

Применение проекционно-итерационной схемы метода локальных вариаций к решению задач устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций при локализованных воздействиях

Э. Л. Гарт^{а,1}, В. С. Гудрамович^{б,2}

^а Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепр, Украина

^б Институт технической механики НАН Украины и Государственного космического агентства Украины, Днепр, Украина

¹ hart@ua.fm

² hudramovich@i.ua

Исследованы задачи устойчивости подкрепленных сферических оболочек, входящих в состав протяженных неоднородных конструкций, при локализованных воздействиях на основе разработанного нового проекционно-итерационного варианта метода локальных вариаций. Устойчивость при локальном нагружении определяет работоспособность тонкостенных оболочечных конструкций ракетно-космической, антенно-волноводной техники, энергетики. При локализованных воздействиях возникает значительная концентрация напряжений и деформаций. Методы решения соответствующих задач являются сложными, приоритетное значение имеют многосеточные вариационно-разностные схемы. Для задач напряженно-деформированного состояния и устойчивости при существенно неоднородных напряженных состояниях эффективным является метод локальных вариаций, однако он требует большего времени расчета, чем конечно-разностные методы и вариационные методы типа Рунца. Это привело к необходимости разработки более эффективных схем его реализации на основе идеологии проекционно-итерационных методов. Проанализирована указанная схема метода локальных вариаций, исследована ее сходимости и показана практическая эффективность, связанная со значительным уменьшением компьютерного времени расчета при численной реализации. Рассмотрены задачи устойчивости составных оболочечных конструкций со сферическими оболочками, подкрепленными опорными кольцами, при влиянии на них локальных нагрузок. Приведены данные экспериментального исследования. Расчетные данные критических усилий и конфигурация форм волнообразования подтверждены экспериментально.

Ключевые слова: проекционно-итерационная схема метода локальных вариаций, задачи контактных взаимодействий и устойчивость при локализованных воздействиях, экспериментальные исследования локальной устойчивости конструкций со сферическими оболочками.

Введение. Задачи локальной устойчивости элементов оболочечных конструкций имеют большое практическое значение в приоритетных областях современной техники. Такие задачи возникают вследствие возможного нарушения работоспособности при воздействии локализованных термомеханических нагрузок на протяженные оболочечные конструкции ракетно-космической, антенно-волноводной техники, энергетики [1–4]. Передача локализованных воздействий, из соображений прочности, осуществляется в местах повышенной жесткости, определяемых наличием подкрепляющих элементов, что приводит к специальным контактным задачам [2, 4]. Особенности нагружения и свойств используемых материалов обуславливают постановку физически нелинейных задач [5, 6]. Методы решения таких задач (краевые задачи нелинейной теории упругости, вязкопластичности) сводят их к совокупности решений задач теории упругости и построению процессов последовательных приближений [7, 8].

При локализованных воздействиях возникает значительная концентрация параметров напряженно-деформированного состояния (НДС). Методы решения соответствующих задач устойчивости очень сложные. Приоритет имеют вариационно-сеточные методы.

Эффективным является метод локальных вариаций (МЛВ) – численный метод решения вариационных задач, который разработан в [9] и развит в [10]. Этот метод – вариант методов вариаций в фазовом пространстве, изложенных в работах Н. Н. Моисеева (в основу их положено изменение фазовых компонент траектории) [10]. Метод локальных вариаций имеет преимущества по сравнению с другими численными методами. Он позволяет легко учитывать ограничения на искомые функции, произвольность формы области и другие особенности. В механике деформируемого твердого тела МЛВ эффективен для существенно неоднородных напряженных состояний. С его помощью можно рассматривать разные виды локализованного нагружения тонкостенных систем, различную их структуру (для оболочечно-пластинчатых систем – переменность жесткости, вырезы). Однако следует заметить, что для решения некоторых классов задач, например вариационных, сводящихся к линейным краевым задачам, МЛВ требуется больше времени расчета для достижения заданной точности, чем конечноразностными методами и вариационными методами типа Ритца.

Поиск путей устранения указанного недостатка привел к необходимости разработки более эффективных схем его реализации на основе идеологии проекционно-итерационных методов [11–13], позволяющих значительно сократить компьютерное время расчета. Эффективность проекционно-итерационных схем реализации методов конечных элементов и конечных разностей известна. Для решения широкого круга задач механики разрушения и механики тонкостенных конструкций она показана в ряде работ, например в [14–17]. Разработка проекционно-итерационных модификаций МЛВ представляет большой интерес. Вопрос о разработке одной из указанных модификаций МЛВ впервые рассмотрен в [18], а некоторые аспекты уменьшения машинного времени счета для МЛВ исследованы в [19].

Объясним применение термина “концентрация параметров НДС” (вместо обычно используемого “концентрация напряжений” (КН) [20] и др. Для алюминиевых сплавов и материалов, используемых, например, в ракетно-космической технике, энергетике и др., отношение предела прочности σ_b к условному пределу текучести $\sigma_s = \sigma_{0.2}$ составляет $\sim 1,6$. Разрушение связывается с достижением деформации $[\varepsilon]$, соответствующей σ_b – отношение $[\varepsilon]/\varepsilon_s$ является значительным (> 8) [21]. Термин КН, введенный в свое время для упругих материалов, целесообразно заменить на “концентрация параметров НДС”. Отметим первые работы по определению коэффициента КН для одноосного нагружения напряжением σ пластины [6]. Для круглого отверстия Г. Kirsch (1898 г.) получил $KH = 3$, для эллиптического Г. В. Колосов (1909 г.) и К. Inglis (1913 г.) – $KH = 1 + 2a/b$ (a , b – большая и малая полуоси эллипса). Заметим, что верхняя граница напряжений σ , для которых справедливы указанные решения, для круглого отверстия $\sigma_s/3$, для эллиптического $\sigma_s/(1 + 2a/b)$. Это малые уровни напряжений.

В настоящей работе исследуется устойчивость сферической оболочки, подкрепленной опорным кольцом при локализованном нагружении, которое характерно для оболочечных конструкций. Применяется разработанный новый вариант МЛВ, основанный на идеологии проекционно-итерационных методов. Исследована его сходимость при использовании аппарата функционального анализа [22] и показана практическая эффективность, связанная с уменьшением компьютерного времени численной реализации. Задачи устойчивости сферических оболочек, подкрепленных кольцом, при локализованных воздействиях на основе обычного МЛВ рассмотрены ранее [2, 3].

Постановка задачи. Основные уравнения. В качестве одной из типичных задач устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций рассмотрим задачу локальной устойчивости сферических оболочек, входящих в состав неоднородных конструкций, при локализованных нагрузках для существенно неоднородного напряженного состояния, вызванного их действием. Такие задачи имеют большое значение для конструкций ракетно-космической, антенной техники, энергетики [2–6]. Нагружение локализованными нагрузками осуществляется через штампы, моделирующие амортизаторы, опоры, поведение которых описывается разными моделями [2] (Винклера, Власова, Муравского и др.) и воспринимается опорным кольцом, подкрепляющим край оболочек. Такая схема передачи нагрузок моделирует поперечное нагружение сферических диафрагм протяженных оболочечных конструкций ракетной техники, зеркальных антенн, концентраторов лучистой энергии. В частности, схема может быть реализована для протяженной конструкции ракет-носителей при поперечном нагружении в месте расположения сферических днищ (транспортировка, хранение), а также трубопроводов в месте расположения диафрагм.

На рис. 1 показаны схемы нагружения и формы волнообразования при локальной потере устойчивости.

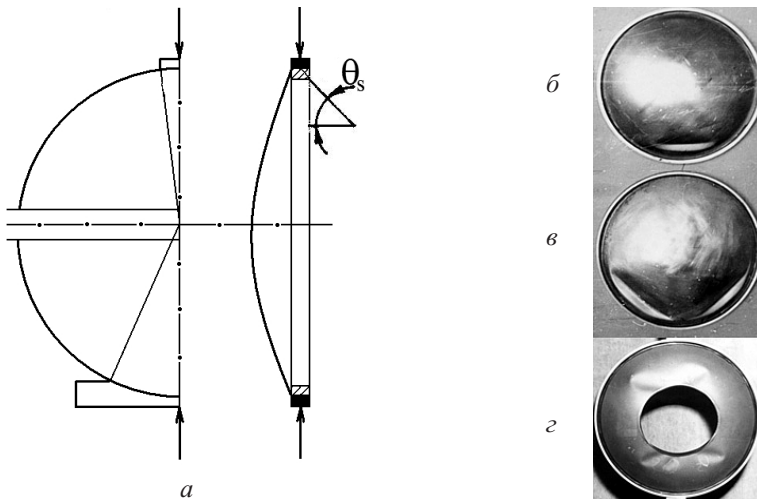


Рис. 1. Схема нагружения (а) и формы волнообразования (б–г).

Контактное давление является переменным вдоль площадок контакта при различной степени его локализации, которая зависит от величины площадок контакта, параметров жесткости штампов и конструкции. Распределение контактного давления определяет форму волнообразования. Для малой площадки контакта образуется одна вмятина (рис. 1,б), для протяженной площадки – две (в этом случае происходит концентрация контактного давления в краевых зонах штампов) – рис. 1,а,в. Для жестких штампов может произойти нарушение контакта (отход оболочечной конструкции с кольцом от штампа) с появлением дискретных площадок контакта различной протяженности [2, 4]. На рис. 1,б–г показаны испытанные оболочки из алюминий-магниевого сплава АМгбМ, изготовленные методом взрывной штамповки (с проведением контроля отклонения поверхности оболочки от сферической) [3]. Рис. 1,г иллюстрирует возможные локальные формы волнообразования у краев кругового выреза в оболочке, связанные с концентрацией НДС.

При теоретическом исследовании контактного взаимодействия необходимо решать своеобразную “двойную” контактную задачу: для оболочки и кольца с определением усилий их взаимодействия и кольца, нагруженного этими усилиями, со

штампом. Методы решения таких задач разработаны в [2, 4], где приведены решения разнообразных задач контактного взаимодействия элементов конструкций.

Для описания поведения сферических оболочек используем соотношения нелинейной теории пологих оболочек [3, 4]. Система уравнений, определяющих критические нагрузки оболочек, эквивалентна вариационному уравнению

$$\delta\Pi = \delta \int_S \left\{ T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2B^{-1} T_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} + B^{-1} T_2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + K[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2] + D[\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2] \right\} B d\alpha d\theta = 0, \quad (1)$$

где Π – потенциальная энергия деформации оболочки; $B = r \sin \theta$; $K = Eh/(1-\nu^2)$; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; h , S – толщина и поверхность оболочки; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; T_{ij} – усилия; ε_{ij} – деформации; χ_{ij} – кривизны; α , θ – координаты.

Усилия и моменты в оболочке определяются по формулам

$$\begin{cases} T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_{12} = K(1-\nu)\varepsilon_{12}, \\ M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2), & M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{cases} \quad (2)$$

При использовании обычного МЛВ для минимизации квадратичного функционала энергии Π проводится конечноразностная дискретизация по криволинейным координатам α , θ . Функционал Π заменяется суммой по ячейкам, принадлежащим поверхности S . В случае решения рассматриваемой задачи варьируются перемещения u , v , w . При этом определяются перемещения в узлах сетки на поверхности сферы, удовлетворяющие краевым условиям сопряжения и обуславливающие минимум функционала энергии [10]. Находятся критические усилия и форма волнообразования, границы которой устанавливаются из условия изменения знака w .

Метод расчета. Ранее [22] предложены новый проекционно-итерационный вариант МЛВ, алгоритмы расчета на его основе и доказана его сходимость при использовании аппарата функционального анализа. Ввиду того что процесс вычислений проводится на последовательности сгущающихся вложенных сеток не до полной сходимости итераций как по решению, так и по функционалу, а строится лишь несколько итераций (их количество задается либо априорно, либо исходя из некоторого критерия), предложенный вариант значительно уменьшает компьютерное время расчета (в три–пять раз) по сравнению с классическим вариантом МЛВ.

Изложим основную идею проекционно-итерационной модификации МЛВ [18, 22]. Исходный функционал $F(u)$, заданный на некотором множестве гильбертова пространства H , аппроксимируется последовательностью более простых функционалов на некоторых множествах пространств, изоморфных подпространствам исходного пространства. Для минимизации полученной последовательности функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ применяется МЛВ таким образом, что, начиная с некоторого номера $n = N$ (соответствует грубому разбиению области определения G неизвестной функции $u(x, y)$), достаточно малого числа h_n и некоторого начального приближения $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$ ($k = 0, i = \overline{N_1}, j = \overline{N_2}$) последовательно варьируются значения $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$ во всех внутренних точках (x_i, y_j) области G путем прибавления или вычитания величины h_n . Варьирование продолжается не до полной сходимости, т.е. когда дальнейшее

дробление шага h_n не приводит к уменьшению значения функционала, а до тех пор, пока функционал почти не уменьшается, а решение $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, k_n$) меняется в небольшом количестве точек, т.е. $|\tilde{F}_n(\tilde{u}_{ij}^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_{ij}^{(k+1)})| < \varepsilon_n$, $|\tilde{u}_{n,ij}^{(k)} - \tilde{u}_{n,ij}^{(k+1)}| < \delta_n$, за исключением $(i, j) \in I_n$, где I_n – фиксированное множество индексов мощности $\ll (N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$. Далее найденное значение $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$ интерполируется на более мелкое разбиение и используется в качестве начального приближения для минимизации следующего $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ функционала. Процесс продолжается до полной сходимости итераций при некотором малом шаге h_n и выполнении условия

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}^{(k_{n+1})})| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность вычислений.

Следует отметить, что, в отличие от классического варианта МЛВ, предложенного в [9], проекционно-итерационная схема реализации этого метода позволяет значительно экономить компьютерное время, поскольку не требует на каждом этапе варьирования достижения полной сходимости по h при фиксированных Δx , Δy . Кроме того, на практике заранее неизвестны конечные значения Δx , Δy , h , и представляется более целесообразным использование критерия останова по близости значений функционалов на двух соседних сетках, позволяющего также существенно сократить время счета, обеспечив заданную точность решения.

Также отметим, что, в отличие от модифицированного МЛВ [19], использующего схемы МЛВ с переменным шагом варьирования [10], разработанная проекционно-итерационная схема МЛВ более простая для реализации и требует существенно меньших затрат времени счета на персональном компьютере (ПК), что не влияет на качество получаемого решения [18, 22].

Результаты решения и экспериментальные данные. Возможности рассмотрения различных задач устойчивости. На основе предложенного вычислительного алгоритма проекционно-итерационного варианта МЛВ разработана программа расчета для ПК. Исследована задача нагружения подкрепленной кольцом сферической оболочки двумя одинаковыми штампами с различными углами охвата. Определены зависимости критических параметров $\lambda_* = P_*/Eh^2$ от параметра жесткости системы $i = EIE_k^{-1}(R \sin \vartheta_S)^{-4} \cdot 10^7$ (λ_{1*}) и сферической координаты края сферической оболочки ϑ_S (λ_{2*}), P_* – критическая сила потери устойчивости; E , E_k – модули упругости оболочки и кольца; R – радиус оболочки; I – момент инерции кольца.

Применение проекционно-итерационной схемы МЛВ позволило уменьшить компьютерное время расчета в четыре-пять раз по сравнению с обычным МЛВ.

На рис. 2,а показана расчетная зависимость λ_{1*} от i при заданном ϑ_S ($\vartheta_S = 50^\circ$), на рис. 2,б – зависимость λ_{2*} от ϑ_S при заданном i ($i = 5$). На рис. 2,а осреднены результаты 25 испытаний, на рис. 2,б – 14.

Диапазоны параметров испытанных оболочек таковы: $R/h = 400 \dots 800$; $\vartheta_S = 40 \dots 60^\circ$; $i = 2,5 \dots 9$. Оболочки нагружались двумя одинаковыми штампами малой протяженности (рис. 1,а).

На рис. 3 показано устройство для испытаний оболочечных систем при разных схемах локального нагружения, в том числе схеме, показанной на рис. 1,а. Устройство состоит из опорного кольца (в центре) со сверлениями для тяг, которые скреплены с нагружающими круговыми штампами различной протяженности, осуществляющими локальное нагружение. Усилие, прикладываемое к торцевым шайбам по вертикальной оси, передается посредством двухзвенных параллелограммных механизмов на

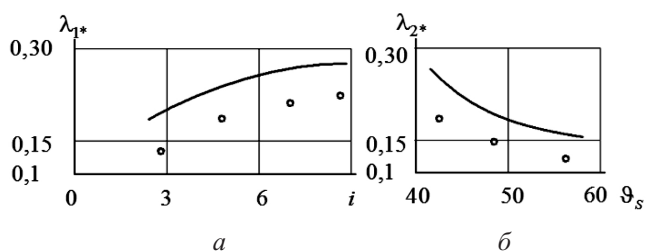


Рис. 2. Расчетные зависимости критических параметров от параметра жесткости опорного кольца (а) и сферической координаты края сферической оболочки (б). (Точки – экспериментально осредненные значения критических усилий.)

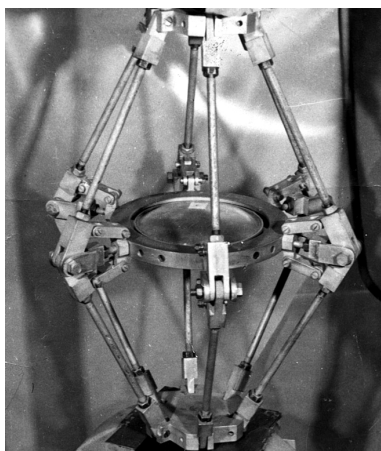


Рис. 3. Устройство для экспериментальных исследований устойчивости оболочек при различных локализованных воздействиях.

тяги, которые нагружают штампами исследуемую конструкцию. Устройство позволяет осуществлять нагружение различных оболочечных систем (в данном случае – сферическая оболочка) с применением стандартных испытательных машин. Рис. 3 иллюстрирует подготовленную к испытаниям сферическую оболочку с силовым кольцом. Могут быть испытаны различные другие варианты оболочечных систем из цилиндрических, конических оболочек с подкреплениями.

Испытывали сферические оболочки из сплава АМг6М с проведением контроля отклонения поверхности оболочки от сферической. Оболочки изготавливали из листового материала взрывной штамповкой на импульсном гидравлическом прессе. Вырезанные из листа (после штамповки) оболочки стыковали с силовыми кольцами, которые вытачивали из труб (также из сплава АМг6М), с помощью синтетического клея на основе эпоксидной смолы. Испытывали в основном сплошные, без отверстий, оболочки, для которых получено численное решение задач устойчивости на основе МЛВ и его быстросходящегося проекционно-итерационного варианта. Оболочки с отверстиями изготавливали по тем же технологическим схемам, отверстия пробивали специальным пуансоном.

При испытаниях применяли скоростную кино съемку, которая дает возможность проследить процесс волнообразования. Обнаружено, в частности, что при потере устойчивости форма локальных вмятин вначале круглая, затем за 0,1...0,14 с она превращается в эллиптическую (такие формы показаны на рис. 1).

Отметим интересную особенность процесса волнообразования для оболочек с круговыми отверстиями. При определенных значениях параметров оболочек и от-

верстий локальная потеря устойчивости вследствие концентрации НДС может происходить вначале не в зоне контакта с нагружающим штампом (наиболее нагруженной частью оболочки), а возле краев отверстий. На рис. 1,2 это показано для оболочки с центральным круговым отверстием.

Экспериментальные данные качественно подтверждают численные решения. Они на 22...35% ниже результатов расчета. Такое расхождение можно объяснить повышенной чувствительностью моделей оболочек к неизбежным несовершенствам, полученным при изготовлении, неоднородностью материала, что приводит к неоднородности НДС, и погрешностями эксперимента при локальном нагружении.

Отметим возможность построения расчетных зависимостей λ_* от параметра (параметров), характеризующего жесткостные свойства нагружающих штампов. Например, для модели Винклера ($p = kw$, p – контактное давление, w – прогиб) таким параметром является “коэффициент постели” k , для модели Власова ($p = \left(k_1 w + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)$) – коэффициенты k_1 и k_2 . Это позволяет рассмотреть оптимизационные задачи выбора параметров конструкции и штампов, определяющих экстремальные значения критической нагрузки.

Построенные на основе проекционно-итерационного варианта МЛВ расчетные схемы определения критических нагрузок позволяют исследовать устойчивость различных оболочечных систем при локализованных воздействиях. В частности, могут быть построены расчетные схемы для исследования сопряженных цилиндрических, конических и сферических оболочек (локализованные воздействия часто передаются при этом в местах стыка оболочек, обычно подкрепленных кольцами [2, 4]), оболочечных систем с отверстиями (возможно определение критических нагрузок и форм волнообразования в зонах концентрации параметров НДС у краев отверстий).

Полученные решения задач устойчивости для упругого деформирования материала могут быть использованы при упругопластической постановке задач устойчивости. В этом случае строятся схемы последовательных приближений [7, 8] при решении задачи теории упругости в каждом из них. Используются известные концепции теории упругопластической устойчивости оболочек [8]. Наиболее логичная из них: исследование построенной для нелинейного деформирования материала зависимости нагрузки от характерного прогиба с определением предельных точек. Критическая нагрузка, определяемая этими точками, близка к бифуркационным нагрузкам (выше их) [8, 23, 24].

Выводы

1. Предложена методика определения критических усилий и форм волнообразования оболочечных систем различного класса на основе разработанного проекционно-итерационного варианта метода локальных вариаций, позволяющая уменьшить компьютерное время расчета (по сравнению с обычным МЛВ).

2. Показана ее вычислительная эффективность на примере исследования локальной устойчивости сферической оболочки, подкрепленной кольцом, при локализованном воздействии. Расчетные значения критических усилий и конфигурация форм волнообразования подтверждены результатами экспериментов.

3. Методика позволяет исследовать широкий класс задач устойчивости неоднородных оболочечных систем при локализованных воздействиях.

Резюме

Досліджено задачі стійкості підкріплених сферичних оболонок, що входять до складу протяжних неоднорідних конструкцій, при локалізованому впливі на основі розроб-

леного нового проекційно-ітераційного варіанту методу локальних варіацій. Стійкість при локальному навантаженні визначає роботоздатність тонкостінних оболонкових конструкцій ракетно-космічної, антенно-хвильової техніки, енергетики. При локалізованому впливі виникає значна концентрація напруг і деформацій. Методи розв'язку відповідних задач є складними, пріоритетне значення мають багатосіткові варіаційно-різницеві схеми. Для задач напружено-деформованого стану і стійкості за суттєво неоднорідного напруженого стану ефективним є метод локальних варіацій, однак він потребує більшого часу розрахунку, аніж скінченнорізницеві методи типу Рітца. Це привело до необхідності розробки більш ефективних схем його реалізації на основі ідеології проекційно-ітераційних методів. Проаналізовано вказану схему методу локальних варіацій, досліджено її збіжність і показано практичну ефективність, пов'язану зі значним зменшенням комп'ютерного часу розрахунку при чисельній реалізації. Розглянуто задачі стійкості складених оболонкових конструкцій зі сферичними оболонками, підкріпленими опорними кільцями, при дії на них локального навантаження. Наведено дані експериментального дослідження. Розрахункові дані критичних зусиль і конфігурація форм хвилеутворення підтверджені експериментально.

1. Гудрамович В. С., Макеев Е. М., Моссаковский В. И., Никитин П. И. Контактное взаимодействие оболочечных конструкций с опорными основаниями при усложненных условиях эксплуатации. *Пробл. прочности*. 1985. № 10. С. 108–114.
2. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
3. Гудрамович В. С., Дисковский И. А., Макеев Е. М. Тонкостенные элементы зеркальных антенн. Киев: Наук. думка, 1986. 153 с.
4. Hudramovych V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading. *Int. Appl. Mech.* 2009. **45**, No. 7. P. 708–729.
5. Гудрамович В. С. Контактные взаимодействия элементов протяженных неоднородных оболочечных конструкций при использовании моделей физической нелинейности. Материалы X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Новгород: НГУ, 2011. С. 57–59.
6. Гудрамович В. С., Клименко Д. В., Гарт Э. Л. Влияние вырезов на прочность цилиндрических отсеков ракет-носителей при неупругом деформировании материала. *Косм. наука і технологія*. 2016. № 6. С. 12–20.
7. Ильющин А. А. Труды. В 4 т. Т. 2. Пластичность: 1946–1966. М.: Физматлит, 2004. 479 с.
8. Гудрамович В. С. Устойчивость упругопластических оболочек. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
9. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1965. **5**, № 4. С. 749–754.
10. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
11. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
12. Gajewski H. und Kluge R. Projections-Iterationsverfahren und nichtlineare Problemen mit monotonen Operatoren. *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss.* 1970. **12**, No. 23. S. 98–115.
13. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

14. Hart E. L. Projection-iterative version of the pointwise relaxation method. *J. Math. Sci.* 2010. **167**, No. 1. P. 76–88.
15. Hart E. L. and Hudramovich V. S. Application of the projective-iterative versions of FEM in damage problems for engineering structures. Proc. of the 2nd Int. Conf. “Maintenance-2012”. Zenica, Bosnia and Herzegovina: Univ. of Zenica, 2012. P. 157–164.
16. Hudramovich V., Hart E., and Rjabokon’ S. Plastic deformation of nonhomogeneous plates. *J. Eng. Math.* 2013. **78**, No. 1. P. 181–197.
17. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л. Конечно-элементный анализ процесса рассеянного разрушения плоскодеформированных упругопластических сред с локальными концентраторами напряжений. Упругость и неупругость (Материалы междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А. А. Ильюшина, 20–21 января, 2016 г., Москва). М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. С. 158–161.
18. Гарт Е., Гудрамович В. Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок. Современные проблемы механики и математики. Львов: ИППММ НАН Украины, 2008. С. 18–20.
19. Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В., Юнга С. Л. Применение модифицированного метода локальных вариаций в задачах нелинейной механики разрушения. *Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела.* 1976. № 1. С. 76–83.
20. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 891 с.
21. Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Под ред. А. А. Лебедева. Киев: Ин Юре, 2003. 538 с.
22. Hart E. L. and Hudramovich V. S. Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional. *J. Appl. Math. Mech.* 2016. **80**, No. 2. P. 156–163.
23. Гудрамович В. С. Критические состояния неупругих оболочек при сложном нагружении. Устойчивость в механике деформированного твердого тела. Калинин: КГУ, 1981. Т. 1. С. 61–87.
24. Bushnell D. Buckling of shells – pitfall for designers. *AIAA J.* 1981. **19**, No. 9. P. 1183–1226.

Поступила 19. 03. 2018