

Устойчивость и колебания вращающейся буровой колонны в канале горизонтальной скважины

В. И. Гуляев¹, С. Н. Глазунов

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

¹ valery@gulyayev.com.ua

В связи с разработкой новых технологий добычи углеводородного топлива из сланцевых пород в нефтегазовой промышленности все большее внимание уделяется задачам бурения наклонных и горизонтальных скважин. Специфика процессов проходки таких скважин заключается в том, что на их протекание существенное влияние оказывают возникающие при этом силы контактного и фрикционного взаимодействия между поверхностью буровой колонны и стенкой скважины. Поставлена задача о бифуркационном выпучивании и малых изгибных колебаниях вращающейся буровой колонны, лежащей в канале горизонтальной скважины. С учетом сил трения и дополнительных реакций связей выведены дифференциальные уравнения, для которых построены решения задач на собственные значения о свободных колебаниях колонны конечной и неограниченной длины.

Ключевые слова: буровая колонна, горизонтальная скважина, вращение, трение, устойчивость, колебания, моделирование.

Введение. В настоящее время одной из наиболее важных технических проблем нефтегазовой промышленности является усовершенствование технологий бурения глубоких наклонно направленных и горизонтальных скважин. Поскольку частые аварии, возникающие в процессе их проходки, обусловлены, как правило, сопровождением весьма сложных механических эффектов, большое внимание при прогнозировании и предупреждении нештатных ситуаций должно уделяться методам компьютерного моделирования. При этом приходится решать весьма сложные многопараметрические задачи механики и прикладной математики, так как явления статического равновесия, потери устойчивости и колебаний конструкции бурового устройства значительно зависят от конструктивных параметров буровой колонны (БК), геометрических параметров спроектированной и реальной скважины, свойств скальной породы и технологического режима бурения. В общей постановке такие задачи вряд ли разрешимы, поэтому представляют интерес вопросы установления закономерностей протекания каждого из многих явлений линейного и нелинейного деформирования, устойчивости, критического изгиба и колебаний БК в вертикальных (прямолинейных) и наклонных (криволинейных) скважинах.

Буровая колонна служит для передачи крутящего момента и продольной силы от приводного механизма к долоту, а также для сообщения ему вращательного движения и переноса промывочной жидкости к придонной части скважины. При бурении труба колонны подвергается одновременному воздействию осевых и поперечных сил, крутящего момента, фрикционных сил и сил контактного взаимодействия колонны со стенкой скважины. По природе процесса бурения эти силы, как правило, носят динамический характер и возбуждают продольные, поперечные и крутильные колебания. Кроме того, при их некоторых критических значениях буровая колонна может терять устойчивость, выпучивать и начинать совершать волнообразные изгибные колебания, что препятствует проводимости крутящего момента и осевой силы к долоту, вызывает общие усталостные повреждения всей конструкции,

ее износ, повреждение ствола скважины и снижение эффективности бурильного процесса. Эти негативные явления наиболее часто наблюдаются в наклонных и горизонтальных скважинах, получивших особое распространение в настоящее время в связи с разработкой сланцевых нефтяных и газовых месторождений. Однако в научно-технической литературе имеется сравнительно небольшое количество работ, посвященных изучению этих вопросов.

Активное исследование устойчивости и буфуркационного выпучивания по спиральной форме бурильных колонн в вертикальных скважинах началось еще в 1962 г. [1]. Позже в [2, 3] исследовали потерю устойчивости по гармонической форме. Закрытое поведение колонн в наклонных скважинах анализировалось в [4, 5]. Различные аспекты этой проблемы, связанные с влиянием граничных условий, искривленности скважины, эффекта прихватывания колонны, а также результаты экспериментальных исследований изложены в публикациях [6–8]. Как правило, последующие исследования проводились для колонн сравнительно небольшой длины. Ранее [9, 10] рассмотрены вопросы численного исследования устойчивости БК в глубоких вертикальных и наклонных скважинах и показано, что поставленные задачи являются сингулярно возмущенными [10], а их решения имеют вид краевых эффектов.

Значительное количество публикаций посвящено проблемам динамики бурильных колонн. В частности, рассматриваются их изгибные колебания [11–13], колебания кручения [14, 15] и динамика колебаний кружения (whirling), при которых долото перекачивается по дну скважины [16]. В работах [17, 18] поставлена и решена задача по определению и минимизации сил сопротивления при перемещении БК в криволинейной скважине с геометрическими несовершенствами.

Однако остаются практически неизученными эффекты влияния фрикционного взаимодействия вращающейся колонны с дном горизонтальной скважины на устойчивость ее прямолинейной формы и изгибные колебания. В данной работе предложена математическая модель упругого статического и динамического изгибания трубы БК, лежащей на дне канала горизонтальной скважины. Бурильная колонна сжата продольной силой и вращается с постоянной угловой скоростью. Считается, что благодаря наличию сил трения она накатывается на поверхность скважины и занимает положение, в котором ее ось, оставаясь параллельной оси скважины, смещается в окружном направлении. При этом контакт между БК и стенкой скважины сохраняется по всей длине системы, и колонна находится в состоянии равновесия под действием сил тяжести, трения и контактного взаимодействия. Исследуются изгибная устойчивость этого равновесного состояния и малые изгибные колебания относительно него.

Постановка задачи о критическом изгибании вращающейся БК в канале горизонтальной скважины. Пусть БК лежит на дне канала длинной горизонтальной цилиндрической скважины (рис. 1). Разность диаметров скважины и трубы БК равна $2a$.

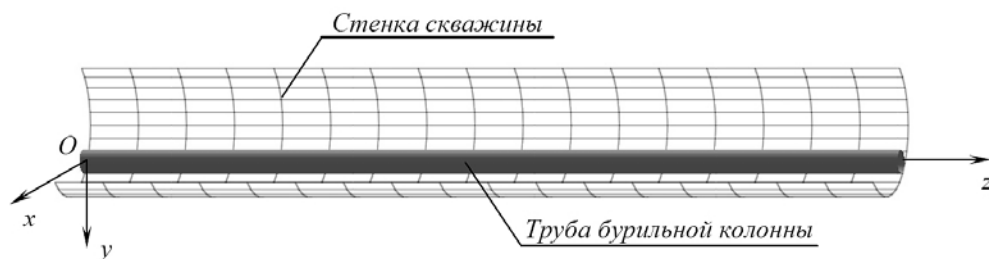


Рис. 1. Схема расположения бурильной колонны на дне канала горизонтальной скважины.

Будем считать, что:

БК вращается с постоянной угловой скоростью ω ;

труба БК находится в непрерывном контакте со стенкой скважины по всей ее длине и подвержена действию распределенной силы контактного давления f^{cont} и внутренней сжимающей силы F_z ;

изгибные перемещения трубы малы и ее деформации упругие;

при изгибе трубы между ней и стенкой скважины возникают распределенные силы $f^{fr}(z)$ сухого трения, ориентированные в окружном направлении.

Силы $f^{fr}(z)$ подчиняются закону Кулона [19], в соответствии с которым при отсутствии относительного движения соприкасающихся поверхностей между ними реализуется статическое трение (рис. 2), величина которого определяется из условий равновесия системы и удовлетворяет соотношению

$$f^{fr} \leq \mu f^{cont}, \quad (1)$$

где μ – коэффициент трения; f^{cont} – нормальная к трущимся поверхностям сила контактного давления.

По достижении величиной f^{fr} предельного значения μf^{cont} соприкасающиеся поверхности приходят в относительное движение, и реализуется динамическое трение – скольжение, при котором сила трения сохраняет свое предельное значение, не зависящее от скорости v окружного движения.

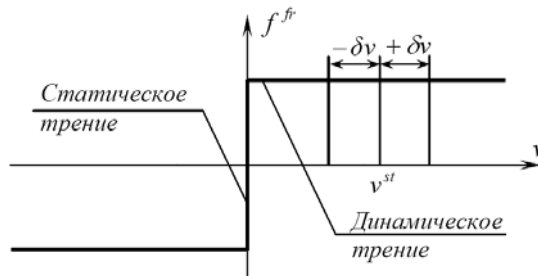


Рис. 2. Схема изменения функции силы сухого трения $f^{fr}(v)$.

Примем, что в рассматриваемом случае БК вращается с постоянной угловой скоростью ω и в зоне контакта элементарные площадки ее поверхности скользят по поверхности скважины со стационарной положительной относительной скоростью v^{st} (рис. 2). При этом $f^{fr} = \mu f^{cont}$. Пусть затем при потере устойчивости или при малых колебаниях скорость v^{st} получила малые приращения $\pm \delta v$, но при этом полная скорость $v = v^{st} \pm \delta v$ сохранила положительное значение. Как видно из рис. 2, сила $f^{fr} = \mu f^{cont}$ в этом случае останется неизменной. Это свойство сохранения силой трения своего постоянного значения при малых перемещениях и скоростях колебаний используется ниже при постановке задач об изгибании БК.

Под действием сил трения вращающаяся труба перекачивается вверх по поверхности скважины и занимает некоторое предельное положение (рис. 3), в котором распределенная сила контактного давления \vec{f}^{cont} уменьшается, вследствие чего уменьшается также сила трения сцепления \vec{f}^{fr} , переходящая в силу трения скольжения. В этом положении действующая на трубу распределенная сила тяжести \vec{f}^{gr} уравновешивается силами \vec{f}^{cont} , \vec{f}^{fr} , и БК находится в состоянии равновесия. Однако

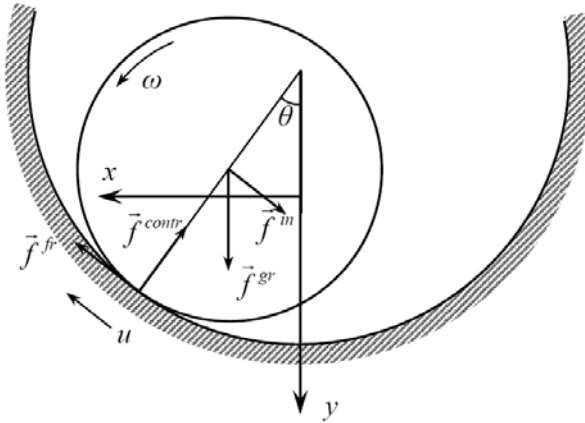


Рис. 3. Схема перекачивания БК по цилиндрической поверхности горизонтальной скважины.

если на трубу действует осевая сжимающая сила \vec{F}_z , то при некотором ее значении это состояние может оказаться неустойчивым, и колонна выпучит. Задача исследования этого эффекта существенно отличается от задачи эйлеровой потери устойчивости стержня, поскольку на колонну по всей ее длине наложены дополнительные связи, ограничивающие ее перемещение по поверхности скважины. Поэтому для анализа устойчивости вращающейся БК вначале определим положение ее равновесия, а затем исследуем устойчивость.

В стационарном состоянии вращающаяся БК отклонена от оси Oy на угол θ и на нее действуют силы \vec{f}^{gr} , \vec{f}^{cont} и \vec{f}^{fr} . Спроектировав эти силы на нормаль и касательную к поверхностям БК и скважины в точке их контакта (рис. 3), получим

$$\begin{aligned} f^{cont} - f^{gr} \cos \theta &= 0, \\ f^{fr} - f^{gr} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В соответствии с законом трения Кулона, при скольжении имеем

$$f^{fr} = \mu f^{cont}. \tag{3}$$

Используем в (3) выражение для f^{cont} из первого равенства системы (2) и подставим полученное значение f^{fr} во второе равенство этой системы, в результате чего запишем

$$\mu \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad \text{или} \quad \text{tg } \theta = \mu. \tag{4}$$

Таким образом, в результате вращения лежащая на дне канала горизонтальной скважины БК отклоняется под действием сил трения от своего нижнего положения на угол θ , равный углу трения $\text{arctg } \mu$, что согласуется с общим представлением о равновесии тела на наклонной шероховатой плоскости. Для проверки устойчивости этого состояния составим уравнение упругого равновесия элемента трубы длиной dz . Уравнение равновесия моментов относительно нормали к контактирующим поверхностям записывается в виде

$$d\delta M - \delta Q dz - F_z a d\delta\theta = 0, \tag{5}$$

где δ – приращение соответствующей величины, вызванное малым упругим изгибом трубы БК в результате малого изменения угла наклона $\delta\theta(z)$ каждого ее элемента; d – приращение соответствующей функции, связанное с приращением dz ее аргумента z ; $M(z)$ – внутренний изгибающий момент; $Q(z)$ – внутренняя перерезывающая сила; a – межтрубный зазор.

Из условия баланса всех сил, которые приложены к элементу в окружном направлении, касательном к контактирующим поверхностям, имеем

$$d\delta Q - \delta f^{fr} dz + \delta(f^{gr} \sin \theta) dz = 0. \quad (6)$$

Преобразуем уравнения (5), (6) к виду

$$\delta Q = \frac{d\delta M}{dz} - aF_z \frac{d\delta\theta}{dz}, \quad \frac{d}{dz} \delta Q - \delta f^{fr} + \delta(f^{gr} \sin \theta) = 0. \quad (7)$$

С использованием выражения

$$\delta M = EI \frac{d^2}{dz^2} (a\delta\theta) \quad (8)$$

и вытекающих из (2), (3) равенств

$$\begin{aligned} \delta f^{fr} &= \mu \delta f^{cont} = \mu \delta(f^{gr} \cos \theta) = -\mu f^{gr} \sin \theta \cdot \delta\theta, \\ \delta(f^{gr} \sin \theta) &= f^{gr} \cos \theta \cdot \delta\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

получим уравнение упругого критического состояния БК:

$$aEI \frac{d^4 \delta\theta}{dz^4} - aF_z \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2} + f^{gr} (\mu \sin \theta + \cos \theta) \delta\theta = 0. \quad (10)$$

С помощью (4) угол θ (10) выразим через μ . Тогда запишем

$$\sin \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \quad (11)$$

Считая угол $\delta\theta$ малым, введем величину $\delta u = a\delta\theta$, представляющую собой функцию малого упругого перемещения элементов БК в плоскости, касательной к соприкасающимся поверхностям.

Выполнив в (10) замены (11) и подстановку $\delta u = a\delta\theta$, получим окончательное разрешающее уравнение

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{gr} \delta u = 0, \quad (12)$$

определяющее критическое состояние вращающейся БК на дне канала горизонтальной скважины в состоянии, отклоненном от нижнего положения на угол θ .

Отметим, что при $\mu = 0$ это соотношение сводится к известному уравнению [5]

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{f^{gr}}{a} \delta u = 0, \quad (13)$$

построенному в предположении отсутствия сил трения между БК и стенкой скважины. Оба эти уравнения аналогичны уравнению равновесия балки на упругом основании с коэффициентом постели $\eta = f^{gr} \sqrt{1 + \mu^2} / a$ для (12) и $\eta = f^{gr} / a$ для (13), хотя скальная порода принята абсолютно жесткой и играющей роль связи, наложенной на перемещения БК.

Устойчивость вращающейся БК в канале горизонтальной скважины. Уравнение (12) является однородным, поэтому имеет тривиальное решение $\delta u(z) \equiv 0$ при любых значениях осевой силы $F(z)$. Значения $F(z)$, при которых это уравнение имеет нетривиальные решения $\delta u(z) \neq 0$, являются бифуркационными. В этих состояниях БК теряет устойчивость своей прямолинейной формы и выпучивается. Рассмотрим вначале случай потери устойчивости БК неограниченной длины $L \rightarrow \infty$. Ненулевое решение уравнения (12) представим в виде (рис. 4)

$$\delta u_\lambda(z) = \delta c \sin(\pi z / \lambda), \quad (14)$$

где λ – длина полуволны потери устойчивости.

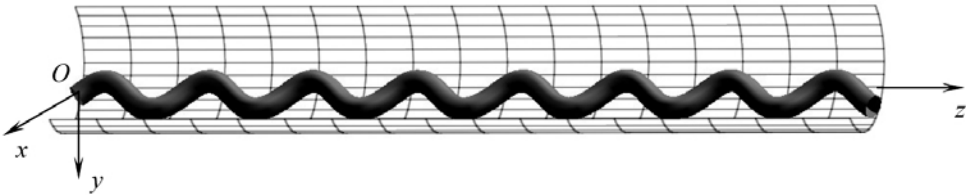


Рис. 4. Форма выпучивания буровой колонны на дне скважины.

Подставив (14) в (13), получим собственные значения $F_{z,\lambda}$ для выбранного λ :

$$F_{z,\lambda} = -[\pi^2 EI / \lambda^2 + \lambda^2 f^{gr} \sqrt{1 + \mu^2} / (\pi^2 a)]. \quad (15)$$

Критическое значение F_z^{cr} достигается при λ , минимизирующем $F_{z,\lambda}$. Из условия

$$dF_{z,\lambda} / d\lambda = 0$$

получим

$$F_z^{cr} = -2\sqrt{EI f^{gr} \sqrt{1 + \mu^2} / a}. \quad (16)$$

Соответствующее ему λ равно

$$\lambda^{cr} = \pi^4 \sqrt{EI a / \sqrt{1 + \mu^2} \cdot f^{gr}}. \quad (17)$$

Если длина L БК ограничена и на ее концах осуществляются условия шарнирного закрепления, то нетривиальные решения уравнения (12) следует искать в виде

$$\delta u_n(z) = \delta c \sin(n\pi z/L), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Подставив (18) в (12), получим

$$F_{z,n}^{cr} = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{gr}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Таким образом, каждому значению n в равенстве (19) соответствует свое значение $F_{z,n}^{cr}$. Поскольку практический интерес представляет только наименьшее по модулю $F_{z,n}^{cr}$, необходимо правую часть в (19) минимизировать по n . Для этого следует вычислить производную $dF_{z,n}^{cr}/dn$ и приравнять ее нулю. В результате получим

$$n^{cr} = \frac{L}{\pi} \sqrt[8]{1+\mu^2} \sqrt[4]{\frac{f^{gr}}{EIa}}. \quad (20)$$

Учитывая, что найденное значение n^{cr} в общем случае не является целым, для практического использования необходимо взять два ближайших к n^{cr} целых n и выбрать из них то, которое обеспечивает наименьшее $F_{z,n}^{cr}$.

В качестве примера рассмотрим случай $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $I = 1,555 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $f^{gr} = 316,35$ Н/м, $\mu = 0,32$, $a = 0,04$ м, $L = 500$ м. При этих значениях по формуле (20) найдем $n^{cr} = 36,03$, после чего рассчитаем $F_{z,36}^{cr} = -3,293 \cdot 10^5$ Н, $F_{z,37}^{cr} = -3,302 \cdot 10^5$ Н. Отсюда следует, что критическое значение осевой сжимающей силы равно $F_{z,36}^{cr}$, а количество полуволн в форме бифуркационного выпучивания $n = 36$ при длине $\lambda = L/n = 13,89$ м.

Изгибные колебания БК, вращающейся в горизонтальной скважине. Выше показано, что БК, вращающаяся в горизонтальной скважине, под действием постоянных сил трения, ориентированных в окружном направлении, перекачивается вверх по поверхности скважины и устанавливается в состоянии стационарного вращения под углом $\theta = \arctg \mu$ (рис. 2). Исследуем малые изгибные колебания БК относительно этого состояния. Примем, что скорости скольжения БК по поверхности скважины при колебаниях не превышают скорость ее скольжения, вызванную вращением, поэтому при колебаниях дополнительные силы трения не возникают. В этом случае для построения уравнения динамики достаточно в левую часть соотношения (12) добавить слагаемое

$$\delta f^{in} = \gamma a \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}, \quad (21)$$

определяющее силу инерции δf^{in} , где γ – погонная плотность трубы БК.

В результате получим уравнение свободных колебаний

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{gr} \delta u + \gamma \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

которое допускает решения в формах стоячих и бегущих волн.

Для бесконечной БК стоячую волну представим в виде

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin(\pi z / \lambda) \sin(kt), \quad (23)$$

где k – круговая частота свободных колебаний.

Подставив (23) в (22), получим характеристическое уравнение

$$EI \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 + F_z \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{gr} - \gamma k^2 = 0, \quad (24)$$

из которого определяем частоту k свободных колебаний БК для заданной полу-волны λ :

$$k = \sqrt{\left[EI \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 + F_z \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{gr} \right] / \gamma}. \quad (25)$$

Как видно, значение k увеличивается с приложением растягивающей осевой силы $F_z(z)$ и уменьшается при действии сжимающей $F_z(z)$. Оно существенно зависит также от межтрубного зазора a и с его уменьшением возрастает.

На рис. 5 приведены зависимости частоты k от длины полуволны λ в диапазоне $10 \leq \lambda \leq 50$ м при $\gamma = 38,7$ кг/м. Кривые 1, 2, 3 отвечают случаям, когда труба БК свободна от связей и межтрубный зазор $a = 0,04$ и $0,02$ м соответственно. Видно, что влияние контактного взаимодействия вращающейся БК с дном скважины на значения частот k ее собственных колебаний становится более заметным с увеличением полушага λ и уменьшением межтрубного зазора a .

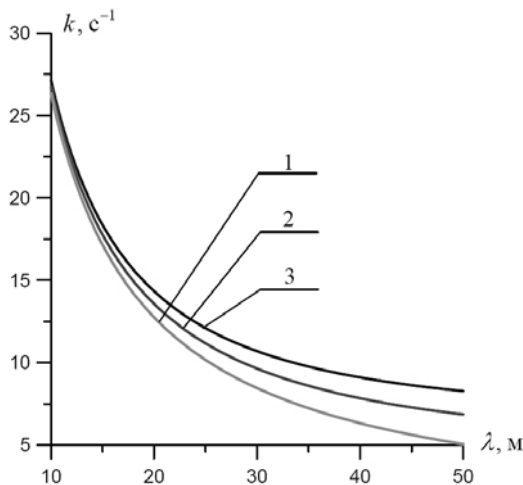


Рис. 5. Частотная диаграмма поперечных колебаний бурильной колонны на дне скважины.

Второй вид изгибных колебательных движений вращающейся БК на дне горизонтальной скважины связан с распространением бегущих гармонических волн:

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda} - \varphi t\right), \quad (26)$$

где π/λ – волновое число; φ – циклическая частота.

Параметры π/λ и φ определяют фазовую скорость распространения гармонической волны

$$w = \varphi\lambda/\pi. \quad (27)$$

Для получения зависимости между φ и λ необходимо в уравнении (22) вместо переменной $\delta u(z, t)$ подставить правую часть равенства (26). В результате получим дисперсионное уравнение, которое по форме совпадает с уравнением (24) и имеет решение в виде равенства (25). С его помощью можно найти функцию фазовой скорости (27):

$$w = \sqrt{\left[EI \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 + F_z + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 f^{gr} \right] / \gamma}. \quad (28)$$

Поскольку функция фазовой скорости зависит от длины полуволны λ , оказывается, что изгибные гармонические волны разной длины распространяются вдоль оси БК с различной скоростью. Это означает, что изгибная волна произвольной формы при перемещении изменяет свой профиль, т.е. диспергирует, а без дисперсии могут распространяться только синусоидальные (косинусоидальные) волны. Причем скорости этих волн возрастают с увеличением продольной растягивающей силы F_z и уменьшением межтрубного зазора a .

Выводы

1. Поставлена задача о потере устойчивости и малых свободных изгибных колебаниях напряженной продольной силой вращающейся буровой колонны, лежащей на дне канала горизонтальной скважины. Показано, что построенные дифференциальные уравнения изгиба колонны и ее малых свободных колебаний аналогичны соответствующим уравнениям изгиба и колебаний балки на упругом основании.

2. Найдено критическое значение продольной сжимающей силы. Показано, что оно увеличивается с повышением погонной плотности колонны и уменьшением межтрубного зазора.

3. Установлено, что в зависимости от длины колонны ее колебания могут быть реализованы в форме как стоячих, так и бегущих гармонических волн. Показано, что бегущие волны являются диспергирующими, построено выражение для значения их фазовых скоростей.

Резюме

У зв'язку з розробкою нових технологій видобутку вуглеводневого палива зі сланцевих порід у нафтогазовій промисловості все більша увага приділяється задачам буріння похилих і горизонтальних свердловин. Специфіка процесів проходки таких свердловин полягає в тому, що на їх перебіг істотно впливають сили контактної і фрикційної взаємодії між поверхнею бурової колони і стінкою свердловини, що виникають у цих випадках. Поставлено задачу про біфуркаційні випинання і малі згинні коливання бурової колони, що обертається, яка лежить у каналі горизонтальної свердловини. З урахуванням сил тертя і додаткових реакцій зв'язків виведено диференціальні рівняння, для яких побудовано розв'язки задач на власні значення про вільні коливання колон скінченної та необмеженої довжини.

1. *Lubinski A., Althouse W. S., and Logan J. L. Helical buckling of tubing sealed in packers // J. Petrol. Technol. – 1962. – 14, No. 6. – P. 655–670.*

2. *Paslay P. R. and Bogy D. B.* The stability of a circular rod laterally constrained to be in a contact with an inclined circular cylinder // *J. Appl. Mech.* – 1964. – **31**, No. 4. – P. 604–610.
3. *Dawson R. and Paslay P. R.* Drillpipe buckling in inclined holes // *J. Petrol. Technol.* – 1984. – **36**, No. 10. – P. 1734–1738.
4. *Mitchell R. F.* Effects of well deviation on helical buckling // *SPE Drill. Completion.* – 1997. – **12**, No. 1. – P. 63–70.
5. *Mitchell R. F.* Tubing buckling – the state of art // *Ibid.* – 2008. – **23**, No. 4. – P. 361–370.
6. *Mitchell R. F. and Miska S. Z.* Helical buckling of pipe with connectors and torque // *Ibid.* – 2006. – **21**, No. 2. – P. 108–115.
7. *Chen Y.-C., Lin Y.-H., and Cheatham J. B.* Tubing and casing buckling in horizontal wells // *J. Petrol. Technol.* – 1990. – **42**, No. 2. – P. 140–146.
8. *Kyllingstad A.* Buckling of tubular strings in curved wells // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 1995. – **12**, No. 3. – P. 209–218.
9. *Гуляев В. И., Горбунович И. В.* Устойчивость бурильных колонн в наклонно направленных скважинах // *Пробл. прочности.* – 2008. – № 6. – С. 71–81.
10. *Gulyayev V. I., Gaidaichuk V. V., Solovjov I. L., and Gorbunovich I. V.* The buckling of elongated rotating drill strings // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2009. – **67**, Nos. 3–4. – P. 140–148.
11. *Gao G. and Miska S.* Dynamic buckling and snaking motion of rotating drilling pipe in a horizontal well // *SPE J.* – 2010. – **15**, No. 3. – P. 867–877.
12. *Gulyayev V. I. and Borshch E. I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2011. – **78**, Nos. 3–4. – P. 759–764.
13. *Dunayevsky V. A., Abbassian F., and Judzis A.* Dynamic stability of drill strings under fluctuating weight on bit // *SPE Drill. Completion.* – 1993. – **8**, No. 2. – P. 84–92.
14. *Гуляев В. И., Худолий С. Н., Глушакова О. В.* Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения // *Пробл. прочности.* – 2009. – № 6. – С. 31–43.
15. *Гуляев В. И., Худолий С. Н., Борщ Е. И.* Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны // *Там же.* – 2010. – № 6. – С. 13–25.
16. *Gulyayev V. I. and Shevchuk L. V.* Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole // *Proc. Inst. Mech. Eng. K - J. Mul. Dyn.* – 2013. – **227**, No. 3. – P. 234–244.
17. *Gulyayev V. I. and Andrusenko E. N.* Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drirage of curvilinear bore-holes // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2013. – **112**. – P. 170–177.
18. *Gulyayev V. I., Gaidaichuk V. V., Andrusenko E. N., and Shlyun N. V.* Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drirage // *J. Offshore Mech. Arct. Eng.* – 2015. – **137**, No. 1. – P. 011402-1–011402-8. DOI: 10.1115/1.4028656.
19. *Samuel R.* Friction factors: What are they for torque, drag, vibration, bottom hole assembly and transient surge/swab analyses? // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2010. – **73**, Nos. 3–4. – P. 258–266.

Поступила 27. 09. 2017