

## Розробка моделі циклічної пластичності для описання ефекту ратчетингу за непропорційного асиметричного навантаження

М. П. Адамчук<sup>а</sup>, М. В. Бородій<sup>а</sup>, О. М. Селін<sup>б</sup>, В. О. Стрижало<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна

<sup>б</sup> Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, Київ, Україна

*Розроблено версію ендохронної теорії пластичності для описання напружено-деформованого стану при асиметричному циклічному двовісному непропорційному навантаженні з контролем за напруженнями. Для розв’язання отриманої нелінійної системи диференціальних рівнянь запропоновано чисельну процедуру і розроблено відповідну обчислювальну програму. Достовірність моделі підтверджується задовільною відповідністю між розрахунковими та відомими експериментальними даними.*

**Ключові слова:** ратчетинг, асиметричне непропорційне навантаження, складний напружений стан, теорія пластичності, чисельне моделювання.

**Вступ.** Відомо, що за малоциклового асиметричного навантаження металів із контролем за напруженнями виникає таке явище, як ратчетинг, або циклічна повзучість – накопичення пластичних деформацій в напрямку дії середніх напружень циклу  $\sigma_m$ , що може призвести до неприпустимих переміщень. Ці переміщення є однією з можливих причин виникнення пошкоджень, руйнувань або втрати функціональної придатності конструкцій енергетичного машинобудування, авіації, транспорту тощо.

На сьогодні є актуальними експериментальні і теоретичні дослідження ефекту ратчетингу за непропорційного навантаження. Відомо багато робіт, присвячених вивченню цього ефекту [1, 2], однак мають місце значні розбіжності між експериментальними та розрахунковими даними. Необхідно також відмітити, що наявні моделі прогнозування кінетики напружено-деформованого стану досить складні у використанні і потребують проведення значної кількості базових експериментів для визначення необхідних параметрів розрахунку. Тому проблема побудови простої моделі циклічної пластичності для інженерних розрахунків є актуальною.

**Розробка моделі циклічної пластичності.** Проаналізуємо двовісне навантаження матеріалу по довільній кусково-ломаній траєкторії у девіаторному просторі напружень, обмежившись випадком, коли відмінні від нуля лише дві компоненти тензора напружень  $\sigma_x$  і  $\tau_{xy}$ . Розглянемо довільну ділянку цієї траєкторії, наприклад  $AB$  (рис. 1), для якої можна записати наступне рівняння прямої:

$$\sigma_x = k\sqrt{3}\tau_{xy} + \bar{\sigma}, \quad (1)$$

де  $k$  – коефіцієнт кута нахилу прямої  $AB$ ;  $\bar{\sigma}$  – координата точки перетину прямої  $AB$  з віссю  $\sigma$ .

Оскільки в довільному випадку завдання траєкторії відрізок  $AB$  може бути паралельним осі  $\sigma$ , для виключення невизначеності  $k = \infty$  строго дотримуватись умови паралельності немає необхідності. При цьому характер траєкторії несуттєво зміниться, якщо ввести малий кут нахилу, відмінний від нуля.

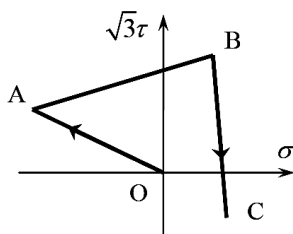


Рис. 1. Траєкторія непропорційного навантаження.

Для описання кінетики напружено-деформованого стану скористаємося рівняннями стану ендохронної теорії пластичності [3], що зв'язують дві компоненти тензора напружень  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  і дві компоненти тензора пластичної деформації  $\varepsilon^P$ ,  $\gamma^P$ :

$$\sigma_x = \sigma_\tau \frac{d\varepsilon^P}{dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\varepsilon^P}{dz'} dz'; \quad (2)$$

$$\sqrt{3}\tau_{xy} = \sigma_\tau \frac{d\gamma^P}{\sqrt{3}dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\gamma^P}{\sqrt{3}dz'} dz'; \quad (3)$$

$$dz = \frac{d\xi}{F}; \quad (4)$$

$$d\xi^2 = (d\varepsilon^P)^2 + \frac{1}{3}(d\gamma^P)^2, \quad (5)$$

де  $\sigma_\tau$  – границя плинності;  $z$  – внутрішній час;  $\xi$  – міра внутрішнього часу (параметр Одкавіста);  $F$  – функція зміцнення;  $E$  – спадкова функція.

Оскільки початкова модель, що базується на визначальних співвідношеннях ендохронної теорії пластичності Валаніса [3], не дозволяє коректно прогнозувати кінетику ефекту ратчетингу, скористаємося запропонованою раніше [4, 5] простою моделлю циклічної пластичності для описання асиметричного одновісного малоциклового навантаження з контролем за напруженнями.

Для описання ефекту ратчетингу в роботі [4] було удосконалено рівняння (2), (3) шляхом використання більш складного визначення спадкової функції, а саме:

$$E(z, \delta) = E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta), \quad (6)$$

де  $E_1$ ,  $E_2$  і  $\alpha$  – параметри матеріалу.

Модель будувалася на основі припущення, що кінематичне зміцнення, яке визначається спадковою функцією  $E$ , залежить не тільки від міри процесу деформування – внутрішнього часу  $z$ , а й від рівня напружень, досягнутих у попередньому півциклі навантаження. Згідно з цим припускається існування залежності спадкової функції  $E$  від характерної відстані в просторі напружень  $\delta$ , яку запропоновано в роботі [6] для удосконалення правила кінематичного зміцнення теорії течії. Це дозволило вирішити проблему змикання петель пружно-пластичного гістерезису, що була причиною неможливості описання ефекту ратчетингу при моделюванні асиметричного циклічного навантаження за класичною моделлю [3].

З урахуванням вищезазначеного для випадку двовісного навантаження величини спадкової функції в окремих рівняннях ендохронної теорії пластичності (2) і (3) будуть приймати значення, які відрізняються одне від одного:

$$\begin{aligned} E(z, \delta_\sigma) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\sigma); \\ E(z, \delta_\tau) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, вихідну систему визначальних рівнянь ендохронної теорії пластичності можна переписати наступним чином:

$$\sigma_x = \sigma_\tau \frac{d\varepsilon^p}{dz} + \int_0^z E_1 e^{-\alpha(z-z')} \frac{d\varepsilon^p}{dz'} dz' + \int_0^z E_2(\delta_\sigma) \frac{d\varepsilon^p}{dz'} dz'; \quad (8)$$

$$\sqrt{3}\tau_{xy} = \sigma_\tau \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3}dz} + \int_0^z E_1 e^{-\alpha(z-z')} \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3}dz'} dz' + \int_0^z E_2(\delta_\tau) \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3}dz'} dz'; \quad (9)$$

$$\sigma_x = k\sqrt{3}\tau_{xy} + \bar{\sigma}; \quad (10)$$

$$F^2(z) = \left( \frac{d\varepsilon^p}{dz} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{d\gamma^p}{dz} \right)^2. \quad (11)$$

Тут  $F(z)$  – функція зміцнення,

$$F(z) = C - (C-1)e^{-\beta z}, \quad (12)$$

де  $C$  і  $\beta$  – параметри матеріалу.

Введемо нові безрозмірні змінні

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{\sigma_\tau}, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}\tau_{xy}}{\sigma_\tau}, \quad \varepsilon = \varepsilon^p, \quad \gamma = \frac{\gamma^p}{\sqrt{3}}$$

та позначення

$$a_1 = \frac{E_1}{\sigma_\tau}, \quad a_2 = \frac{E_2(\delta_\sigma)}{\sigma_\tau}, \quad a_3 = \frac{E_2(\delta_\tau)}{\sigma_\tau}.$$

Тоді рівняння (8) і (9) запишемо так:

$$\sigma = \varepsilon + \int_0^z a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\varepsilon}(z') dz' + \int_0^z a_2 \dot{\varepsilon}(z') dz'; \quad (13)$$

$$\tau = \gamma + \int_0^z a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\gamma}(z') dz' + \int_0^z a_3 \dot{\gamma}(z') dz', \quad (14)$$

де точкою над параметром позначено диференціювання по змінній внутрішнього часу  $z$ .

Якщо розглядати навантаження по кусково-ломаній траєкторії деформування (рис. 1) в просторі напружень, то рівняння (13) і (14) для  $n$ -ї ділянки траєкторії  $z_n \leq z \leq z_{n+1}$  набудуть наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma = \dot{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\varepsilon}(z') dz' + \int_{z_n}^z a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\varepsilon}(z') dz' + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} a_2 \dot{\varepsilon}(z') dz' + \int_{z_n}^z a_2 \dot{\varepsilon}(z') dz'; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau = \dot{\gamma} + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\gamma}(z') dz' + \int_{z_n}^z a_1 e^{-\alpha(z-z')} \dot{\gamma}(z') dz' + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} a_3 \dot{\gamma}(z') dz' + \int_{z_n}^z a_3 \dot{\gamma}(z') dz'. \end{aligned} \quad (16)$$

Продиференціюємо рівняння (15) і (16) по  $z$  і виконаємо відповідні перетворення з урахуванням (10) і (11). У результаті отримаємо вирази, що зв'язують напруження і деформації:

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_n + A_{\varepsilon_n} \dot{\varepsilon}_n + B_{\varepsilon_n} \varepsilon_n + C_{\varepsilon_n} = \alpha \sigma_n + \dot{\sigma}_n; \\ \ddot{\gamma}_n + A_{\gamma_n} \dot{\gamma}_n + B_{\gamma_n} \gamma_n + C_{\gamma_n} = \alpha \tau_n + \dot{\tau}_n; \\ \sigma = k_n \tau + s_n; \\ F^2(z) = (\dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\gamma})^2, \end{cases} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_n} = \alpha + a_1 + a_{2_n}; \quad B_{\varepsilon_n} = \alpha a_{2_n}; \quad A_{\gamma_n} = \alpha + a_1 + a_{3_n}; \quad B_{\gamma_n} = \alpha a_{3_n}; \\ C_{\varepsilon_n} = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_{2_n} (\varepsilon(z_{i+1}) - \varepsilon(z_i)) - \alpha a_{2_n} \varepsilon(z_n); \\ C_{\gamma_n} = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_{3_n} (\gamma(z_{i+1}) - \gamma(z_i)) - \alpha a_{3_n} \gamma(z_n); \quad s_n = \frac{\bar{\sigma}_n}{\sigma_T}. \end{aligned}$$

Отже, внаслідок цих перетворень було отримано нелінійну систему диференціальних рівнянь різного порядку (17), що описує напружено-деформований стан матеріалу на  $n$ -й ( $z_n \leq z \leq z_{n+1}$ ) ділянці кусково-ломаної траєкторії в просторі напружень.

**Чисельний розрахунок.** Нелінійна система рівнянь (17) не має аналітичного розв'язку, тому подальші обчислення є можливими лише із застосуванням числових методів. Приведемо (17) до вигляду системи диференціальних рівнянь першого порядку при таких позначеннях:  $y_0 = \varepsilon$ ;  $y_1 = \dot{\varepsilon}$ ;  $y_2 = \gamma$ ;  $y_3 = \dot{\gamma}$ ;  $y_4 = \tau$ .

Тоді маємо:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = \ddot{\varepsilon} = -A_{\varepsilon} y_1 - B_{\varepsilon} y_0 - C_{\varepsilon} + \alpha k y_4 + \alpha s + k \dot{y}_4; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = \ddot{\gamma} = -A_{\gamma} y_3 - B_{\gamma} y_2 - C_{\gamma} + \alpha y_4 + \dot{y}_4. \end{cases} \quad (18)$$

З урахуванням того, що

$$F^2(z) = (\dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\gamma})^2, \quad \text{або} \quad F^2(z) = (y_1)^2 + (y_3)^2, \quad (19)$$

продиференціюємо цю рівність по  $z$ :

$$y_1 \dot{y}_1 + y_3 \dot{y}_3 = F\dot{F}.$$

Замість  $\dot{y}_1$  та  $\dot{y}_3$  підставимо вирази (18) і (19) відповідно:

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 = \frac{1}{ky_1 + y_3} [F\dot{F} - y_1(-A_\varepsilon y_1 - B_\varepsilon y_0 - C_\varepsilon + \alpha ky_4 + \alpha s) - \\ - y_3(-A_\gamma y_3 - B_\gamma y_2 - C_\gamma + \alpha y_4)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким чином маємо систему з п'яти функцій, залежних від внутрішнього часу  $z$ :

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = \dot{\varepsilon} = -A_\varepsilon y_1 - B_\varepsilon y_0 - C_\varepsilon + \alpha ky_4 + \alpha s + k\dot{y}_4; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = \dot{\gamma} = -A_\gamma y_3 - B_\gamma y_2 - C_\gamma + \alpha y_4 + \dot{y}_4; \\ \dot{y}_4 = \frac{1}{ky_1 + y_3} [F\dot{F} - y_1(-A_\varepsilon y_1 - B_\varepsilon y_0 - C_\varepsilon + \alpha ky_4 + \alpha s) - \\ - y_3(-A_\gamma y_3 - B_\gamma y_2 - C_\gamma + \alpha y_4)]. \end{cases} \quad (21)$$

Чисельно дана система диференціальних рівнянь із початковими умовами розв'язувалась методом Рунге-Кутта четвертого порядку. Для цього було складено відповідну обчислювальну програму. На кожному кроці, маючи для поточного внутрішнього часу  $z_i$  значення  $y_i$ , при наступній ітерації отримуємо  $y_{i+1}$  за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4),$$

де

$$F_1 = f(z_i, y_i); \quad F_2 = f\left(z_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}F_1\right); \quad F_3 = f\left(z_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}F_2\right);$$

$$F_4 = f(z_i + h, y_i + hF_3);$$

$h$  – крок внутрішнього часу  $z$ .

Перехід на наступну лінійну ділянку відбувається при досягненні напруженнями з певною точністю необхідної величини. При цьому має місце зміна констант, що описують траєкторію навантаження, а з попередньої ділянки як початкові умови беруться відповідні значення напружень і деформацій. Як перше наближення до невідомих приростів деформацій на нових ділянках ці прирости визначались із рівнянь початкової моделі [7]:

$$\frac{d\varepsilon^p}{dz} = \frac{1}{k^2 + 1} \left[ \Phi'(z) \pm k \sqrt{F^2(z, \dots)(k^2 + 1) - (\Phi'(z))^2} \right];$$

$$\frac{dy^P}{\sqrt{3}dz} = \frac{1}{k^2 + 1} \left[ -k\Phi'(z) \pm \sqrt{F^2(z, \dots)(k^2 + 1) - (\Phi'(z))^2} \right].$$

**Верифікація моделі.** Для перевірки коректності розрахунків за розробленою чисельною процедурою було проведено розрахунок кінетики напружено-деформованого стану при одновісному асиметричному розтязі–стиску. Отримані результати порівнювали з розрахунковими за одновісною аналітичною моделлю [8].

За тестовий приклад було вибрано навантаження вуглецевої сталі марки CS1020 із наступними параметрами циклу: максимальне напруження  $\sigma_{\max} = 402,5$  МПа; мінімальне напруження  $\sigma_{\min} = -281,2$  МПа. Інші параметри ендохронної моделі, використані при прогнозуванні:  $E = 1,73 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 275$  МПа;  $E_1 = 1,74 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2(0) = 11850$  МПа;  $\alpha = 965$ ;  $C = 0,78$ ;  $\beta_2 = 30$ .

При розрахунку також було використано раніше [8] встановлений вигляд спадкової функції:

$$E_2(\delta) = E_2(0) - 6,3 \cdot 10^{-7} \delta^6 \left( \frac{\sigma_a - \sigma_s}{\sigma_a^6 - \sigma_s^6} \right)^8, \quad (22)$$

де  $\sigma_a$  – амплітуда напружень;  $\sigma_a^6$  – амплітуда напружень базового експерименту;  $\sigma_s$  – радіус поверхні пластичності у стабілізованому стані.

На рис. 2 наведено розрахункові криві, що відтворюють асиметричне одновісне навантаження сталі CS1020 [9]. Крива з точками відповідає результатам розрахунку за одновісною аналітичною моделлю [8], суцільна крива – результатам розрахунку за запропонованим чисельним підходом. Оскільки ці криві майже збігаються, можна зробити висновок, що розроблена чисельна процедура є цілком коректною, і наближений вибір початкових умов не дає значної похибки.

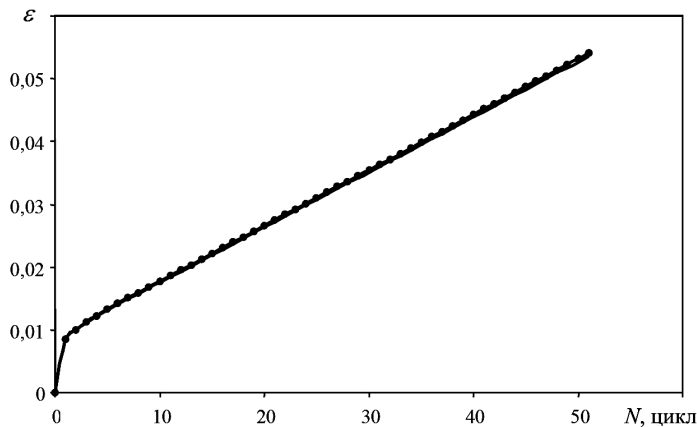


Рис. 2. Розрахункові криві циклічної повзучості сталі CS1020.

**Проведення чисельних розрахунків.** Для оцінки можливості даної моделі адекватно описувати процес накопичення незворотних деформацій ратчетингу за непропорційного асиметричного навантаження було розв'язано тестові задачі [1, 2] щодо відтворення кінетики напружено-деформованого стану, що виникає в тонкостінних трубчастих зразках із нержавіючої сталі 304L при навантаженні по циклічних квадратній і хрестоподібній траєкторіях (рис. 3). Розрахунки щодо моделювання навантаження за цими траєкторіями для амплітудного напруження  $\sigma_a = 200$  МПа та середнього напруження  $\sigma_m = 50$  МПа виконували за наступними параметрами:

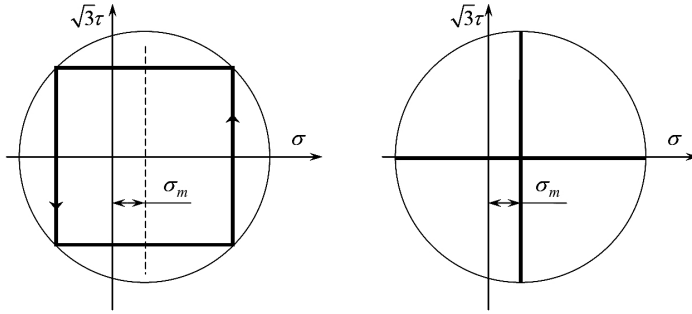
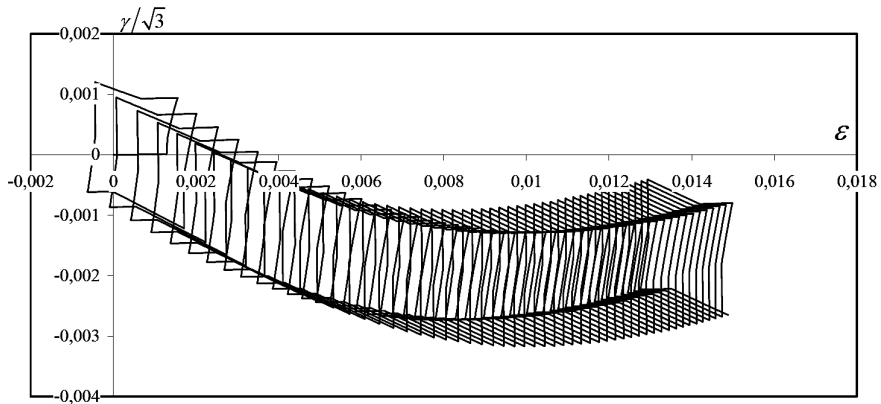
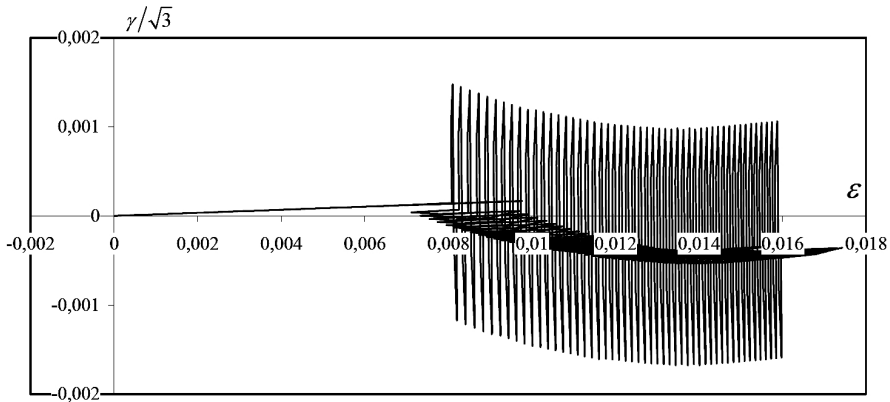


Рис. 3. Траєкторії непропорційного циклічного навантаження.



а



б

Рис. 4. Відтворення деформацій за удосконаленою методикою при навантаженні нержавіючої сталі 304L по асиметричній квадратній (а) та хрестоподібній (б) траєкторіях.

$\sigma_T = 140$  МПа;  $E_1 = 172$  ГПа;  $E_2 = 4280$  МПа;  $E_0 = 178$  ГПа;  $\alpha = 2300$ ;  $C = 1,33$ ;  $\beta = 32$ ;  $p = 1$ .

Для уникнення сингулярності при заданні траєкторії лінійних ділянок навантаження траєкторію навантаження було повернуто на  $2^\circ$ . Крок внутрішнього часу  $h$  склав  $10^{-4}$ . На рис. 4 наведено діаграми деформування нержавіючої сталі 304L, отримані при моделюванні за удосконаленою методикою та при використанні умовних значень ядра спадковості. Очевидно, що введення залежності кінематичного

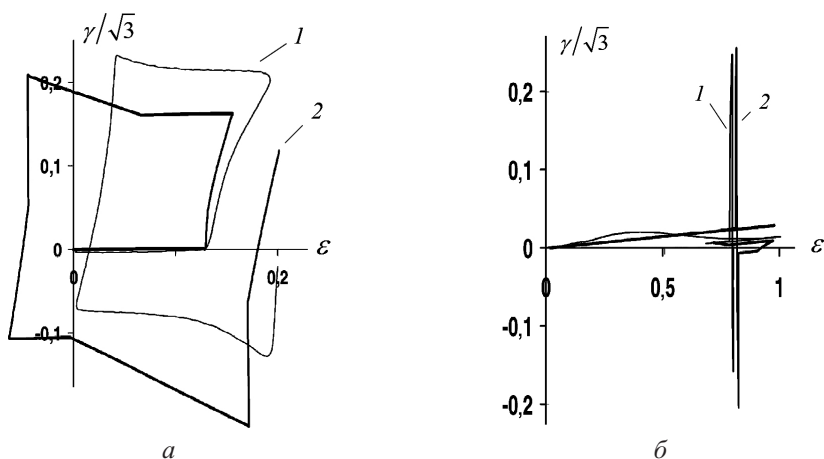


Рис. 5. Порівняння розподілу деформацій для першого циклу, отриманого за удосконаленою методикою для нержавіючої сталі 304L за асиметричними квадратною (а) та хрестоподібною (б) траєкторіями: 1 – експериментальні дані; 2 – розрахункові.

зміцнення від максимальних напружень, що були досягнуті на попередній ділянці навантаження, дозволяє уникнути змикання петлі пружно-пластичного гістерезису, і таким чином удосконалена модель може використовуватися для прогнозування ратчетингу за непропорційного навантаження. Разом із тим спостерігається незначна невідповідність (поворот) між розрахунковим розподілом поля деформацій і експериментальним. Це може бути зумовлено недостатньою точністю визначення констант матеріалу, наприклад модуля пружності  $E_0$ , який використовували з аналізу статичної діаграми; незначним відхиленням розрахункової траєкторії деформування від експериментальної для виключення сингулярності в рівняннях; впливом точок зломованого стану для першого циклу навантаження за вищевказаними траєкторіями у порівнянні з експериментальними даними [2].

## Висновки

1. Модифіковано визначальні співвідношення ендохронної теорії пластичності для двовісного випадку навантаження шляхом введення залежності кінематичного зміцнення від максимальних напружень, що були досягнуті на попередній ділянці навантаження.
2. Розроблено відповідну чисельну процедуру і проведено її верифікацію при відтворенні одновісного навантаження у порівнянні з результатами, отриманими за допомогою одновісної аналітичної моделі.
3. Виконано розрахунок тестової задачі з моделювання непропорційного навантаження матеріалу по квадратній та хрестоподібній траєкторіях в просторі напружень.
4. Показано, що використання даної моделі дозволило уникнути змикання петлі пружно-пластичного гістерезису та описати процес ратчетингу за непропорційного навантаження.

## Резюме

Разработана версия эндохронной теории пластичности для описания напряженно-деформированного состояния при асимметричной циклической двухосной непропорциональной нагрузке с контролем по напряжениям. Для решения полученной



нелинейной системы дифференциальных уравнений предложена численная процедура и создана соответствующая вычислительная программа. Достоверность модели подтверждается удовлетворительным соответствием между расчетными и известными экспериментальными данными.

1. *Aubin V. and Degallaix S.* Ratchetting modeling of a duplex stainless steel model based on yield surface distortion // Proc. of 7th Int. Conf. Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture (June 28–July 1, 2004). – Berlin, 2004. – P. 285–290.
2. *Hassan T., Taleb L., and Krishna S.* Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // Int. J. Plasticity. – 2008. – **24**, Issue 10. – P. 1863–1889.
3. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of new intrinsic time measure plasticity as a limit of the endochronic theory // Arch. Mech. – 1980. – **32**. – P. 171–191.
4. *Borodii M. V.* Modeling of the asymmetric low-cycle loading in the space of stresses // Strength Mater. – 1998. – **30**, No. 5. – P. 472–480.
5. *Kucher N. K. and Borodii M. V.* A version of endochronic theory of plasticity for describing non-proportional cyclic deformation // Int. J. Non-Linear Mech. – 1993. – **28**, No. 2. – P. 267–278.
6. *Dafalias Y. F. and Popov E. P.* Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity // J. Appl. Mech. – 1976. – **43**. – P. 645–655.
7. *Borodii M. V.* Application of endochronic theory of plasticity for modeling non-proportional repetitive-variable hard loading // Strength Mater. – 1994. – **26**, No. 5. – P. 321–237.
8. *Borodii M. V. and Adamchuk M. P.* Numerical simulation cyclic creep effect according to uniaxial loading programs // Ibid. – 2010. – **42**, No. 6. – P. 711–716.
9. *Hassan T. and Kyriakides S.* Ratcheting in cyclic plasticity. Part I: Uniaxial behaviour // Int. J. Plasticity. – 1992. – **8**. – P. 91–116.

Поступила 23. 03. 2015