УДК 533.9

**Д. Н. ЛАЗУЧЕНКОВ, Н. М. ЛАЗУЧЕНКОВ**

# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗОНДОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПОТОКЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ.

*Институт технической механики*
*Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,*
*ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: lazuch.dn@gmail.com*

Метою роботи є розробка та обґрунтування процедури ідентифікації параметрів незбуреної беззіштовхувальної плазми на основі параметричного опису вольтамперної характеристики (ВАХ) поперечно обтічного тонкого циліндричного зонду із залученням апріорної інформації про властивості плазми та умови експерименту. На основі кінетичної моделі Власова–Пуассона проведено числові дослідження двовимірної прямої задачі зондових вимірювань. Розраховано іонні та електронні струми на поперечно обтічний циліндр в залежності від іонного швидкісного відношення, ступеня неізотермічності плазми та відношення радіусу циліндру до дебаєвського радіусу екранування. За результатами розрахунків зроблено корекцію класичних апроксимацій зондових струмів, визначено діапазони застосовності апроксимації повної ВАХ тонкого циліндричного зонду в потоці беззіштовхувальної плазми. Розроблено процедуру ідентифікації параметрів незбуреної плазми, засновану на порівнянні теоретичної апроксимації з результатами вимірювань ВАХ. Апріорна інформація про властивості плазми та умови експерименту задається у вигляді обмежень на параметри апроксимації повної ВАХ. Проведено дослідження впливу погрішностей зондових вимірювань на визначення параметрів плазми. Отримані результати можуть бути використані у діагностиці беззіштовхувальної плазми.

Целью работы является разработка и обоснование процедуры идентификации параметров невозмущенной бесстолкновительной плазмы на основе параметрического описания вольтамперной характеристики (ВАХ) поперечно обтекаемого тонкого цилиндрического зонда с привлечением априорной информации о свойствах плазмы и условиях эксперимента. На основе кинетической модели Власова–Пуассона проведены численные исследования двумерной прямой задачи зондовых измерений. Рассчитаны ионные и электронные токи на поперечно обтекаемый цилиндр в зависимости от ионного скоростного отношения, степени неизотермичности плазмы и отношения радиуса цилиндра к дебаевскому радиусу экранирования. По результатам расчетов выполнена коррекция классических аппроксимаций зондовых токов, определены диапазоны применимости аппроксимации полной ВАХ тонкого цилиндрического зонда в потоке бесстолкновительной плазмы. Разработана процедура идентификации параметров невозмущенной плазмы, основанная на сравнении теоретической аппроксимации с результатами измерений ВАХ. Априорная информация о свойствах плазмы и условиях эксперимента задается в виде ограничений на параметры аппроксимации полной ВАХ. Проведены исследования влияния погрешностей зондовых измерений на восстановление параметров плазмы. Полученные результаты могут быть использованы в диагностике бесстолкновительной плазмы.

The aim of this work is to develop and substantiate a procedure for the characterization of an unperturbed collisionless plasma on the basis of a parametric description of the current-voltage characteristic of a thin cylindrical probe positioned perpendicular to the plasma flow with the use of a priori information on the plasma properties and the experimental conditions. Based on the Vlasov–Poisson kinetic model, the two-dimensional direct problem of probe measurements was studied numerically. The ion and electron currents to a cylinder positioned perpendicular to the plasma flow were calculated as a function of the ion velocity ratio, the degree of plasma nonisothermality, and the ratio of the probe radius to the Debye length. Based on the results of the calculations, the classical approximations of the probe currents were corrected, and the applicability ranges of the approximation of the total current–voltage characteristic of a thin cylindrical probe in a collisionless plasma flow were determined. A procedure was developed for identifying the parameters of an unperturbed plasma based on a comparison of the theoretical approximation of the current–voltage characteristic with the measured data. A priori information on the plasma properties and the experimental conditions is given as limitations to the approximation parameters of the current–voltage characteristic. The effect of probe measurement errors on the identification of the plasma parameters was studied. The results obtained may be used in the diagnostics of a collisionless plasma.

***Ключевые слова:*** *поток слабоионизированной бесстолкновительной плазмы, цилиндрический зонд Ленгмюра, численное моделирование, параметрическая идентификация, априорная информация.*

**Введение.** В диагностике низкотемпературной плазмы одним из основных инструментов до настоящего времени остаются электрические зонды Ленгмюра [1 – 3], позволяющие достаточно просто определять основные кинетические параметры заряженных компонент плазмы. Благодаря таким преимуществам, как простота аппаратуры, локальность и приемлемая точность измерений, электрические цилиндрические зонды давно и успешно используются в лабораторных условиях, на искусственных спутниках Земли, при ракетном зондировании верхней атмосферы. Работоспособность электрических зондов в ионосфере подтверждена многочисленными стендовыми, лабораторными и космическими экспериментами.

Полученные в результате зондовых измерений вольтамперные характеристики (ВАХ), т. е. зависимости собираемого из плазмы тока от потенциала зонда $I(U)$, позволяют определить параметры невозмущенной плазмы на основе различных моделей движения заряженных частиц вблизи зонда, разработка которых представляет собой основную проблему зондовой диагностики. Особенностью ВАХ зонда в плазме является ее сложный, нелинейный характер, обусловленный различием движения в электрическом поле заряженных частиц противоположного знака с существенно разными тепловыми скоростями. Задача теории заключается в установлении связи между измеряемой ВАХ зонда и параметрами невозмущенной плазмы. При этом в теории решается прямая задача – параметры плазмы полагают известными, и для них рассчитывается зависимость $I(U)$. В эксперименте решается обратная задача – по известной зависимости $I(U)$ определяются параметры плазмы. Для того чтобы связь между ними была однозначной, требуется соответствие допущений теории условиям эксперимента.

Целью настоящей работы является разработка и обоснование процедуры идентификации параметров невозмущенной бесстолкновительной плазмы на основе параметрического представления ВАХ поперечно обтекаемого цилиндрического зонда с привлечением априорной информации о свойствах плазмы и условиях эксперимента.

**Прямая задача зондовых измерений.** Рассмотрим поперечно обтекаемый сверхзвуковым потоком плазмы цилиндрический зонд Ленгмюра. Стандартная диагностика низкотемпературной разреженной плазмы с использованием электрических зондов основана на допущениях, что плазма трехкомпонентная (состоит из нейтралов, положительных однозарядных ионов и электронов), квазинейтральная, режим обтекания зондов бесстолкновительный, влияние магнитного поля на зондовый ток пренебрежимо мало, распределение частиц одного сорта по скоростям в невозмущенной плазме максвелловское. В условиях ионосферы на высотах более 300 км, где среди нейтралов и ионов преобладает атомарный кислород [3], эти допущения вполне приемлемы. Влияние магнитного поля на ВАХ цилиндрического зонда незначительно, если характерный размер (радиус) зонда много меньше ларморовского радиуса собираемых частиц и дебаевского радиуса в невозмущенной плазме [1].

В отсутствие внешнего магнитного поля и нерелятивистских скоростях заряженные компоненты низкотемпературной бесстолкновительной плазмы в безразмерных величинах описываются математической моделью Власова−Пуассона [4, 5]:

$$a_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \cdot \mathrm{grad}\, f_\alpha - b_\alpha\, \mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{grad}_V\, f_\alpha = 0, \quad \alpha = i, e, \tag{1}$$

$$\Delta\varphi = -\xi^2 (zn_i - n_e), \quad n_\alpha = \int\limits_{\Omega_{V\alpha}} f_\alpha d\mathrm{v}, \qquad \alpha = i, e, \qquad (2)$$

где $f_\alpha$, $\mathrm{v}_\alpha$, $n_\alpha$, $\Omega_{V\alpha}$ – соответственно функция распределения, вектор скорости, концентрация и расчетная область в простанстве скоростей частиц сорта $\alpha$; $t$ – время; $\varphi$ – электрический потенциал относительно невозмущенной плазмы; $\xi = r_c/\lambda_d$ – размер тела относительно дебаевского радиуса экранирования $\lambda_d$; $z$ – зарядовое число ионов. Коэффициенты $a_\alpha$, $b_\alpha$ кинетических уравнений (1) для ионов и электронов определяются следующим образом

$$a_i = 1, \quad a_e = \sqrt{\mu/\beta}, \quad b_i = \beta z/2, \quad b_e = -1/2,$$

где $\mu = m_e/m_i$, $\beta = T_e/T_i$ – отношение масс и температур заряженных частиц. Здесь индекс $i$ относится к положительным ионам, $e$ – к электронам.

Переменные задачи (1) – (2) отнесены к следующим характерным величинам: концентрации ионов и электронов – к концентрации в невозмущенной плазме $n$, скорости компонент плазмы – к их тепловым скоростям $u_\alpha = \sqrt{2kT_\alpha/m_\alpha}$, время – к величине $r_c/u_e$, пространственные координаты – к радиусу зонда $r_c$, электрический потенциал – к величине $kT_e/e$. Здесь $e$ – элементарный заряд; $k$ – постоянная Больцмана.

Для максвелловской плазмы вдали от зонда электроны и ионы распределены по закону Максвелла–Больцмана

$$f_i^\infty = \frac{1}{\pi^{s/2}} \exp\left[-\left|v - S_i\right|^2 - \beta z\varphi\right], \quad f_e^\infty = \frac{1}{\pi^{s/2}} \exp\left[-\left|v - \sqrt{\mu/\beta} S_i\right|^2 + \varphi\right], \qquad (3)$$

где $\mathrm{S}_i = \mathrm{V}/u_i$ – безразмерная скорость потока плазмы; $s$ – размерность задачи (1) – (3). На поверхности зонда определены условия каталитичности и поддержания заданного потенциала. Кинетические уравнения Власова и уравнение Пуассона решались численно в 2-D постановке с использованием равномерных вложенных сеток [6, 7].

**Электронный ток.** Вследствие большого различия масс ионов и электронов, для рассматриваемых условий направленная скорость потока, хоть и превосходит тепловую скорость ионов, обычно существенно меньше тепловой скорости электронов. Это приводит к тому, что плотность тока ионов в собирающем их поле оказывается существенно неравномерной вдоль контура цилиндра, а неравномерность плотности тока электронов в притягивающем их поле при малых $\xi$ незначительна. На рис. 1 представлены рассчитанные по 2-D модели (1) – (3) распределения вдоль поверхности цилиндра плотности электронного и ионного тока для различных значений ионного скоростного отношения $S_i$ (модуля безразмерного вектора скорости $\mathrm{S}_i$) при $\xi$ =1. Угловая координата $\theta$ точки поверхности цилиндра отсчитывается от направления на поток. Плотности электронного тока (штриховые кривые) рассчитаны при потенциале зонда $\varphi$ = +5, а плотности ионного тока (сплошные кривые) – при потенциале $\varphi$ = –10. Кривые 1 соответствуют $S_i$ =1, кривые 2 – $S_i$ =3, кривые 3 – $S_i$ =5, кривые 4 – $S_i$ =7. Плотности токов отнесены

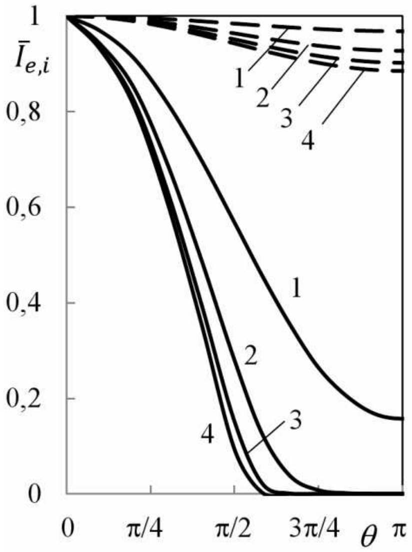


Рис. 1

к их максимальному значению $\bar{I} = I/I^{\max}$, где $I^{\max}$ – значение плотности тока при $\theta$ =0.

Как видно из рис. 1, неравномерность плотности электронного тока по поверхности зонда не превышает ~10 %, в то время как ионный ток существенно неравномерен. Неравномерность электронного тока по контуру определяется распределением самосогласованного электрического поля в окрестности зонда, которое, как известно, существенно зависит от параметра $\xi$ и скорости потока [2, 5, 6]. При этом, как показали вычисления, значение осредненной по контуру тела плотности электронного тока с увеличением скорости потока до $S_i$ =1 несколько уменьшается по сравнению с электронным током на покоящийся зонд (до 3 % для потенциалов $\varphi$ = +5..+15) и при $S_i \geq 3$ слабо зависит от скоростного отношения $S_i$. В отталкивающем поле электронный ток на зонд в потоке плазмы практически не отличается от тока электронов на покоящийся зонд.

Рассмотрим классические соотношения Ленгмюра и Мотт-Смиса [8], связывающие токи заряженных частиц и параметры невозмущенной плазмы в симметричном поле покоящегося зонда:

$$\bar{I}_e(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1+\varphi}, & \varphi > 0; \\ \exp(\varphi), & \varphi \leq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь $\bar{I}_e$ – безразмерный ток электронов, отнесенный к хаотическому электронному току на зонд $I_{e,0} = enu_e S_з / 2\sqrt{\pi}$, $S_з$ – площадь собирающей поверхности зонда. Аппроксимация (4) в области притягивающего частицы потенциала ($\varphi > 0$) достаточно хорошо приближает собираемый ток при больших потенциалах зонда. В окрестности потенциала плазмы ($\varphi \approx 0$) эта аппроксимация не сопрягается с хорошо обоснованной теорией собирания тока в отталкивающем частицы поле ($\varphi \leq 0$). Из физических соображений ток на зонд должен описываться непрерывной функцией от потенциала на нем.

Электронный ток вблизи сопряжения теорий притягивающего и отталкивающего поля при максвелловском распределении по скоростям рассчитан численно Лафрамбуазом [9]. Расчеты Лафрамбуаза показали, что выражение (4) для токов насыщения на цилиндрический зонд может быть применено для зондов с радиусом до размера Дебая ($\xi \leq 1$) по крайней мере для потенциалов зонда $\varphi \leq 25$. Результаты Лафрамбуаза подтверждены экспериментальными исследованиями цилиндрического зонда для неподвижной и движущейся плазмы [1]. Электронный ток на зонд в движущейся бесстолкновительной плазме, с учетом результатов Лафрамбуаза, хорошо описывается зависимостью:

$$\bar{I}_e(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{\pi/4+\varphi}{1+\varphi}+\varphi}, & \varphi>0;\\ \exp(\varphi), & \varphi\le 0\end{cases}. \qquad (5)$$

Анализ данных Лафрамбуаза показывает, что аппроксимация (5) с точностью до 1 % приближает ток электронов при $\xi\le 1{,}5$ для $\varphi\le 25$, при $\xi\le 2$ – для $\varphi\le 12$, при $\xi\le 2{,}5$ – для $\varphi\le 5$. С увеличением потенциала зонда аппроксимации (4) и (5) быстро сближаются.

**Ионный ток.** Теория сбора цилиндрическим зондом ионного тока насыщения сложнее теории сбора электронного тока, особенно в условиях неизотермической или движущейся плазмы, при сильной неравномерности плотности тока по собирающей поверхности зонда (см. рис. 1). Движущаяся бесстолкновительная плазма впервые теоретически рассмотрена в работе Ленгмюра и Мотт-Смиса [8]. Авторы вывели приближенное выражение для тока притягивающихся частиц на "малый" относительно их дебаевского радиуса экранирования цилиндрический зонд. Позже автор работы [10] теоретически уточнил соотношение Ленгмюра. Основываясь на результатах работ [8, 10] и проведенных авторами численных исследованиях прямой 2-D задачи (1) – (3), примем следующую аппроксимацию ионного тока на поперечно обтекаемый бесстолкновительной плазмой тонкий цилиндрический зонд (за положительный принимаем электронный ток на зонд):

$$\bar{I}_i(\varphi)=\begin{cases}-\sqrt{\mu/\beta}\sqrt{2/\pi}\,\exp\left(-\beta\varphi+S_i^2\right), & \varphi\ge S_i^2/\beta;\\ -\sqrt{\mu/\beta}\;2/\sqrt{\pi}\,\sqrt{1/2+S_i^2-\beta\varphi}, & \varphi<S_i^2/\beta\end{cases},\quad S_i>1. \qquad (6)$$

Здесь $\bar{I}_i$ – безразмерный ионный ток, отнесенный к хаотическому электронному току на зонд $I_{e,0}$. Условие переключения между расчетными формулами в (6) соответствует равенству потенциальной энергии $e\varphi$ отталкивающего частицы поля их кинетической энергии $m_iV^2/2$ в потоке. Классическая теория зонда Ленгмюра при определении электронной температуры предполагает процедуру исключения ионного тока из ВАХ для отталкивающего электроны потенциала [2]. Поскольку переключение формул в (6) происходит при положительных потенциалах зонда, когда ионный ток подавляется на несколько порядков превосходящим его электронным током, выбор потенциала для переключения между расчетными формулами в (6) не оказывает заметного влияния на обработку ВАХ зонда. Верхняя формула в (6) получена из условия непрерывности зондового тока.

На рис. 2 представлены результаты решения прямой 2-D задачи (1) – (3) для поперечно обтекаемого бесстолкновительной плазмой цилиндрического зонда. Средняя плотность ионного тока на зонд дана в зависимости от параметра $\beta\varphi$ для различных значений скорости потока $S_i$ и параметра $\xi$. Сплошные линии – расчет по (6) (1 – при $S_i$ =1, 2 – $S_i$ =3, 3 – $S_i$ =5, 4 – $S_i$ =7), штриховые с маркерами – численные расчеты (сплошные маркеры –

$\xi$ =1, контурные маркеры – $\xi$ =3; 5, 6 – $S_i$ =1; 7, 8 – $S_i$ =3; 9, 10 – $S_i$ =5; 11, 12 – $S_i$ =7). Полученные результаты при потенциалах зонда $\varphi < -10$ согласуются с расчетами зондового тока в работе [11]. Проведенные при $\beta$ = 1, 1,5, 2 расчеты дали для притягивающего ионы поля практически совпадающие результаты. При увеличении отталкивающего ионы потенциала зонда влияние неизотермичности плазмы становится заметным в ионном токе, однако совсем не существенно для полного зондового тока, т. к. подавляется током притягивающихся электронов. С увеличением скорости потока влияние геометрического параметра $\xi$ на среднюю плотность ионного тока уменьшается. Анализ полученных результатов показывает, что при скорости потока $S_i \geq 1$ аппроксимация (6) может использоваться для $\xi \leq 1$ и $\varphi \geq -50$, при $S_i \geq 5$ – для $\xi \leq 3$ и $\varphi \geq -100$.

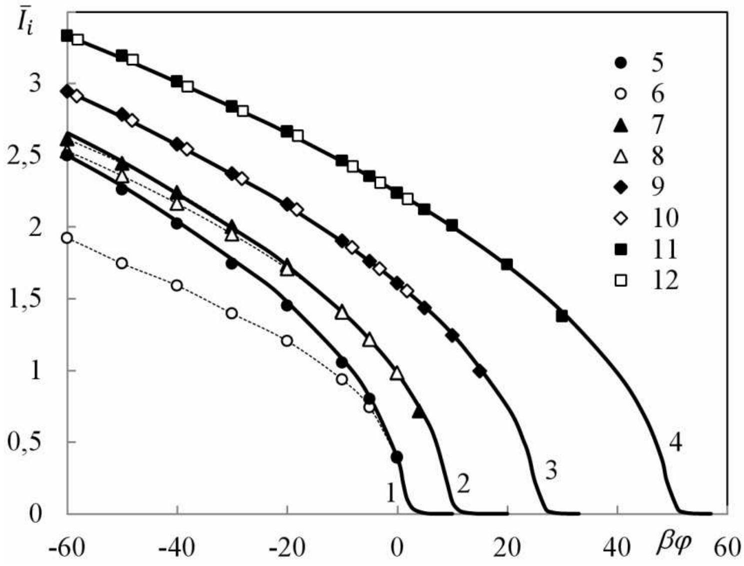



Рис. 2

Суммарный ток заряженных частиц на зонд в потоке бесстолкновительной плазмы, обезразмеренный через хаотический ток электронов, составит

$$\bar{I}(\varphi) = \bar{I}_e(\varphi) + \bar{I}_i(\varphi), \quad S_i > 1. \tag{7}$$

Ионное скоростное отношение $S_i$, входящее в формулы (6) и (7), выражается через величины $\mu, \beta$ и параметры электронов следующим образом

$$S_i = \sqrt{\beta/\mu}\, S_e, \quad S_e = V/u_e.$$

В размерных величинах зависимость зондового тока $I$ от потенциала $U$ относительно невозмущенной плазмы определится через безразмерный ток так:

$$I(U) = I_{e,0} \cdot \bar{I}(\varphi), \quad \varphi = eU/kT_e. \tag{8}$$

Анализ результатов численных расчетов показал, что соотношения (5) – (7) аппроксимируют решение прямой задачи зондовых измерений (1) – (3) в потоке бесстолкновительной плазмы с точностью до 3 % при выполнении ограничений

$$S_i \geq 1\,,\ \xi \leq 1\,,\ \varphi \geq -50\,.$$

Соотношения (5) – (7), определяющие параметрическое представление ВАХ, включают безразмерные параметры $\mu$, $\beta$, $S_i$, $\varphi$, определяемые через параметры невозмущенной плазмы и зонда:

$$m_i\,,\ T_i\,,\ T_e,\ n\,,\ V\,,\ r_c\,,\ S_z\,,\ U_z\,.$$

Здесь $m_i$, $T_i$ – масса и температура ионов; $T_e$ – температура электронов; $n$ – концентрация заряженных компонент плазмы (по постановке задачи плазма квазтнейтральная); $V$ – массовая скорость плазмы; $r_c$, $S_z$ – радиус и площадь поверхности зонда; $U_z$ – потенциал зонда относительно потенциала невозмущенной плазмы. Обычно потенциал невозмущенной плазмы принимают равным нулю. Потенциал $\varphi$ рассматривается в соотношениях (5) – (7) в качестве переменной.

**Обратная задача зондовых измерений.** При снятии ВАХ измеряются ток $I_z$ в цепи "зонд – плазма – опорный электрод" и потенциал зонда относительно опорного электрода $U_{iz} = U_z - U_{\text{cz}}$, где $U_z$, $U_{\text{cz}}$ – потенциалы зонда и опорного электрода относительно невозмущенной плазмы. Обычно в качестве опорного электрода выступает корпус вакуумной камеры или космического аппарата (КА). При ионосферных измерениях потенциал корпуса КА, как правило [4], совпадает с плавающим потенциалом $U_{pl}$. Тогда потенциал зонда относительно плазмы определится так – $U_z = U_{iz} + U_{pl}$.

Для применения соотношений (5) – (8) при интерпретации зондовых измерений в потоке плазмы используем следующие параметры

$$\mu\,,\ \beta\,,\ T_e,\ n\,,\ V\,,\ U_{pl}\,. \tag{9}$$

Массу $m_i$ и температуру $T_i$ ионов определим через отношение масс заряженных частиц $\mu$ и степень неизотермичности плазмы $\beta$ ($m_i = m_e/\mu$, $T_i = T_e/\beta$). Геометрические параметры зонда $r_c$, $S_z$ полагаем известными. Известна также ВАХ: $I_z(U_{iz}) = I_э(U_{iz})$ – зависимость тока от потенциала зонда относительно опорного электрода $U_{iz}$. Здесь через $I_э(U_{iz})$ обозначена экспериментально полученная ВАХ.

Если обозначить через $P$ вектор параметров (9), то формально зависимость для полного зондового тока (8), включающая расчетные соотношения (5) – (7), может быть записана так:

$$I(U_{iz}, P) = I_{e,0}(P)\cdot \bar{I}\left(\varphi(U_{iz}, P), P\right),\quad \varphi(U_{iz}, P) = e(U_{iz} + U_{pl})/kT_e\,.$$

В общем случае задача восстановления параметров плазмы (9) сведется к следующей математической постановке:

$$P^*:\ F(P^*) = \min_{P\in D} F(P),\qquad F(P) = \left\| I(U_{iz}, P) - I_э(U_{iz})\right\|_{M_{iz}}, \tag{10}$$

где $M_{iz}$ – множество значений потенциала зонда $U_{iz}$, $D$ – множество допустимых значений параметров $P$. Функция $F(P)$ определяет близость аппроксимации теоретических значений зондового тока $I(U_{iz}, P)$ и результатов измерений $I_э(U_{iz})$. Снятие ВАХ обычно проводится дискретно, поэтому множество $M_{iz}$ определяет узлы сеточной функции $I_э(U_{iz})$. Для оценки близости теоретических и экспериментальных значений зондового тока примем норму дискретного пространства $L_2$, т. е. дискретную квадратичную норму.

Множество $D$ допустимых значений параметров $P$ определяется из физических соображений и различного рода априорной информации об исследуемом потоке плазмы. Так, очевидно, что все параметры (9) являются вещественными числами. Из физических соображений следует, что за исключением плавающего потенциала $\varphi_{pl}$, который всегда отрицателен [4], все остальные параметры (9) положительны. Для всех параметров (9) в общем случае можем записать

$$P^{\min} \le P \le P^{\max}, \tag{11}$$

где $P^{\min}$, $P^{\max}$ – соответственно векторы наименьших и наибольших допустимых значений параметров (9). Если данных об ограничении какого-либо параметра нет, то соответствующие предельные значения принимаем равными $\pm\infty$. Информация для определения ограничений (11) для параметров может быть получена по известному химическому составу плазмы ($\mu$), по траектории движения КА ($V$), по предыдущим измерениям и оценкам для близких условий ($T_e$, $n$, $U_{pl}$).

Таким образом, задача зондовой диагностики сводится к задаче параметрической оптимизации (10) с ограничениями (11). Формулы (5) – (8) определяют зондовый ток как кусочно-аналитическую функцию потенциала $U_{iz}$ и всех параметров (9). Нарушение гладкости происходит при значениях потенциала, удовлетворяющих условиям

$$U_{iz} + U_{pl} = 0, \quad U_{iz} + U_{pl} = m_e/e \cdot V^2/2\mu .$$

Эти равенства определяют поверхности пространства переменных $(U_{iz}, P)$, на которых производные функции $I(U_{iz}, P)$ терпят разрывы первого рода. Во всех остальных точках множества $D$ функция $I(U_{iz}, P)$ аналитическая, следовательно непрерывно дифференцируемая по всем своим переменным.

Для решения задачи (10) – (11) использовались методы, основанные на методе Ньютона с ограничениями на параметры. Поскольку число параметров невелико, а целевая функция $F(P)$ кусочно-аналитическая, градиент и матрица Гессе легко рассчитываются. На современном компьютере средней производительности обработка ВАХ занимает время сопоставимое с зондовыми измерениями, т. е. выполняется практически в режиме реального времени.

**Анализ параметров задачи.** Обозначим через $p$ отдельный параметр множества (9). Определим для функции $I(U_{iz}, P)$ в окрестности некоторой точки $P_0 = (\mu_0, \beta_0, T_{e0}, n_0, V_0, U_{pl_0})$ функцию чувствительности по параметру $p$:

$$I_p(U_{iz}, P_0) = p_0 \frac{\partial I(U_{iz}, P_0)}{\partial p}.$$

Малые изменения параметров (9) $p = p_0(1 + \varepsilon_p)$, в окрестности точки $P_0$ приведут к следующему изменению зондового тока

$$I(U_{iz}, P) \approx I(U_{iz}, P_0) + \sum_p \varepsilon_p I_p(U_{iz}, P_0). \quad (12)$$

На основе этих соотношений проведем предварительный анализ влияния параметров (9) на ВАХ зонда при ионосферных исследованиях. В качестве базовых значений параметров $P_B$ примем близкие к параметрам ионосферной плазмы на высоте около 700 км [3]:

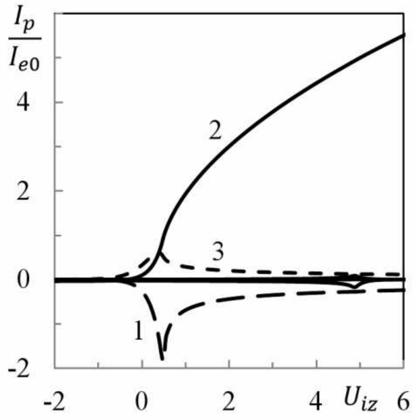
$$m_i = 15 \text{ а.е.м.}; \ \beta = 1{,}27; \ T_e = 2800 \text{ К};$$
$$n = 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}; \ V = 7{,}5 \text{ км/с}; \ U_{pl} = -0{,}5 \text{ В}. \quad (13)$$

Значениям параметров (13) при индукции геомагнитного поля В ~ 35 мкТл соответствуют следующие значения характерных геометрических размеров плазмы: длины свободного пробега $\lambda_e = 6{,}3 \cdot 10^4$ м, $\lambda_i = 2{,}5 \cdot 10^4$ м; дебаевский радиус экранирования $\lambda_D = 0{,}0054$ м; ларморовские радиусы $\rho_e = 0{,}048$ м, $\rho_i = 6{,}9$ м. Потребуем, чтобы размеры зонда удовлетворяли условиям [1]

$$l_c / r_c >> 1, \ \xi << 1, \ l_c / \rho_e < 2\pi, \ r_c / \rho_e << 1,$$

где $l_c$, $r_c$ – длина и радиус зонда. Обычно, согласно расчетам [9, 5] и авторов, толщина слоя объемного заряда $r_{sl}$ при $\xi \le 1$ составляет 5–10 дебаевских радиусов. Следовательно, в нашем случае величина $r_{sl}$ порядка ларморовского радиуса электронов. Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали [1, 12, 13], что для рассматриваемых условий влияние магнитного поля на ВАХ тонкого цилиндрического зонда незначительно.

Результаты расчетов функций чувствительности (15) в зависимости от потенциала зонда $U_{iz}$ представлены на рис. 3 в масштабах для электронного (а) и ионного (б) тока насыщения. Функции чувствительности нормированы относительно хаотического электронного тока при параметрах плазмы (13). На рис. 3: линия 1 – функция чувствительности по плавающему потенциалу $U_{pl}$, 2 – по концентрации $n$, 3 – по электронной температуре $T_e$, 4 – по массовой скорости потока $V$, 5 – по степени неизотермичности плазмы $\beta$, 6 – по отношению масс $\mu$.



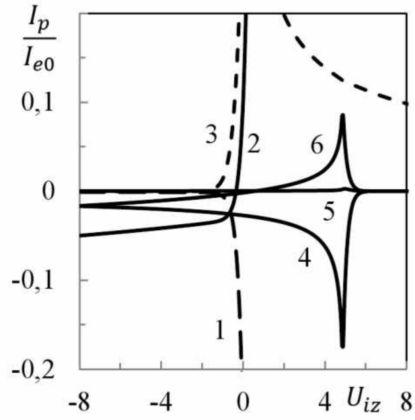




Рис. 3

Данные, представленные на рис. 3, наглядно демонстрируют основные положения классической теории зонда Ленгмюра: с высокой достоверностью из ВАХ определяется концентрация $n$, плавающий потенциал $U_{pl}$ и температура электронов $T_e$ определяются с меньшей достоверностью. Массовая скорость потока $V$ и отношение масс $\mu$ "конкурируют" между собой – области и уровни их влияния на ВАХ практически совпадают. Для одновременной оценки параметров $V$, $\mu$ необходима высокая точность измерения ионной ветви ВАХ, что достаточно трудно выполнить. На практике целесообразно фиксировать один или оба этих параметра, основываясь на априорной информации об условиях эксперимента.

Параметры $T_e$ и $U_{pl}$ имеют близкие области влияния на ВАХ, охватывающие области отталкивания и притягивания электронов. Параметр $n$ оказывает доминирующее влияние на всю ВАХ. В отличие от классической процедуры обработки ВАХ, основанной на "локальных" оценках параметров ($n$ – по току насыщения электронов или ионов, $T_e$ – в области отталкивания электронов, $U_{pl}$ – по гладкости ВАХ при малых потенциалах зонда), предлагаемый подход к интерпретации зондовых измерений сводится к решению задачи параметрической идентификации (10) – (11) на всей области определения ВАХ. Параметрическое представление ВАХ (5) – (8) "связывает" искомые параметры, в ряде случаев сужает области их определения, повышая тем самым устойчивость процедуры к погрешностям измерений.

Близость к нулю функции чувствительности ВАХ по параметру $\beta$ (см. рис. 3) иллюстрирует известную проблему зондовой диагностики: в условиях высокоскоростного обтекания зонда потоком неизотермической плазмы ($T_i \neq T_e$) температура ионов не может быть достоверно определена из зондовой характеристики [2, 14]. Для определения ионной температуры неизотермической бесстолкновительной плазмы приходится использовать ионные ловушки различной конструкции [15], позволяющие отсечь электроны от измерительного электрода, или привлекаются дополнительные независимые измерения характеристик плазмы: параметров нейтралов [16, 17], нестационарных характеристик импульсного возмущения призондового слоя [2, 5], "концевого эффекта" цилиндрического зонда [1, 3] и др., позволяющие на основе моделей соответствующих физических процессов получить соотношения, связывающие температуру ионов с другими параметрами плазмы. В общем виде такое соотношение запишется так

$$G(P, g) = 0 , \tag{14}$$

где $G$ – достаточно гладкая функция, существенно зависящая от параметра $\beta$; $g$ – в общем случае, вектор дополнительно измеренных (априори известных для зондовых измерений) параметров плазмы или характеризующих их величин (время релаксации импульсного потенциала зонда, отношение токов и т. п.). Пример такого соотношения при известных температуре и концентрации нейтральной компоненты плазмы можно найти в работе [17]. Если априорная информация (14) для ВАХ отсутствует, то целесообразно исключить параметр $\beta$ из задачи (10) – (11), положив $\beta^{\max} = \beta^{\min}$, что не окажет практического влияния на определение оставшихся параметров (9).

**Влияние погрешностей.** В реальных условиях работа электрического зонда сопровождается множеством факторов, искажающих вид ВАХ. При ионосферных измерениях уровни собираемых токов составляют $\sim 10$ мкА для электронов и $\sim 100$ нА для ионов. Зондовые измерения в плазме сопровождаются рядом физических явлений (плазменные неустойчивости системы "КА – плазма", дробовой шум системы "зонд – плазма – КА", эмиссия электронов с поверхности зонда и др.), приводящих к зашумлению и "смещению" ВАХ, уровень которого по току может быть сопоставим с собираемыми ионными токами. Для правильной интерпретации результатов измерений в таких условиях необходимы исследования достоверности восстановления параметров плазмы.

Рассмотрим достоверность оценок параметров плазмы (9), получаемых из решения задачи (10) – (11) по искаженным ВАХ цилиндрического зонда, моделирующим погрешности измерений. ВАХ задается на сетке значений потенциалов $M_{iz}$ значениями зондового тока

$$I_э(U_{iz,k}) = I_k , \quad k = 0..m ,$$

где $m$ – число измерений. Зашумление ВАХ моделировалось случайными возмущениями зондового тока

$$\tilde{I}_k = I_k + \delta_k \cdot \varepsilon , \quad k = 0..m ,$$

где $\delta_k$ ($k = 0..m$) – последовательность случайных чисел на интервале $(-1, 1)$, $\varepsilon$ – уровень погрешности измерений ($\varepsilon > 0$). При решении задачи (10) – (11) в качестве начальных значений восстанавливаемых параметров (9) принимались произвольные допустимые значения из (11). Решение задачи параметрической идентификации (10) – (11) показало хорошую устойчивость к случайным погрешностям при числе измерений $m$ ~100 и более. Уменьшение числа $m$ ведет к снижению достоверности оценок параметров невозмущенной плазмы при случайных погрешностях измерений ВАХ.

Измерения ВАХ могут сопровождаться рядом факторов, приводящих к некоторой неопределенности в значениях зондового тока. Так, загрязнение поверхности зонда, эмиссионные процессы и др. ведут к искажениям ВАХ –

систематическим погрешностям измерений. Влияние уровня неопределенности измерений на достоверность восстановления параметров невозмущенной плазмы исследовано следующим образом. Полагаем, что измеренный зондовый ток удовлетворяет условиям

$$I_э^{\min}\left(U_{iz,k}\right) \le I_э\left(U_{iz,k}\right) \le I_э^{\max}\left(U_{iz,k}\right), \quad k = 0..m\,,$$
$$I_э^{\min}\left(U_{iz}\right) = I\left(U_{iz}, P_B\right) - \Delta\,, \; I_э^{\max}\left(U_{iz}\right) = I\left(U_{iz}, P_B\right) + \Delta\,, \tag{15}$$

где $\Delta$ – уровень абсолютной погрешности измерений зондового тока ($\Delta > 0$).

Чтобы оценить верхние и нижние границы значений восстанавливаемых параметров, задача (10) – (11), (13) была изменена следующим образом. В число параметров (9) задачи (10) включены измерения тока $I_э\left(U_{iz,k}\right)$, ($k = 0..m$), а условия (11) дополнены условиями (15). Исследуемый параметр фиксировался, а его значения сканировались на допустимой области. Предельные значения параметра определялись по нарушению условий (15) на решениях задачи оптимизации.

Результаты вычислений представлены на рис. 4 в виде зависимостей обезразмеренных относительно своих базовых значений параметров $\delta_p = \left(p^{\max} - p_B\right)/p_B$, кроме плавающего потенциала, для которого $\delta_{Upl} = \left(U_{pl}^{\max} - U_{pl,B}\right)/U_{pl}^{*}$, где $U_{pl}^{*} = -\ln(0{,}1)kT_{e,B}/e \approx 0{,}55$ В, от уровня относительной погрешности тока $\delta_I = \Delta/I_{\max}$, где $I_{\max}$ – максимальный зондовый ток при базовых параметрах (13). Приведенные на рис. 4 результаты носят иллюстративный характер, подтверждающий работоспособность предлагаемой процедуры интерпретации зондовых измерений. Погрешность измерения тока принималась постоянной для всего диапазона потенциала ВАХ, на котором, как известно, ток изменяется на несколько порядков. Полученные оценки количественно подтверждают утверждения, что достоверность определения концентрации $n$ соответствует точности измерений зондового тока $\delta_{Ie} = \Delta/I_{\max}$ электронной ветви ВАХ (при потенциалах $U_e^{*} < U_{iz} + U_{pl}$, $U_e^{*} \sim 3kT_e/e$); плавающего потенциала $U_{pl}$ и электронной температуры $T_e$ – точности измерений зондового тока $\delta_{Ipl} = \Delta/I_{e0}$ вблизи потенциала плазмы (при потенциалах $U_i^{*} < U_{iz} + U_{pl} < U_e^{*}$, $U_i^{*} \sim -5kT_e/e$); массовой скорости потока $V$ и отношения масс $\mu$ – точности измерений

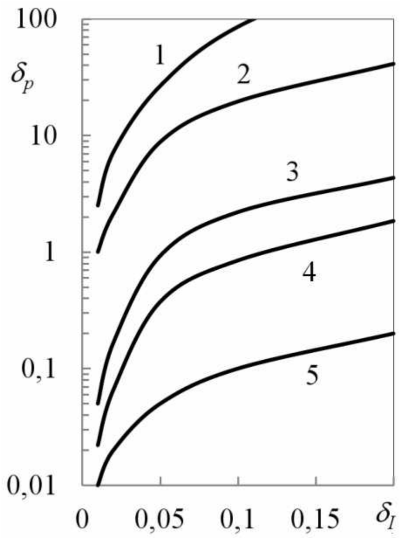


Рис. 4

зондового тока $\delta_{Ii} = \sqrt{\mu}\,\Delta / I_{e0}$ ионной ветви ВАХ (при потенциалах $U_{iz} + U_{pl} < U_i^*$).

Большие допустимые изменения параметров, за исключением концентрации $n$, иллюстрируют плохую обусловленность задачи идентификации, характерную для обратных задач. Во многом уровень погрешности определения пар параметров ($\mu, V$) и ($T_e, U_{pl}$) объясняется упомянутой выше "конкуренцией", приводящей к их "разбеганию". Для стабилизации такого "разбегания" используем при решении задачи (10) – (11) регуляризирующий прием, основанный на приближении ВАХ (12).

Пусть $P^{(j)}$ и $P^{(j+1)}$ – векторы параметров (9), полученные в процессе минимизации целевой функции $F(P)$. Для параметра $p$ определим величины:

$$\Delta p = p^{(j+1)} - p^{(j)},\ \Delta I_p = \int\limits_{\Omega_p} I_p\left(U, P^{(j)}\right) dU,$$

$$\Delta I = \int\limits_{\Omega_p} \left[ I\left(U, P^{(j+1)}\right) - I\left(U, P^{(j)}\right) - \frac{\Delta n}{n^{(j)}} I_n\left(U, P^{(j)}\right) \right] dU,$$

где $\Omega_p$ – область изменения потенциала, на которой оцениваем влияние параметра на ВАХ. Тогда для пары параметров ($p_1$, $p_2$) условие их "конкуренции" на некоторой области изменения потенциала $\Omega_{1,2}$ определится неравенством

$$\left(\Delta p_1 / p_1^{(j)} \cdot \Delta I_{p_1}\right) \cdot \left(\Delta p_2 / p_2^{(j)} \cdot \Delta I_{p_2}\right) < 0 .$$

Если это условие выполняется, то, стабилизируя параметр $p_1$, получим

$$p_1^{(j+1)} = p_1^{(j)},\quad p_2^{(j+1)} = p_2^{(j)}\left(1 + \Delta I / \Delta I_{p_2}\right).$$

У каждой из рассматриваемых нами пар параметров ($\mu, V$) и ($T_e, U_{pl}$) области влияния на ВАХ близки, оценки границ этих областей ($U_i^*$, $U_e^*$) приведены выше. Использование такого регуляризирующего приема на каждой итерации позволило существенно улучшить результаты идентификации параметров плазмы.

**Выводы.** С использованием численного 2-D моделирования прямой задачи зондовых измерений выполнено обоснование параметрической аппроксимации ВАХ тонкого цилиндрического зонда в потоке слабоионизированной бесстолкновительной плазмы. Показано, что для ионной ветви ВАХ аппроксимация справедлива при $\xi \le 3$, для электронной ветви – при $\xi \le 1$.

На основе параметрической аппроксимации ВАХ поперечно обтекаемого цилиндрического зонда разработана процедура восстановления параметров невозмущенной бесстолкновительной плазмы с использованием априорной информации о свойствах плазмы и условиях эксперимента. Проведены исследования влияния случаных и систематических погрешностей зондовых измерений на восстановление параметров плазмы. В рамках принятых допущений получены оценки достоверности восстановления параметров невозмущенной плазмы в зависимости от точности измерения ВАХ.

Полученные результаты могут быть использованы при подготовке и интерпретации экспериментов по диагностике параметров низкотемпературной бесстолкновительной плазмы.

1. *Чан П., Толбот Л., Турян К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 201 с.
2. *Алексеев Б. В., Котельников В. А.* Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
3. *Шувалов В. А.* Моделирование взаимодействия тел с ионосферой. Киев: Наукова думка, 1995. 180 с.
4. *Альперт Л. А., Гуревич А. В., Питаевский Л. Г.* Искусственные спутники в разреженной плазме. М.: Наука, 1964. 382 с.
5. *Котельников В. А., Ульданов С. В., Котельников М. В.* Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. М.: Наука, 2004. 422 с.
6. *Лазученков Д. Н.* Расчет отталкивающего электроны самосогласованного электрического поля вблизи обтекаемого потоком разреженной плазмы цилиндра. Техническая механика. 2012. №4. С. 27–35.
7. *Лазученков Д. Н., Лазученков Н. М.* Моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с обтекаемым заряженным проводящим цилиндром вблизи проводящей поверхности. Техническая механика. 2014. №2. С. 63–72.
8. *Mott-Smith H., Langmuir I.* The theory of collectors in gaseous discharges. Phys. Rev. 1926. V. 28. № 5. P. 727–763.
9. *Latramboise J. G.* Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless Maxwellian Plasma at Rest. Report, No. 100. Univ. of Toronto, Institute of Aerospace Studies. 1966. 210 c.
10. *Hoegy W. R., Wharton L. E.* Current to a moving cylindrical electrostatic probe. Journal of Applied Physics. 1973. V. 44, No. 12. P. 5365–5371.
11. *Котельников М. В.* Вольт-амперные характеристики цилиндрического зонда в потоке столкновительной и бесстолкновительной плазмы. ТВТ. 2008. №4. С. 629–632.
12. *Москаленко А. К.* К теории цилиндрического зонда. Космические исследования. 1979. Т. 17, № 1. С. 51–59.
13. *Laframboise J. G., Sonmor L. J.* Current collection by probes and electrodes in space magnetoplasma: Review J. Geophys. Research. 1993. V. 98, № A1. P. 337–357.
14. *Godard R., Laframboise J.* Total current to cylindrical collectors in collision less plasma flow. Space Science. 1983. V. 31, № 3. P. 275–283.
15. *Козлов О. В.* Электрический зонд в плазме. М.: Атомиздат, 1969.
16. *Шувалов В. А., Письменный Н. И., Лазученков Д. Н., Кочубей Г. С.* Зондовая диагностика потоков лабораторной и ионосферной разреженной плазмы. Приборы и техника эксперимента. 2013. №4. С. 98–107.
17. *Шувалов В. А., Лукенюк А. А., Письменный Н. И., Кулагин С. Н.* Зондовая диагностика околоспутниковой среды на КА "Сич-2". Космічна наука і технологія. 2013. Т. 19, № 1. С. 13–19.

Получено 01.02.2018,
в окончательном варианте 20.02.2018