругая связь между стержнями, обусловленная замковой частью образца, моделируется линейной пружиной с коэффициентом жесткости k_s.

Допустим, что рассматриваемый вид повреждения изменяет лишь упругие свойства стержня в процессе его циклического деформирования.

Колебания образца камертонного типа вызваны действием на каждый из его стержней сосредоточенной гармонической силы $P(t) = P_0 \cos \nu t$, а рассеяние энергии описывается гипотезой вязкого сопротивления. Тогда вынужденные колебания дискретной модели исследуемого образца будут описываться нелинейной системой дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 [1 - 0{,}5\alpha(1 + \operatorname{sign} u_1)] u_1 + k_s (u_1 - u_2) = P_0 \cos \nu t; \\ M_2 \ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 + k_2 u_2 + k_s (u_2 - u_1) = P_0 \cos \nu t, \end{cases} \tag{1}$$

где M_j, k_j, c_j $(j = 1, 2)$ – соответственно приведенные массы, коэффициенты жесткости и вязкого сопротивления *j*-го стержня при отсутствии повреждения; u_j – перемещение массы M_j относительно ее устойчивого равновесия; α – параметр, интегрально характеризующий относительное изменение жесткости стержня при наличии открытой трещины [7], который далее – параметр повреждения, или характеристика нелинейности.

С целью оценки влияния дышащей трещины усталости на колебания рассматриваемой системы в качестве ее исходного неповрежденного состояния принята строго регулярная система, для которой приведенные массы (M_1 и M_2), коэффициенты жесткости (k_1 и k_2, где $k_1 = k_о + k_P$) и вязкого трения (c_1 и c_2) подсистем одинаковы, т.е. $M_1 = M_2 = M$; $k_1 = k_2 = k$; $c_1 = c_2 = c$ ($k_о$ – коэффициент жесткости стержня с открытой трещиной, в данном случае при $u > 0$).

При введенных обозначениях формула для определения параметра повреждения α, как и в [7], приобретает вид

$$\alpha = (k - k_о)/k. \tag{2}$$

С учетом предположения, что из-за наличия дышащей трещины усталости нарушение регулярности исследуемой колебательной системы обусловлено лишь различием упругих свойств подсистем при одинаковой их массе, система дифференциальных уравнений (1) может быть приведена к такому виду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + 2h\dot{u}_1 + p_0^2[1 - 0{,}5\alpha(1 + \operatorname{sign} u_1)]u_1 + \gamma p_0^2(u_1 - u_2) = q_0 \cos \nu t; \\ \ddot{u}_2 + 2h\dot{u}_2 + p_0^2 u_2 + \gamma p_0^2(u_2 - u_1) = q_0 \cos \nu t, \end{cases} \tag{3}$$

где $h = c/2M$, $p_0 = \sqrt{k/M}$ – коэффициент демпфирования и собственная частота колебаний неповрежденной подсистемы соответственно (при строгой регулярности системы); $\gamma = k_s/k$; $q_0 = P_0/M$.

При $\gamma \equiv 0$ получим систему несвязанных дифференциальных уравнений, описывающих колебания каждого стержня образца как изолированной подсистемы.

Алгоритм расчета вынужденных колебаний и обработка результатов. Решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (3) осуществлялось методом Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага, с помощью которого определялись перемещения масс u_j, моделирующих поврежденную и неповрежденную подсистемы. Примеры общего вида зависимостей $u_j(t)$, а также их установившихся участков для поврежденной и неповрежденной подсистем при возбуждаемых синфазной и антифазной формах колебаний приведены на рис. 4 и 5.

Подтверждением возможности возбуждения синфазной и антифазной форм колебаний являются полученные по результатам выполненных расчетов амплитудно-частотные характеристики (рис. 6), которые качественно согласуются с экспериментальными (рис. 1).

С использованием метода быстрого преобразования Фурье (FFT) проводилась обработка установившегося участка зависимости $u_j(t)$. Полученные спектры амплитуд колебаний приведены на рис. 4,*д*,*е* и 5,*д*,*е*, где $A_j^{(i,q)}$ – амплитуда возбуждаемых гармоник (где $i = 1, 2$ – номер гармоники колебаний; $q = \text{I, II}$ – синфазная и антифазная формы колебаний); ν_i – частота резонирующей гармоники.

Анализ полученных данных показывает, что в спектре амплитуд колебаний поврежденной подсистемы имеются две гармоники, что обусловлено наличием в ней дышащей трещины. Поскольку величина антифазной гармоники значительно меньше синфазной, в дальнейших расчетах она не учитывалась.

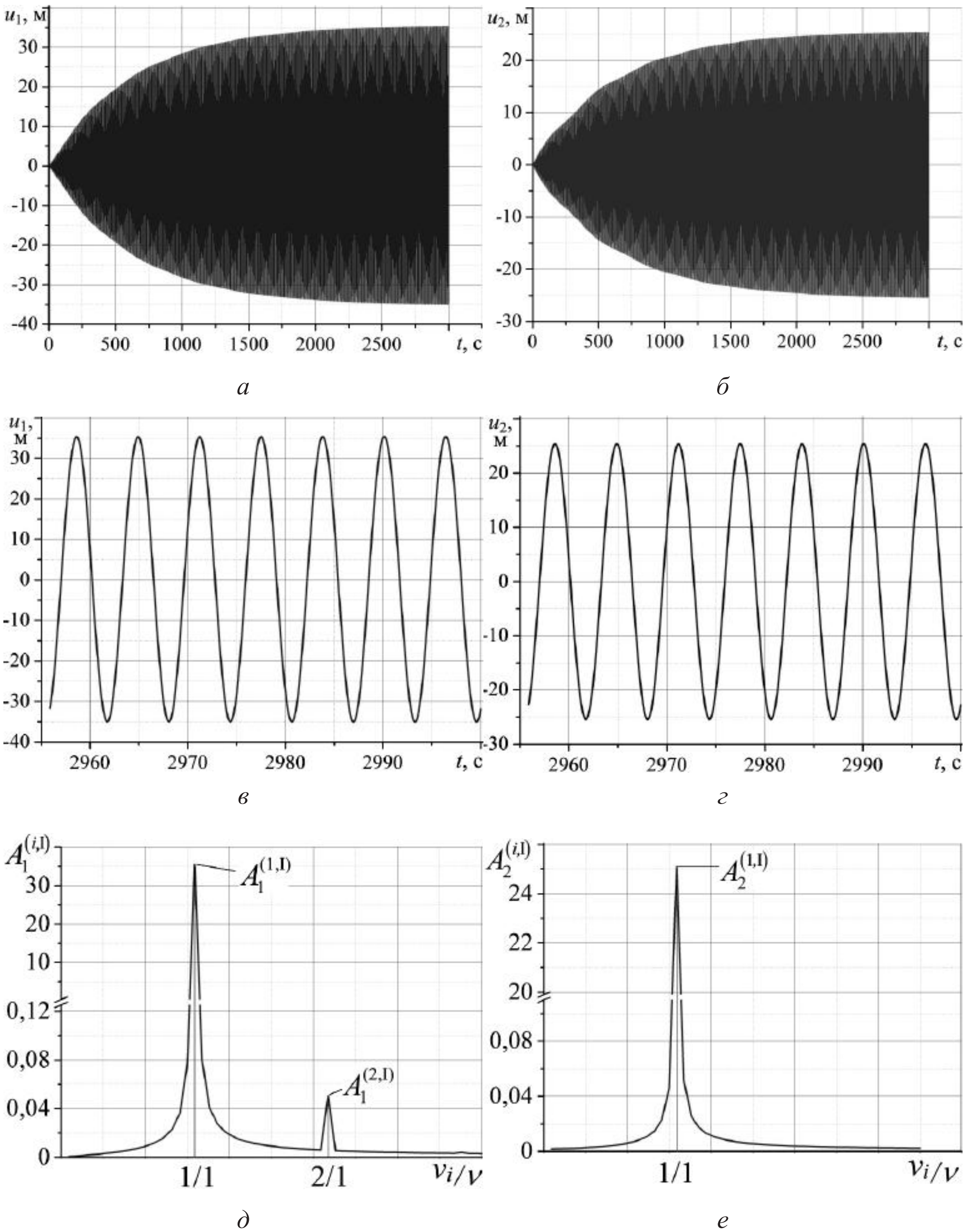


Рис. 4. Общий вид зависимостей $u_j(t)$ – *а*, *б*, их установившихся участков – *в*, *г* и результаты обработки методом FFT – *д*, *е* для поврежденной (*а*, *в*, *д*) и неповрежденной (*б*, *г*, *е*) подсистем дискретной модели регулярной системы при синфазной (*I*) форме колебаний ($\alpha = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}015$ и $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$).

Результаты вычислительных экспериментов. Все расчеты проводились при наличии трещины в первой подсистеме ($j = 1$), параметры которой варьировались в диапазоне, которому соответствует параметр повреждения $\alpha = 0...0{,}16$. Относительная амплитуда вынуждающей силы q_0 принята равной единице, а коэффициент демпфирования $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$.

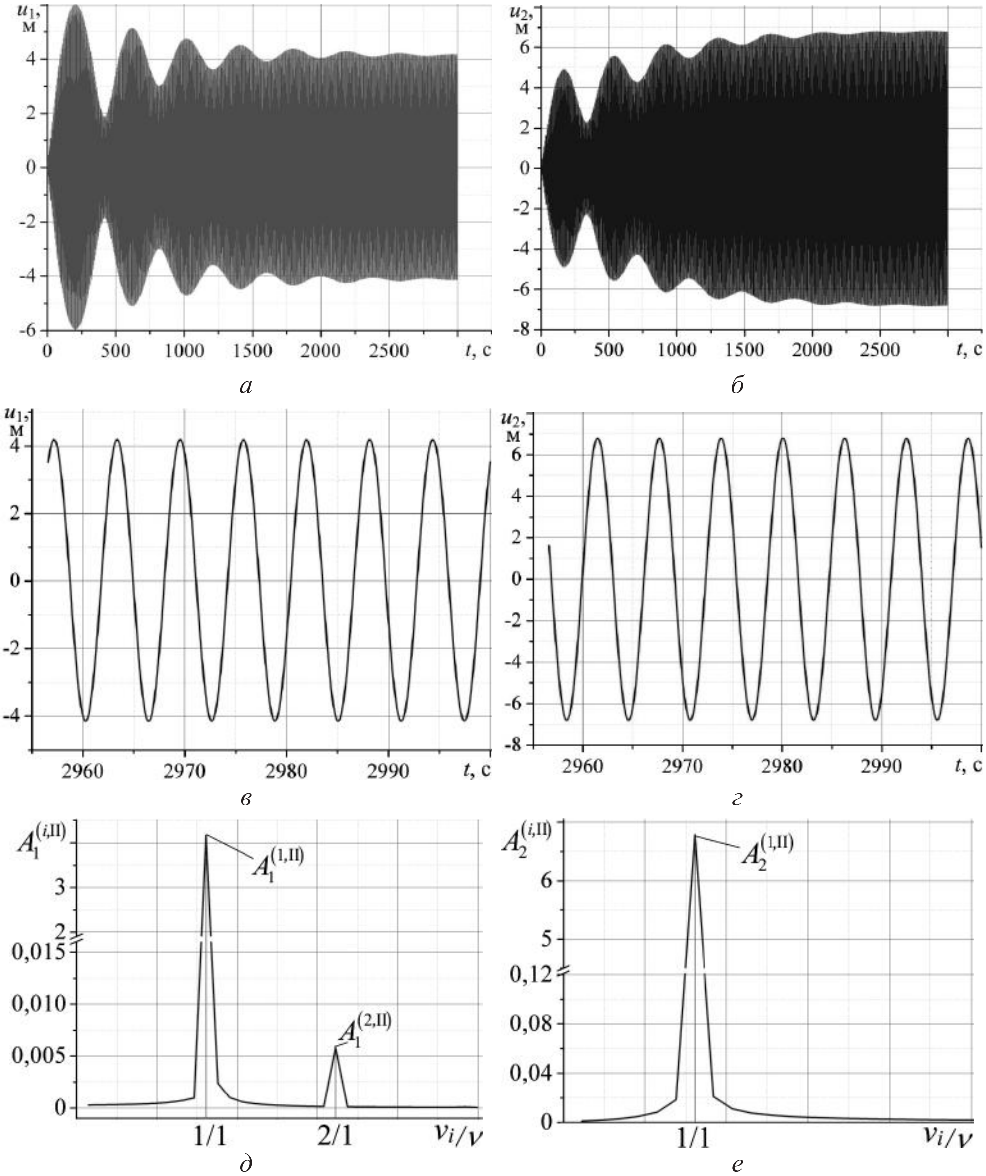


Рис. 5. Общий вид зависимостей $u_j(t)$ – *а*, *б*, их установившихся участков – *в*, *г* и результаты обработки методом FFT – *д*, *е* для поврежденной (*а*, *в*, *д*) и неповрежденной (*б*, *г*, *е*) подсистем дискретной модели регулярной системы при антифазной (*II*) форме колебаний ($\alpha = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}015$ и $h = 0{,}0016$ с^{-1}).

Ранее [1] показано, что одной из основных характеристик регулярной системы, влияющей на закономерности формирования ее резонансных колебаний, является коэффициент жесткости γ упругой связи подсистем. Поэтому все расчеты проводились для значений $\gamma = 0{,}01$; $0{,}015$ и $0{,}02$.

Определялись частотные характеристики исследуемой системы, которые проиллюстрированы на рис. 7 в виде зависимостей относительных собственных частот $\overline{p}^{(q)} = p^{(q)} / p_0$, соответствующих возбуждаемым формам колебаний, от параметра повреждения α.

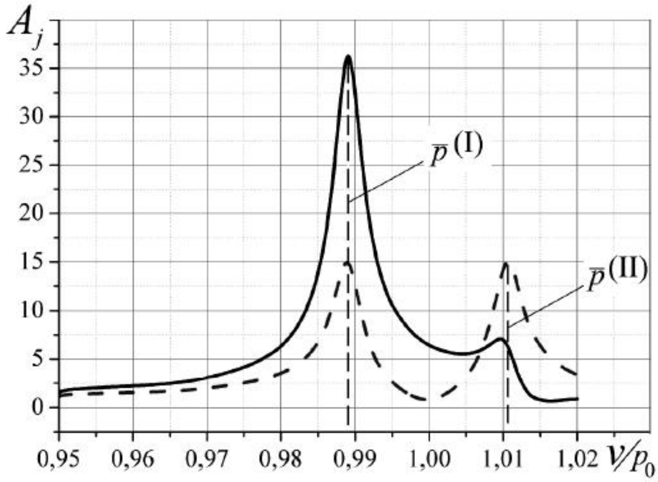


Рис. 6. Расчетные амплитудно-частотные характеристики поврежденной (сплошная линия) и неповрежденной (штриховая линия) подсистем дискретной модели регулярной системы при $\alpha = 0{,}06$, $\gamma = 0{,}015$, $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$.

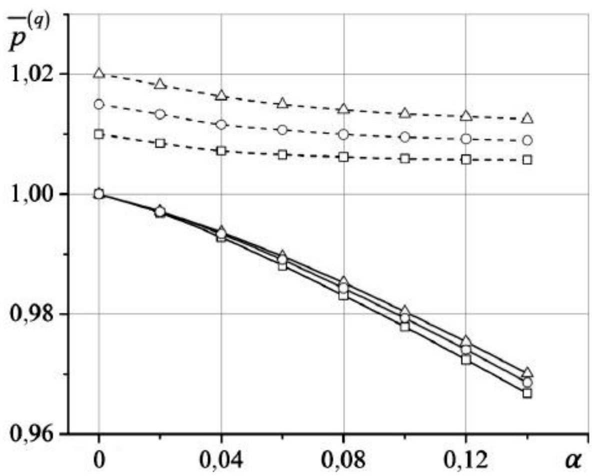
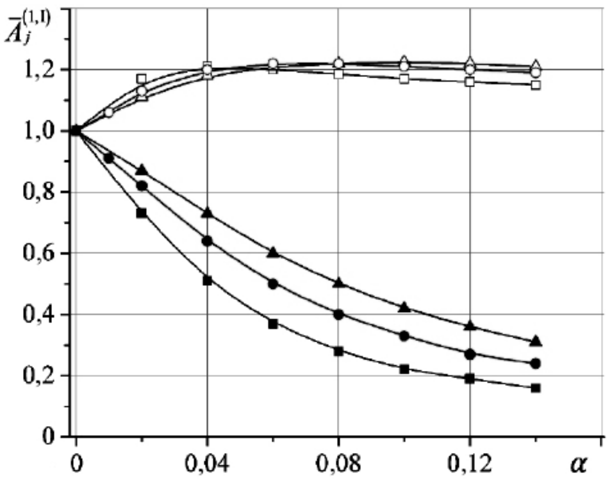
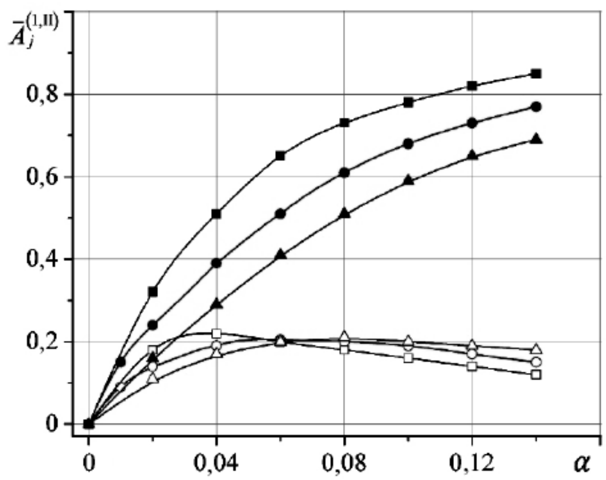


Рис. 7. Зависимости относительных собственных частот синфазной (сплошные линии) и антифазной (штриховые линии) форм колебаний дискретной модели регулярной системы от параметра повреждения α для различных значений γ и $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$: □ – $\gamma = 0{,}01$; ○ – $\gamma = 0{,}015$; △ – $\gamma = 0{,}02$.

Анализ полученных частотных зависимостей показывает, что их качественный характер при варьировании величиной коэффициента γ сохраняется. Заметим, что его значение такое же, как и в случае локального поверхностного повреждения типа забоины [2]. Однако имеют место некоторые количественные изменения. При заданной величине параметра повреждения с увеличением коэффициента упругой связи подсистем частоты синфазной и антифазной форм колебаний возрастают. Причем наиболее существенное влияние указанного параметра отмечается при антифазной форме колебаний подсистем. Такое явление обусловлено тем, что при синфазной форме колебаний подсистем наблюдается незначительное деформирование пружины, моделирующей упругую связь. При антифазной форме колебаний влияние жесткости пружины вследствие ее деформирования на частоту выражено наиболее значимо.



а



б

Рис. 8. Зависимость относительных резонансных амплитуд первой гармоники колебаний от параметра повреждения α поврежденной (светлые точки) и неповрежденной (темные точки) подсистем дискретной модели регулярной системы при синфазной (*а*) и антифазной (*б*) формах колебаний для различных значений γ и $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$: ■, □ – $\gamma = 0{,}01$, ●, ○ – $\gamma = 0{,}015$; ▲, △ – $\gamma = 0{,}02$.

Этим объясняются максимальное различие в частотах антифазной формы колебаний строго регулярной системы, когда стержни перемещаются строго в противофазе, и равенство частот при синфазной форме колебаний, когда пружина не деформируется.

По результатам вычислительных экспериментов получены зависимости относительных резонансных амплитуд первой гармоники колебаний от параметра повреждения α для трех значений коэффициента γ (рис. 8). Как следует из представленных данных и их сравнительного анализа с полученными ранее [1], уровень резонансных амплитуд поврежденной подсистемы при синфазной форме колебаний системы, во-первых, значительно выше, чем для модели поврежденного стержня в изолированном состоянии. При антифазной форме колебаний наблюдается обратный эффект. Во-вторых, при основном резонансе амплитуды колебаний высших гармоник исследуемой системы, как и для изолированного стержня, являются очень малыми величинами. Это означает, что при рассматриваемом режиме колебаний нелинейность системы из-за закрывающейся трещины усталости, не оказывает большого влияния на распределение ее резонансных амплитуд, однако обусловливает возможность возбуждения суб- и супергармонических резонансов. Данные вычислительных экспериментов показывают, что при исследуемом режиме колебаний указанные зависимости существенно не изменяются по сравнению с таковыми, полученными с учетом технологической расстройки стержней [12] и при наличии повреждения типа забоины [2].

При синфазной форме колебаний дискретной модели регулярной системы наибольший уровень резонансных амплитуд основной гармоники колебаний характерен для поврежденной подсистемы. При этом с изменением коэффициента γ максимум амплитуд сохраняется, однако с его ростом сдвигается в область больших значений параметра повреждения α, что эквивалентно увеличению расстройки частот колебаний подсистем.

Аналогичное изменение резонансных амплитуд поврежденной подсистемы характерно и при антифазной форме колебаний.

Для неповрежденной подсистемы при рассматриваемом режиме колебаний характерны такие особенности изменения резонансных амплитуд. При синфазной форме колебаний системы видно, что независимо от коэффициента γ с ростом параметра α резонансные амплитуды монотонно уменьшаются. Однако при заданной величине α для больших значений γ характерен и больший уровень резонансных амплитуд колебаний. При антифазной форме колебаний уровень резонансных амплитуд колебаний максимальный, в данном случае с увеличением коэффициента γ он снижается.

Выводы

1. При основном резонансе характер влияния параметра нелинейности на амплитуды основной гармоники дискретной модели регулярной системы качественно совпадает с таковым, полученным для случая расстройки частот стержней, обусловленной как допусками на их изготовление, так и наличием повреждения типа забоины или открытой трещины.

2. При исследуемом режиме колебаний нелинейность системы, обусловленная закрывающейся трещиной усталости, не оказывает существенного влияния на распределение ее резонансных амплитуд колебаний при синфазной и антифазной формах колебаний, однако предопределяет возможность возбуждения суб- и супергармонических резонансов.

3. Результаты проведенных вычислительных экспериментов по оценке совместного влияния параметра повреждения α и коэффициента γ подсистем дискретной модели регулярной системы показывают, что для поврежденной подсистемы при синфазной и антифазной формах колебаний изменение коэффициента γ не влияет на максимальную величину резонансной амплитуды основной гармоники колебаний, однако с его увеличением она сдвигается в область больших значений параметра α. Для неповрежденной подсистемы при синфазной форме колебаний коэффициент γ не влияет на качественный характер вышеуказанных зависимостей, имеет место лишь количественное их различие. Так, с увеличением коэффициента γ величина резонансной амплитуды основной гармоники колебаний неповрежденной подсистемы при синфазной форме возрастает. Максимальный уровень резонансных амплитуд колебаний неповрежденной подсистемы дискретной модели регулярной системы наблюдается при антифазной форме, однако в данном случае с увеличением коэффициента γ он снижается.

Р е з ю м е

Наведено результати дослідження впливу параметрів жорсткості пружного зв'язку на формування коливань регулярної системи з пошкодженням, що складається з двох однотипних елементів і моделює пакет двох лопаток, при основному резонансі. Як розрахункову модель досліджуваної системи з властивостями конструктивної регулярності обрано дискретну двомасову модель, коливання якої описуються нелінійною системою диференціальних рівнянь 2-го порядку. Чисельні дослідження проведено з використанням методу Рунге-Кутта для розв'язання нелінійної системи диференціальних рівнянь і швидкого перетворення Фур'є для обробки отриманих розв'язків. Побудовано залежності відносних резонансних частот і відносних резонансних амплітуд першої гармоніки коливань від параметра пошкодження дискретної моделі регулярної системи при синфазній й антифазній формах коливань за різних параметрів пружного зв'язку для пошкодженої і непошкодженої підсистем. Показано, що при заданій величині параметра пошкодження зі збільшенням коефіцієнта пружного зв'язку підсистем частоти синфазної й антифазної форм коливань зростають. Причому найбільш істотний його вплив спостерігається при антифазній формі коливань підсистем. Коефіцієнт пружного зв'язку також суттєво впливає на рівень резонансних амплітуд першої гармоніки коливань досліджуваної моделі регулярної системи. Установлено, що з його збільшенням резонансна амплітуда непошкодженої підсистеми зростає при синфазній формі коливань і зменшується при антифазній. На величину резонансної амплітуди пошкодженої підсистеми він впливає менше. Максимум резонансних амплітуд коливань пошкодженої підсистеми практично не залежить від коефіцієнта пружного зв'язку.

1. Kruts V. A., Zinkovskii A. P. , and Sinenko E. A. Influence of a fatigue crack on the vibrations of the simplest regular elastic system. *Strength Mater*. 2013. **45**, No. 3. P. 308–315.
2. Tokar' I. G. and Zinkovskii A. P. Influence of the parameters of local defect in a regular system on the range of eigenfrequencies of vibrations and the level of vibration stresses in elements of the same type. *Strength Mater*. 2010. **42**, No. 2. P. 167–174.
3. Huang B.-W. and Kuang J.-H. Vibration in the stability of a rotating blade disk with a local crack defect. *J. Sound Vib*. 2006. **294**, No. 3. P. 486–502.
4. Zinkovskii A. P., Tokar' I. G., and Kruts V. A. Influence of the local surface damage parameters on the natural frequencies of vibration of structural elements. *Strength Mater*. 2015. **47**, No. 2. P. 221–226.
5. Zinkovskii A. P., Kruts V. A., Onyshchenko E. A., and Tokar I. G. Vibrations of structural elements with local surface damage. Proc. of the XII Int. Conf. on Vibration Engineering and Technology of Machinery (Sept. 7–9, 2016, Warsaw). P. 187–194.
6. Matveev V. V. Approximate analytical determination of vibrodiagnostic parameters of non-linearity of elastic bodies due to the presence of closing crack. Pt 2. Determination of diagnostic parameters in principal and 2-nd order supharmonic resonances. *Strength Mater*. 2004. **36**, No. 5. P. 449–462.
7. Matveev V. V.. Boginich O. E., and Yakovlev A. P. Approximate analytical method for determining the vibrotion-diagnostic parameter indicating the presence of a crack in a distributed-parameter elastic system at super- and subharmonic resonances. *Strength Mater*. 2010. **42**, No. 5. P. 528–543.
8. Matveev V. V., Yakovlev A. P., Boginich O. E., and Sinenko E. A. Approximate analytical determination of vibrodiagnostic parameters of the presence of a closing crack in bar elements under subharmonic resonance. *Strength Mater*. 2014. **46**, No. 3. P. 315–327.

9. Sinenko E. A. and Zinkovskii A. P. Influence of the exciting force application point on the amplitude spectrum of flexural vibrations in a beam with a "breathing" crack. *Strength Mater*. 2015. **47**, No. 4. P. 553–560.

10. Matveev V. V., Boginich O. E., Sinenko E. A., and Yakovlev A. P. On vibro-diagnostics of the presence of a closing edge crack in a beam with amplitude-dependent damping capacity under superharmonic resonance. *Strength Mater.* 2015. **47**, No. 5. P. 653–661.

11. Adamenko A. Ya., Tokar' I. G., and Matveev V. V. A method of examining the damping capacity of vanes of turbomachines under the effect of temperature and centrifugal forces. *Strength Mater.* 1983. **15**, No. 7. P. 949–953.

12. Larin O. O. Forced vibrations of bladings with the random technological mistuning. Proc. of the ASME Turbo Expo 2010 (June 14–18, 2010, Glasgow). Glasgow, 2010. P. 667–672.

Поступила 24. 11. 2017