

## Общий случай нелинейной деформационно-силовой модели пролетных железобетонных конструкций

В. М. Карпюк, А. И. Костюк, Ю. А. Семина<sup>1</sup>

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

<sup>1</sup> suomina3091@ukr.net

*Рассмотрена нелинейная деформационно-силовая модель стержневой конструкции. Исходя из единых позиций механики железобетона модель позволяет учитывать особенности совместной работы бетона и арматуры на всех этапах, включая разрушение, в ее расчетных сечениях в общем случае напряженного состояния. Установлено, что модель практически полезна благодаря возможности ее применения при проектировании или усилении балок, ригелей, колонн и элементов раскосных ферм прямоугольного сечения, а также при проверке несущей способности существующих стержневых железобетонных конструкций, работающих в условиях сложного напряженного состояния, включая малоцикловое знакопостоянное нагружение. Разработан алгоритм определения несущей способности расчетного сечения железобетонного стержня при сложном напряженном состоянии. Общие физические соотношения для этого сечения приведены в виде матрицы жесткостей. Алгоритм состоит из блока ввода исходных данных, основной части, вспомогательных подпрограмм проверки условий увеличения вектора нагружения и исчерпания несущей способности, а также блока распечатки результатов расчетов. На каждом этапе расчет осуществляется путем выполнения итераций до тех пор, пока точность определения всех компонент вектора деформаций не будет удовлетворять некоторой заданной величине. Рассмотрены закономерности изменения нормальных и касательных напряжений, обобщенных линейных и угловых деформаций, а также уравнения равновесия для железобетонного стержневого элемента, который работает в условиях сложного напряженного состояния.*

**Ключевые слова:** железобетонный элемент, напряжения, деформации, деформационно-силовая модель, жесткость, уравнения равновесия.

**Введение.** Общий случай напряженного состояния в произвольных сечениях пролетных железобетонных конструкций предусматривает совместное влияние продольных и поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов.

Основы современных представлений о теории прочности бетона и железобетона при трехосном напряженно-деформированном состоянии были заложены Н. Н. Филоненко-Бородичем, Г. А. Гениевым, В. М. Киссюком, Г. А. Тюпиным, Г. С. Писаренко, А. А. Лебедевым, Т. А. Баланом, С. Ф. Клованичем, Н. И. Карпенко и его учениками, Dei Poli, K. H. Gerstle, H. V. Kupfer и др.

Современные ЭВМ позволяют решать задачи со сложными расчетными моделями численными методами.

**Теоретические предпосылки.** Рассмотрим железобетонный стержень-балку прямоугольного сечения с постоянной по длине жесткостью, в расчетных сечениях которой имеет место общий случай напряженного состояния (рис. 1).

Считаем, что стержень-балка изготовлена из тяжелого бетона, твердение которого происходит в нормальных природных условиях. Армирование – произвольное в виде системы ортогонально направленных стержней: рабочей и монтажной арматуры вдоль оси  $z$ , поперечной вертикальной (по оси  $y$ ) и горизонтальной (по оси  $x$ ).

Рассмотрим задачу определения несущей способности железобетонного стержня с учетом его центрального сжатия (растяжения), косоугольного изгиба со свободным или сжатым кручением, влияния конструктивных факторов и факторов внешнего воз-

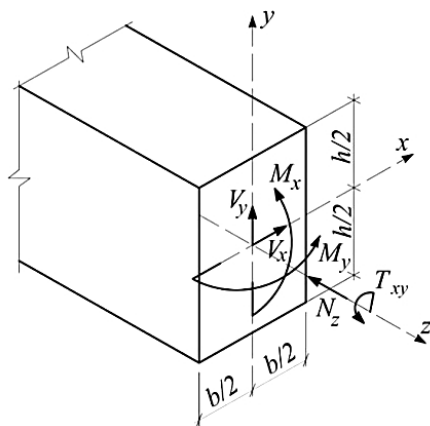


Рис. 1. Внутренние усилия в произвольном нормальном сечении стержня в общем случае напряженно-деформированного состояния.

действия, нелинейных свойств бетона и арматуры, простого пропорционального, малоциклового знакопостоянного и знакопеременного нагружения.

*Основные гипотезы и предпосылки:*

железобетонный стержневой элемент является негибким;  
 рассматриваются нормальные к продольной оси расчетные сечения;  
 связи между напряжениями и деформациями в бетоне и арматуре устанавливаются с помощью полных диаграмм состояния;

при деформации сжатия (растяжения) и изгиба считается справедливой гипотеза плоских сечений;

касательные напряжения в расчетном сечении элемента при свободном его кручении определяются в соответствии с рекомендациями [1, 2];

касательные и нормальные напряжения в расчетных сечениях стержня при его сжатом кручении определяются с учетом решения, приведенного в [3, 4];

бетон и стержни продольной арматуры воспринимают нормальные  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и касательные  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xy}$  напряжения;

стержни поперечной арматуры воспринимают только касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$ , распределение которых по их длине считается неравномерным;

в качестве критерия разрушения бетона (возникновение макротрещин) может быть принято феноменологическое условие прочности, приведенное в [5] или в [6, 7];

до появления макротрещин считается справедливым условие совместности деформаций бетона и арматуры. После их возникновения бетон выключается из работы, и все усилия в сечении с трещиной воспринимаются только арматурой;

арматурные стержни исключаются из работы при возникновении в них деформаций текучести. В качестве критерия принято условие текучести Губера–Мизеса–Генки [3];

при переходе от напряжений к обобщенным внутренним силовым факторам применяется процедура численного интегрирования элементарных внутренних силовых факторов по всей площади расчетного сечения стержневого элемента. При этом последнее условно делится на отдельные малые элементы-частицы, в пределах которых напряжения считаются одинаковыми.

Согласно рекомендациям Г. А. Гениева, Н. И. Карпенко, С. Ф. Клованича и др., прочность бетона в системе координат главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  описывается непрерывной выпуклой симметричной относительно октаэдрического нормального напряжения  $\sigma_0$ , но наклонной к указанным координатным осям поверхностью, построенной по методу Филоненко-Бородича с использованием уравнения

$$f(\sigma_{0c}, \tau_{0c}, \theta_c) = \tau_{0c} - \tau_{01c}(\sigma_{0c})\rho(\theta_c) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{0c}$ ,  $\tau_{0c}$  – октаэдрические нормальные и касательные напряжения;  $\theta_c$  – угол вида напряженного состояния;  $\rho(\theta_c)$  – интерполяционная составляющая между  $\tau_{01}(\theta_c = 60^\circ)$  и  $\tau_{02}(\theta_c = 0)$ , которая определяется согласно [8] по формуле

$$\rho(\theta_c) = [2a_c \cos \theta_c + b_c \sqrt{a_c(4 \cos^2 \theta_c - 1) + b_c^2}] / (4a_c \cos^2 \theta_c + b_c^2), \quad (2)$$

где  $a_c = 1 - c_c^2$ ;  $b_c = 2c_c - 1$ ;  $c_c = \tau_{02c} / \tau_{01c}$ .

Связь между октаэдрическими напряжениями при углах вида напряженного состояния  $\theta_c = 60^\circ$  и  $\theta_c = 0$  можно представить так:

$$\sigma_{0c} = A_1 \tau_{01c}^2 + B_1 \tau_{01c} + C_1; \quad \sigma_{0c} = A_2 \tau_{02c}^2 + B_2 \tau_{02c} + C_1. \quad (3)$$

Коэффициенты  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  получены путем “привязки” характерных точек на “поверхности” прочности бетона. Их предлагается определять с использованием экспериментальных зависимостей Бондаренко и Колчунова [9] по следующим формулам:

$$\begin{cases} A_1 = 4,14 / (f_{ck} - f_{ctk}); \\ B_1 = (5,38 f_{ck}^2 + f_{ck} f_{ctk} - 6,38 f_{ctk}^2) / [4,24 (f_{ck} - f_{ctk})^2]; \\ A_2 = (4,09 f_{ck} - 4,16 f_{ctk}) / (1,20 f_{ck}^2 - 2,20 f_{ck} f_{ctk} + f_{ctk}^2); \\ B_2 = (4,46 f_{ck}^2 - 2,04 f_{ck} f_{ctk} - 0,73 f_{ctk}^2) / (4,32 f_{ck}^2 - 7,92 f_{ck} f_{ctk} + 3,60 f_{ctk}^2); \\ C_1 = -H = -(0,82 f_{ck} f_{ctk}) / (f_{ck} - f_{ctk}), \end{cases} \quad (4)$$

где  $f_{ck}, f_{ctk}$  – характеристические (расчетные  $f_{cd}, f_{ctd}$ ) значения прочности бетона при сжатии и растяжении.

По формуле (1) можно однозначно описать поверхность прочности бетона, поскольку в нее через коэффициенты формулы (4) включены пять независимых параметров его прочности, соответствующие отдельным случаям напряженного состояния:

одноосное сжатие  $R_c = f_{ck}$  и растяжение  $R_p = f_{ctk}$ ;

двухосное сжатие  $R_{2c} \cong 1,2 R_c = 1,2 f_{ck}$  и растяжение  $R_{2p} \cong R_p = f_{ctk}$ ;

трехосное равномерное растяжение  $R_{3p} + H \cong (0,82 R_c R_p) / (R_c - R_p)$ .

Угол вида напряженного состояния в бетоне рассматриваемого стержня можно определить по выражениям [3] с учетом  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ :

$$\theta_c = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}D_3}{2\sqrt{D_2^3}} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{\sqrt{\sigma_{zc} [2\sigma_{zc}^2 + 9(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)]}}{2\sqrt{(\sigma_{zc}^2/3 + \tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)^3}} \right], \quad (5)$$

где  $D_2, D_3$  – второй и третий инварианты девиатора напряжений.

С учетом формул (1) и (3) получим

$$\sigma_{0c} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \tau_{0c}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \tau_{0c} + C_1. \quad (6)$$

Предельные значения прочности бетона (на поверхности прочности) в виде  $\bar{\sigma}_{0c}$  и  $\bar{\tau}_{0c}$  определяются путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{0c} - \tau_m = m_\sigma (\bar{\sigma}_{0c} - \sigma_m); \\ \bar{\sigma}_{0c} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \bar{\tau}_{0c}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \bar{\tau}_{0c} + C_1, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\sigma_m$  и  $\tau_m$  – напряжения на предыдущем уровне нагружения (при простой пропорционально возрастающей нагрузке  $\sigma_m = \tau_m = 0$ );  $m_\sigma$  – коэффициент, характеризующий напряженно-деформированное состояние бетона.

Условие текучести Губера–Мизеса–Генки [3] арматурной стали при  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  имеет вид

$$\sigma_{zs}^2 + 3\tau_{xyx}^2 + 3\tau_{zxs}^2 + 3\tau_{zyx}^2 = \tilde{f}_{yd}^2, \quad (8)$$

где  $\tilde{f}_{yd}^2$  – расчетная прочность арматуры на границе текучести с учетом ее снижения вследствие сложного напряженного состояния по сравнению с центральным растяжением–сжатием.

В соответствии с рекомендациями [5] диаграмму деформирования бетона при сжатии (растяжении) можно представить так:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{b0}\nu_b} = \frac{\sigma_c}{E_{c0}\xi_c} = \varepsilon_c, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_b = \varepsilon_c$  – относительные линейные деформации бетона;  $\sigma_b = \sigma_c$  – нормальные напряжения в бетоне;  $E_{b0} = E_{c0}$  – начальный модуль упругости бетона;  $\nu_b = \xi_c$  – коэффициент изменения секущего модуля упругости бетона.

Деформационные зависимости для бетона, находящегося в сложном напряженно-деформированном состоянии, целесообразно формулировать также в виде связи между октаэдрическими напряжениями и деформациями. При этом принято считать справедливыми следующие гипотезы:

связь между октаэдрическими напряжениями  $\tau_{0c}$  и сдвигами на октаэдрических площадках  $\gamma_{0c}$  – нелинейная:  $\tau_{0c} = G_c(\gamma_{0c})\gamma_{0c}$ , где  $G_c(\gamma_{0c})$  – секущий (октаэдрический) модуль сдвига бетона;

связь между октаэдрическими нормальными напряжениями  $\sigma_{0c}$  и средними деформациями  $\varepsilon_{0c}$  также нелинейная и может быть представлена в виде  $\sigma_{0c} = K(\gamma_{0c})(\varepsilon_{0c} - \rho_c\gamma_{0c}^2)$ , где  $\rho_c$  – модуль дилатации (по [10] –  $g_{0c}$ );  $K(\gamma_{0c})$  – модуль объемных деформаций.

Для определения секущих модулей по аналогии с гипотезой о единой кривой деформирования целесообразно использовать гипотезу Клованича–Безушко, согласно которой форма связи между напряжениями и деформациями не зависит от вида напряженного состояния, т.е. связь между  $\tau_{0c}$  и  $\gamma_{0c}$  можно принять такой же, как и при одноосном сжатии, и для определения секущего модуля сдвига можно использовать зависимость (рис. 2), предложенную Саенсом –  $G_c(\gamma_{0c}) = G_{0c}f(\gamma_0)$ , где

$$f(\gamma_{0c}) = \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}; \quad (10)$$

$$C = \lambda(1 - \xi_r) / [\xi_r(\eta_r - 1)^2 - 1/\eta_r]; \quad B = 1 - 2C; \quad A = C + \lambda - 2;$$

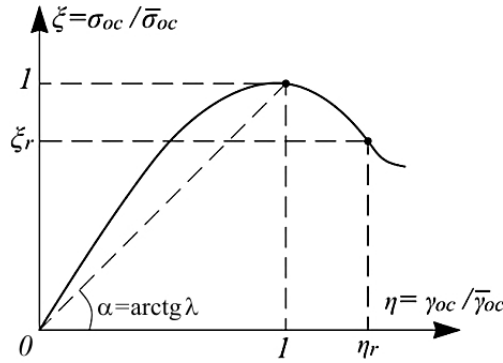


Рис. 2. Диаграмма деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии.

$\xi_r = \bar{\sigma}_r / f_{ck} \approx 0,85$ ;  $\eta_r = \gamma / \bar{\gamma}_r \approx 1,41$ ;  $\xi = \sigma_{0c} / f_{ck}$ ;  $\eta = \gamma_{0c} / \bar{\gamma}_{0c}$ ;  $\lambda = \xi / \eta$ ;  $G_{0c}$  – начальный модуль сдвига,  $G_{0c} = G_{c0} = E_{c0} / [2(1 + \nu_c)]$ ;

$$\sigma_{0c} = (\sigma_{xc} + \sigma_{yc} + \sigma_{zc}) / 3;$$

$$\varepsilon_{0c} = (\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc}) / 3;$$

$$\tau_{0c} = 1/3 \sqrt{(\sigma_{xc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{xc})^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)};$$

$$\gamma_{0c} = 2/3 \sqrt{(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{xc})^2 + 3/2(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

Для рассматриваемого стержня с учетом  $\sigma_{xc} = \sigma_{yc} = 0$  получим

$$\sigma_{0c} = \sigma_{zc} / 3; \quad \varepsilon_{0c} = \varepsilon_{zc} / 3; \quad \tau_{0c} = 1/3 \sqrt{2\sigma_{zc}^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)};$$

$$\gamma_{0c} = 2/3 \sqrt{2\varepsilon_{zc}^2 + 3/2(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

Предельные (максимально возможные) сдвиги  $\bar{\gamma}_r$  на октаэдрических площадках предлагается определять по уравнению регрессии [8], полученному в результате обработки данных при трехосном сжатии А. В. Яшина и М. Д. Котсовова:

$$\bar{\gamma}_r = 7,97(\tau_{0c} / f_{ck})^2 + 15,22(\tau_{0c} / f_{ck}) - 3,713. \quad (11)$$

Модуль дилатации бетона согласно [10] будет

$$\rho_c = g_{0c} = -\theta_c / \Gamma_c^2 = -(\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc}) G_{0c} / 4 f_{bk}, \quad (12)$$

где  $\theta_c$ ,  $\Gamma_c$  – предельные объемные деформации и интенсивность деформаций бетона при чистом сдвиге;  $f_{bk}$  – характеристическое (расчетное  $f_{bd}$ ) значение предельных напряжений сцепления, равное приблизительно  $f_{bd} = R_{b,sh} = 0,7\sqrt{R_b R_{bt}}$  по Байкову.

Модуль объемных деформаций определяется аналогично:

$$K_c(\gamma_{0c}) = K_{0c} f(\gamma_{0c}),$$

где  $K_{0c}$  – начальный модуль объемных деформаций,  $K_{0c} = E_{c0}/(1 - 2\nu_c)$ , откуда секущий модуль упругости  $E_c$  и коэффициент поперечных деформаций  $\nu_c$  бетона при сложнапряженном состоянии согласно [5] определяются так:

$$\begin{aligned} E_c &= 3K_c(\gamma_{0c})G_c(\gamma_{0c})/[G_c(\gamma_{0c}) + K_c(\gamma_{0c})]; \\ \nu_c &= [K_c(\gamma_{0c}) - 2G_c(\gamma_{0c})]/\{2[G_c(\gamma_{0c}) + K_c(\gamma_{0c})]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично можно получить формулы для секущего модуля упругости при сдвиге арматурной стали и зависимости для диаграммы ее сдвига:

$$G_s = \frac{E_{sk} \vartheta_s}{[2(1 + \nu_s)]}; \quad \tau_s = \frac{E_{sk} \vartheta_s}{[2(1 + \nu_s)]} \gamma_s, \quad (14)$$

где  $\nu_s$  – коэффициент изменения секущего модуля упругости.

Осевую деформацию в стержнях поперечной арматуры и относительную угловую деформацию в прилежащем бетоне можно вычислить согласно [11]:

$$\varepsilon_{sw}^* = \gamma_c^* = \gamma_c [1 + d_{sw} E_{sw} \nu_{sw} (1 + \nu_c)] / (2l_{sw} E_{c0} \nu_c)^{-1}. \quad (15)$$

Совместная работа продольной и поперечной арматуры при расчете железобетонных элементов учитывается путем уменьшения расчетного значения предела текучести продольной арматуры по [11] с понижающим коэффициентом  $k_1$ :

$$\tilde{f}_{yd} = f_{yd} \sqrt{1 - 3s^2 k_1 (\text{ctg}^2 \alpha / l_{sw,x}^2 + \text{ctg}^2 \beta / l_{sw,y}^2) / [4(1 + \nu_s)^2]}, \quad (16)$$

где  $k_1 = 0,08 \dots 0,10$ .

*Расчетное поперечное сечение элемента.* Бетонная часть поперечного сечения стержня условно разбивается на малые элементы прямоугольной формы (рис. 3), размеры которых согласуются с крупностью наибольшей фракции бетона. Каждому из этих элементов присваивается соответствующий номер. Для каждого  $n$ -го элемента в расчетном сечении фиксируются координаты его центра тяжести относительно центра осей симметрии сечения  $x_{cn}$ ,  $y_{cn}$ , площадь  $A_{cn}$ , характеристическая прочность бетона при сжатии  $f_{ck}$ , растяжении  $f_{ctk}$ , начальный модуль упругости  $E_{c0}$ . Коэффициент Пуассона  $\nu_c = 0,2$ .

Расположение стержней продольной арматуры принимается дискретным, и каждому из них (на рис. 3 точки 1–4) присваивается номер  $j$ , указываются диаметр  $d_{sj}$ , положение центра тяжести относительно центра осей симметрии сечения элемента  $x_{sj}$ ,  $y_{sj}$ , характеристические значения прочности на границе текучести  $f_{yjk}$  (или  $f_{0,2kj}$ ), относительных деформаций арматурной стали  $\varepsilon_{uk}$ , начального модуля упругости  $E_{skj}$  и класс арматуры. Коэффициент Пуассона  $\nu_s = 0,25$ . Расположение стержней поперечной арматуры в плоскости расчетного сечения принимается также дискретным.

Горизонтальные и вертикальные стержни поперечной арматуры (хомуты) условно разбиваются на отдельные участки. Каждому из них присваивается номер  $i$ , фиксируется диаметр  $d_{swi}$ , площадь поперечного сечения  $A_{swi}$ , площадь поверхности соприкосновения с бетоном  $A_{cswi}$  и координаты центра тяжести  $x_{swi}$ ,  $y_{swi}$  в плоскости расчетного поперечного сечения относительно осей симметрии. Задаются характеристические значения прочности на границе текучести  $f_{ywk}$  и при растяжении  $f_{twk}$ , модуль упругости  $E_{sw}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{sw} = 0,25$ , а также харак-

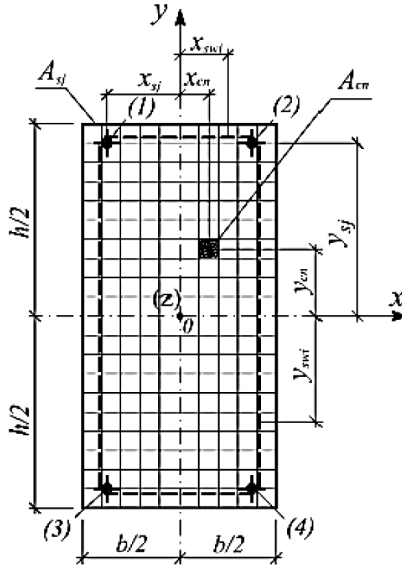


Рис. 3. Составные части расчетного поперечного сечения стержня.

теристическое значение относительных деформаций  $\varepsilon_{uwk}$ , граница или уровень упругости и класс арматуры.

По длине элемента размещение поперечной арматуры учитывается в виде распределенного на его грани слоя погонной площади:

$$A_{zswi} = \pi d_{swi}^2 / (4s_i), \tag{17}$$

где  $s_i$  – шаг поперечных стержней в продольном направлении.

Уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{aligned} N_z &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \sigma_{zsj}; & M_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \sigma_{zsj} X_{sj}; \\ V_x &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zxcn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \tau_{zxsj} + \sum_{i=1}^{l_{xsw,1-2,3-4}} A_{xswi} \sigma_{xswi}; \\ V_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zycn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} \tau_{zysj} + \sum_{i=1}^{l_{ysw,1-4,2-3}} A_{yswi} \sigma_{yswi}; \\ T_{xy} &= \sum_{n=1}^k A_{cn} (\tau_{zycn} X_{cn}^{tor} - \tau_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) + \\ &+ \sum_{j=1}^m A_{sj} (\tau_{zysj} X_{sj}^{tor} - \tau_{zxsj} Y_{sj}^{tor}) + \sum_{i=1}^{l_{ysw,1..4}} A_{swi} (\sigma_{yswi} X_{swi}^{tor} - \sigma_{xswi} Y_{swi}^{tor}), \end{aligned} \right. \tag{18}$$

где  $\sigma_{zcn}$  – нормальные напряжения в  $n$ -й части бетонного сечения;  $\sigma_{zsj}$  – нормальные напряжения в  $j$ -м продольном стержне;  $\tau_{zxcn}$ ,  $\tau_{zycn}$  – касательные напряжения в  $n$ -й части бетонного сечения;  $\tau_{zxsj}$ ,  $\tau_{zysj}$  – касательные напряжения в  $j$ -м продольном

стержне;  $\sigma_{xswi}$ ,  $\sigma_{yswi}$  – нормальные напряжения, возникающие на  $i$ -м участке горизонтальной и вертикальной поперечной арматуры.

*Нормальные и касательные напряжения:*

$$\begin{aligned} \sigma_{zml} &= E_{ml} \xi_{zml} \varepsilon_{zml}; & \tau_{zxml} &= G_{ml} \vartheta_{zxml} \gamma_{zxml}; & \tau_{zyml} &= G_{ml} \vartheta_{zyml} \gamma_{zyml}; \\ \tau_{xyml} &= G_{ml} \vartheta_{xyml} \gamma_{xyml}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\xi$  – коэффициент изменения секущего модуля упругости бетона  $E_{ml}$ ;  $\vartheta$  – коэффициент изменения секущего модуля упругости сдвига  $G_{ml}$ ;  $m=c$  для части бетонного сечения;  $m=s$  для стержней продольной арматуры;  $m=sw$  для стержней поперечной арматуры;  $l$  – номер части бетона или стержней продольной арматуры;  $i$  – номер части стержней поперечной арматуры.

Обобщенные линейные и угловые деформации определяются по гипотезе плоских сечений, по решениям теории упругости Хана [12] при изгибе, по функциям распределения напряжений Школы при стесненном и Сен-Венана при свободном кручении:

$$\begin{cases} \varepsilon_{zml} = \varepsilon_0 + \chi_x X_{ml} + \chi_y Y_{ml} + \beta_z \theta_z \varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor}); \\ \gamma_{zxml} = K_x g_{xml} + K_y h_{yml} + \theta_z f_{zxml}; \\ \gamma_{zyml} = K_y g_{yml} + K_x h_{xml} - \theta_z f_{zyml}; \\ \gamma_{xyml} = -\theta_z f_{xyml}, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\varepsilon_0$  – осевая относительная деформация элемента по оси  $z$ ;  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  – кривизны изгиба в плоскостях действия изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  соответственно;  $K_x$ ,  $K_y$  – кривизны сдвига в плоскостях действия поперечных сил  $V_x$ ,  $V_y$  соответственно;  $\theta_z$  – относительный (погонный) угол закручивания единицы длины стержня (рад/м);  $\varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor})$  – функция кручения Сен-Венана относительно центра кручения;  $g_{xml}$ ,  $g_{yml}$ ,  $h_{xml}$ ,  $h_{yml}$  – функции Хана распределения угловых деформаций при поперечном изгибе;  $f_{zxml} = \frac{\tau_{zxml}}{(\theta_z G_{ml})}$ ,  $f_{zyml} = \frac{\tau_{zyml}}{(\theta_z G_{ml})}$ ,  $f_{xyml} = \frac{\tau_{xyml}}{(\theta_z G_{ml})}$  – функции распределения касательных напряжений при свободном и стесненном кручении.

Коэффициент депланации сечения  $\beta_z$  при стесненном кручении определяется по формуле

$$\beta_z = \eta e^{-\eta z},$$

где  $\eta$  – коэффициент сжатия [4];  $z$  – расстояние вдоль оси элемента к ближайшему жесткому закреплению. При свободном кручении  $\beta_z = 1$ .

**Результаты исследований и их обсуждение.** Развивая идеи [13] с учетом действия поперечных сил, общие физические соотношения для расчетного поперечного сечения железобетонного стержня принимают вид

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ V_x \\ V_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_x \\ K_x \\ K_y \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad (21)$$



или

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}.$$

Здесь  $D_{11}$  – осевая жесткость элемента,

$$D_{11} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} / \psi_{sj}; \quad (22)$$

 $D_{22}$ ,  $D_{33}$  – изгибающие жесткости в плоскостях  $zox$ ,  $zoy$ ,

$$D_{22} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} X_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj}^2 / \psi_{sj}; \quad (23)$$

$$D_{33} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} Y_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} Y_{sj}^2 / \psi_{sj}; \quad (24)$$

 $D_{23}$  – жесткость взаимного влияния изгиба в двух плоскостях,

$$D_{23} = D_{32} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} X_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj} Y_{sj} / \psi_{sj}; \quad (25)$$

 $D_{12}$ ,  $D_{13}$  – жесткости влияния продольной силы на изгиб и изгибающих моментов на удлинение элемента,

$$D_{12} = D_{21} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} X_{sj} / \psi_{sj}; \quad (26)$$

$$D_{13} = D_{31} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \zeta_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \zeta_{zsj} Y_{sj} / \psi_{sj}; \quad (27)$$

 $D_{44}$ ,  $D_{55}$  – жесткости сдвига в плоскостях  $zox$ ,  $zoy$  от действия поперечных сил,

$$D_{44} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zxcn} g_{xcn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} g_{xsj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xswi} g_{xswi,c}; \quad (28)$$

$$D_{55} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zycn} g_{ycn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} g_{ysj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{yswi} g_{yswi,c}; \quad (29)$$

 $D_{45}$ ,  $D_{54}$  – жесткости взаимного влияния изгиба в плоскостях  $zox$ ,  $zoy$ ,

$$D_{45} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zxcn} h_{xcn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} h_{xsj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xswi} h_{xswi,c}; \quad (30)$$

$$D_{54} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zycn} h_{ycn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} h_{ysj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \xi_{yswi} h_{yswi,c}; \quad (31)$$

$D_{16}$ ,  $D_{26}$ ,  $D_{36}$  – жесткости влияния крутящего момента  $T_{xy}$  на удлинение и кривизны изгиба в плоскостях  $zox$ ,  $zoy$ , продольной силы  $N$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  на сдвиг в плоскости  $xoy$  соответственно,

$$D_{16} = D_{61} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \xi_{cn} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \xi_{zsj} \beta_z \varphi(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}) / \psi_{sj}; \quad (32)$$

$$D_{26} = D_{62} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \xi_{cn} X_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \xi_{zsj} X_{sj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}) / \psi_{sj}; \quad (33)$$

$$D_{36} = D_{63} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{c0n} \xi_{cn} Y_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m A_{sj} E_{sj} \xi_{zsj} Y_{sj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{sj}^{tor}, Y_{sj}^{tor}) / \psi_{sj}; \quad (34)$$

$D_{46}$ ,  $D_{56}$  – жесткости влияния крутящего момента  $T_{xy}$  на сдвиг в плоскостях  $zox$ ,  $zoy$  и поперечных сил  $V_x$ ,  $V_y$  на сдвиг в плоскости  $xoy$ ,

$$D_{46} = D_{64} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zxcn} f_{zxcn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zxsj} f_{zxsj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \xi_{xswi} f_{zxswi,c}; \quad (35)$$

$$D_{56} = D_{65} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{zycn} f_{zycn}}{[2(1+\nu_c)]} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{zysj} f_{zysj}}{[2(1+\nu_s)]} + \sum_{i=1}^{l_{sw,y}} A_{swi} E_{sw} \xi_{yswi} f_{zyswi,c}; \quad (36)$$

$D_{66}$  – жесткости при кручении стержня в плоскости  $xoy$ ,

$$D_{66} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{c0n} \vartheta_{xycn}}{[2(1+\nu_c)]} (f_{zycn} X_{cn}^{tor} - f_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) +$$

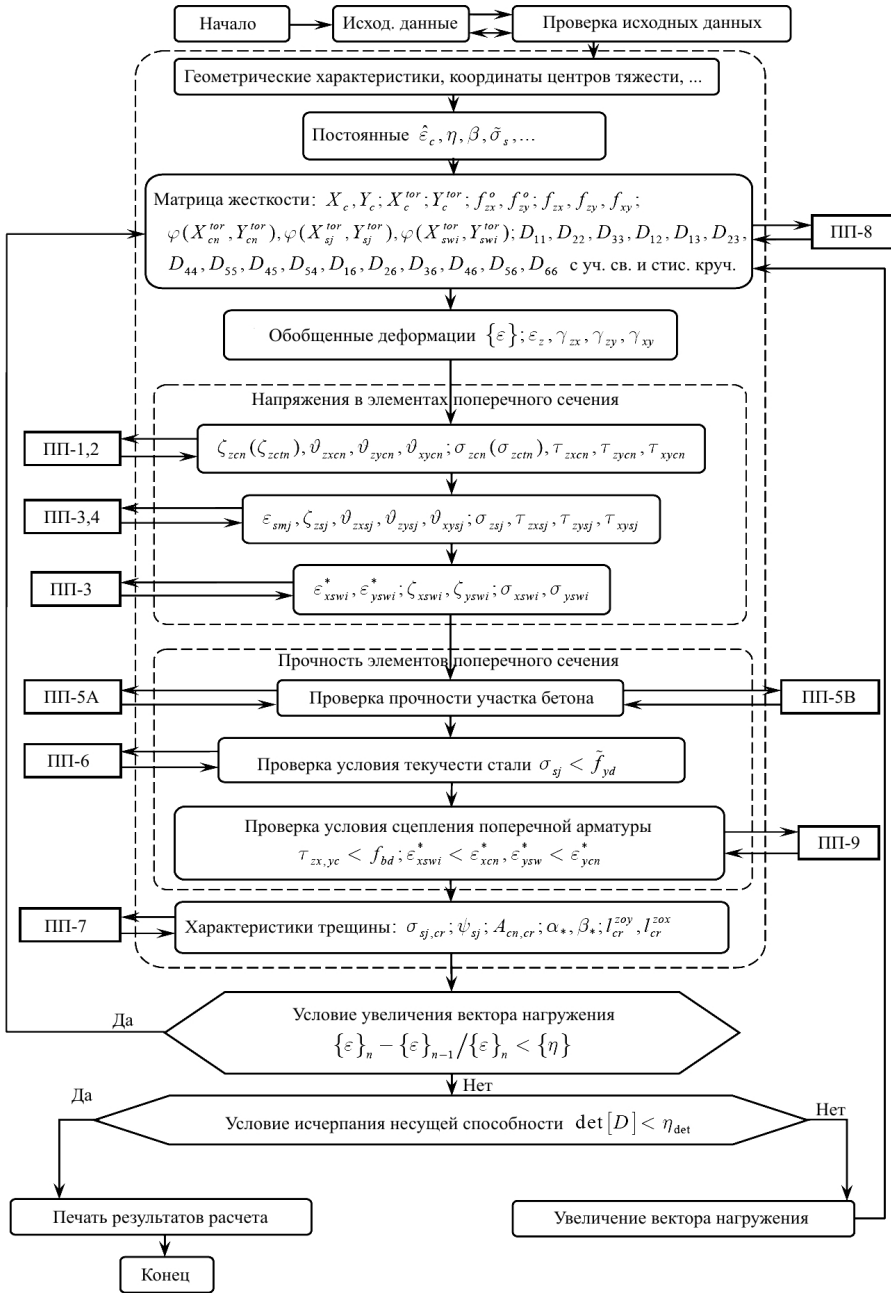


Рис. 4. Блок-схема алгоритма определения несущей способности сложнапряженного железобетонного стержня в расчетном сечении.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^m \frac{A_{sj} E_{sj} \vartheta_{xy sj}}{[2(1+\nu_s)]} (f_{zysj} X_{sj}^{tor} - f_{zxsj} Y_{sj}^{tor}) + \\
 & + \sum_{i=1}^{l_{sw,y} + l_{sw,x}} A_{swi} E_{sw} \zeta_{xy swi} (f_{zyswi} X_{swi}^{tor} - f_{zxswi} Y_{swi}^{tor}); \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\psi_{sj} = 1 - \omega \sigma_{sj,cr} / \sigma_{sj}, \quad (38)$$

где  $\sigma_{sj,cr}$  – напряжения в  $j$ -м стержне в момент возникновения трещин;  $\sigma_{sj}$  – поточное напряжение в  $j$ -м стержне продольной арматуры;  $\omega$  – коэффициент полноты эпюры растянутого бетона,  $\omega = 0,7$ .

Считается, что соотношения формул (21)–(37) физически справедливы на всех стадиях напряженно-деформированного состояния стержневых железобетонных элементов прямоугольного сечения при простом пропорциональном нагружении.

На любой стадии нагружения вектор деформаций имеет вид

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{N\}. \quad (39)$$

Блок-схема алгоритма определения несущей способности железобетонных стержней прямоугольного поперечного сечения с произвольным ортогональным армированием [14] представлена на рис. 4.

Алгоритм состоит из блока ввода исходных данных, основной части, вспомогательных подпрограмм проверки условий увеличения вектора нагрузки и исчерпания несущей способности, а также блока распечатки результатов расчетов.

На каждой стадии нагружения расчет осуществляется путем выполнения некоторого количества итераций до тех пор, пока точность определения всех компонент вектора деформаций не будет удовлетворять некоторой заданной величине, т.е. пока не будет выполнено условие

$$(\{\varepsilon\}_n - \{\varepsilon\}_{n-1}) / \{\varepsilon\}_n < \{\eta\}, \quad (40)$$

где  $\{\varepsilon\}_n$  – вектор деформаций, вычисленный на  $n$ -й итерации;  $\{\varepsilon\}_{n-1}$  – то же на предыдущей ( $n-1$ )-й итерации;  $\{\eta\}$  – вектор точности, сложенный из заданных точностей для каждой составляющей вектора деформаций.

Последовательно увеличивая вектор действующих в стержне усилий заданного соотношения, можно определить несущую способность железобетонного стержня. В качестве предельного нагружения принимается максимальный вектор усилий  $\{N\}$ , при котором система уравнений (21) имеет решение, т.е. определитель матрицы  $[D]$  не равен нулю (с некоторой заданной точностью  $\eta_{det}$ ) или несущая способность железобетонного стержня считается исчерпанной, если

$$\det[D] < \eta_{det}. \quad (41)$$

## Выводы

1. Установлено, что нелинейная деформационная модель стержневой конструкции с единых позиций механики железобетона позволяет учитывать особенности совместной работы бетона и арматуры на всех стадиях, включая разрушение, в расчетных сечениях в общем случае напряженного состояния при совместном действии продольных и поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов.

2. Модель можно применять при проектировании или усилении балок, ригелей, колонн и элементов раскосных ферм прямоугольного поперечного сечения, а также при проверке несущей способности существующих стержневых железобетонных конструкций, работающих в условиях сложного напряженно-деформированного состояния.

3. Прогноз трещинообразования на гранях железобетонного стержня и проверку прочности бетона целесообразно осуществлять по трехуровневому критерию Круглова или пятипараметрическому критерию Карпенко.

4. Образование трещин в бетоне учитывается путем исключения из расчета тех его частей, пространственное напряженно-деформированное состояние которых не удовлетворяет критериям прочности.

## Резюме

Розглянуто нелінійну деформаційно-силову модель стрижневої конструкції. На основі єдиних позицій механіки залізобетону модель дозволяє враховувати сумісну роботу бетону й арматури на всіх етапах, включаючи руйнування, в її розрахункових перерізах у загальному випадку напруженого стану. Установлено, що модель практично корисна завдяки можливості її використання при проектуванні або підсиленні балок, ригелів, колон і елементів розкільних ферм прямокутного перерізу, а також при перевірці несівної здатності існуючих стрижневих залізобетонних конструкцій, що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану, включаючи малоциклове знакостале навантаження. Розроблено алгоритм визначення несівної здатності розрахункового перерізу залізобетонного стрижня при складному напруженому стані. Загальні фізичні співвідношення для цього перерізу наведено у вигляді матриці жорсткості. Алгоритм включає блок введення вихідних даних, основну частину, допоміжні підпрограми перевірки умов збільшення вектора навантаження і вичерпування несівної здатності та блока роздруку результатів розрахунків. На кожному етапі розрахунок проводиться шляхом виконання ітерацій до тих пір, доки точність визначення всіх компонент вектора деформацій не буде задовольняти деякій заданій величині. Розглянуто закономірності зміни нормальних і дотичних напружень, узагальнених лінійних і кутових деформацій та рівняння рівноваги для залізобетонного стрижневого елемента, який працює в умовах складного напруженого стану.

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
2. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
3. Безухов М. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1961. 531 с.
4. Школа Ю. А. Напряженное состояние балок, подверженных стесненному кручению. *Строит. конструкции*. 2000. 1, № 52. С. 208–213.
5. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
6. Круглов В. М. Феноменологический критерий прочности бетона при трехосном напряженном состоянии. *Изв. вузов*. 1986. 2, № 6. С. 6–11.
7. Круглов В. М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона при трехосном напряженном состоянии. *Строит. механика и расчет сооружений*. 1987. 2, № 4. С. 40–44.
8. Безушко Д. І. Нелінійні моделі матеріалів при розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються, методом скінченних елементів. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Одеса, 2008. 16 с.
9. Бондаренко В. М., Колчунов В. И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: Ассоциация строительных вузов, 2004. 472 с.
10. Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.

11. Школа Ю. А. Несущая способность и деформативность железобетонных стержневых элементов при сложном напряженном состоянии. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Одесса, 2002. 12 с.
12. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
13. Яременко О. Ф., Школа Ю. О. Фізичні співвідношення для перерізів залізобетонних стержневих елементів у загальному випадку напруженого стану. *Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка"*. 2007. 3, № 60. С. 339–344.
14. Карп'юк В. М. Розрахункові моделі силового опору прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану. Одеса: ОДАБА, 2014. 112 с.

Поступила 12. 09. 2017