

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178,620.179

Вибродиагностические параметры наличия полуэллиптической дышащей трещины в стержне круглого поперечного сечения при супер- и субгармоническом резонансах

В. В. Матвеев, Е. А. Онищенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрены методы и результаты приближенного аналитического и численного расчета вибродиагностических параметров наличия закрывающейся поверхностной полуэллиптической трещины в консольном стержне круглого поперечного сечения при супер- и субгармоническом резонансах низшей собственной формы изгибных колебаний при силовом и кинематическом возбуждении. Представлены зависимости диагностических параметров от местоположения и относительной глубины трещины, а также от места приложения вынуждающей силы. Отмечено, что амплитудно-частотная характеристика при сильном суперрезонансе отличается от таковой при слабом и субгармоническом резонансах. Выяснены причины различия между результатами аналитического и численного решения, полученного с использованием конечноэлементной модели стержня.

Ключевые слова: полуэллиптическая дышащая трещина, конечноэлементная модель, вибродиагностика усталостного повреждения, суб- и супергармонический резонансы.

Введение. В данном исследовании в развитие работ [1, 2], которые ограничивались рассмотрением стержней прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, представлены результаты аналитического и численного решений по определению вибродиагностических параметров наличия дышащей поверхностной полуэллиптической трещины в стержне круглого поперечного сечения при разных видах гармонического возбуждения супергармонического резонанса 2-го порядка и субгармонического резонанса порядка 1/2 какой либо j -й формы изгибных колебаний, проявление которых обусловлено вносимой трещиной исходной нелинейностью колебательной системы.

Методика аналитического решения. В качестве основного вибродиагностического параметра наличия в каком-либо сечении x_T стержня поверхностной полуэллиптической трещины (рис. 1) используются отношения амплитуд гармоник: второй, резонирующей к первой при суперрезонансе ($\bar{A}_{2/1} = A_{2j}/A_{1\Sigma}$), и первой, резонирующей ко второй при субрезонансе ($\bar{A}_{1/2} = A_{1j}/A_{2\Sigma}$), которые определяются через параметр нелинейности α и логарифмический декремент колебаний δ системы по формулам [1, 3, 4]:

$$\bar{A}_{2/1} \cong 0,58(\alpha/\delta)\lambda_{1j} \quad \text{при} \quad \bar{A}_{2/1} \leq 0,9, \quad (1a)$$

$$\bar{A}_{2/1} \cong 0,725\lambda_{1j}\sqrt{\alpha/\delta} \quad \text{при} \quad \bar{A}_{2/1} > 0,9, \quad (16)$$

$$\bar{A}_{1/2} \cong \frac{4\alpha}{3\delta} \left(\lambda_{2j}^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{8\alpha^2}{9\pi\delta} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где λ_{1j} – отношение амплитуды первой гармоники j -й формы A_{1j} к полной амплитуде первой гармоники $A_{1\Sigma}$ при вынужденных колебаниях цельного стержня на частоте суперрезонанса; λ_{2j} – отношение полной амплитуды второй гармоники $A_{2\Sigma}$ к амплитуде второй гармоники j -й формы A_{2j} при вынужденных колебаниях цельного стержня на частоте субрезонанса.

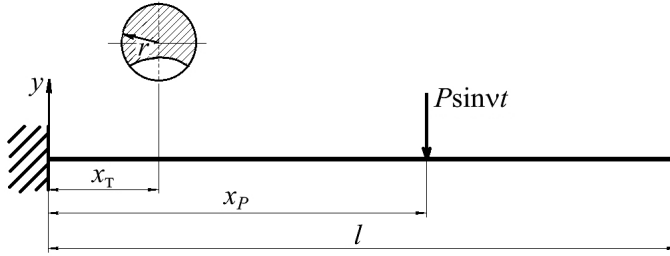


Рис. 1. Стержень круглого сечения с полуэллиптической поверхностной трещиной, нагруженный вынуждающей гармонической силой.

Параметр α равен возможному относительному изменению изгибной жесткости стержня вследствие открытия трещины при его основных вынужденных колебаниях по j -й форме до проявления ее резонанса в составе остальных возбуждаемых форм колебаний на частоте супер- или субрезонанса и определяется через энергетическую характеристику повреждения χ :

$$\alpha = \frac{\chi}{1 + \chi}. \quad (3)$$

Характеристика χ вычисляется по данным расчета основных установившихся вынужденных колебаний неповрежденного стержня как отношение обусловленного наличием трещины возможного приращения потенциальной энергии деформации стержня $\Delta\Pi_{jT}$ при колебаниях по исследуемой j -й форме в составе остальных возбуждаемых форм колебаний к потенциальной энергии деформации стержня Π_j по j -й форме при его колебаниях на частоте супер- или субгармонического резонанса:

$$\chi = \frac{\Delta\Pi_{jT}}{\Pi_j}. \quad (4)$$

Вынужденные колебания стержня будем рассчитывать по методу нормальных форм колебаний, или по методу главных координат линейной теории колебаний. При этом из-за допустимого пренебрежения различием в сдвиге фаз колебаний по главным координатам при частотах рассматриваемых резонансов и возможных уровнях демпфирования амплитудную функцию прогибов стержня представим в виде конечной суммы амплитуд прогибов по собственным формам:

$$y(x) = \sum_{i=1}^N y_i(x). \quad (5)$$

Приращение потенциальной энергии $\Delta\Pi_{jt}$ при наличии в поперечном сечении стержня поверхностной полуэллиптической трещины нормального отрыва (рис. 2) площадью S и контуром Γ определяется через коэффициент интенсивности нормальных напряжений K_1 по формуле [5]

$$\Delta\Pi_{jt} = \frac{1}{E} \iint_{(S)} K_1^2 \delta\bar{\rho} \cos \theta d\Gamma, \quad (6)$$

где $\delta\bar{\rho}$ – вектор возможного смещения точки фронта-контура Γ трещины; θ – угол между $\delta\bar{\rho}$ и нормалью к контуру трещины.

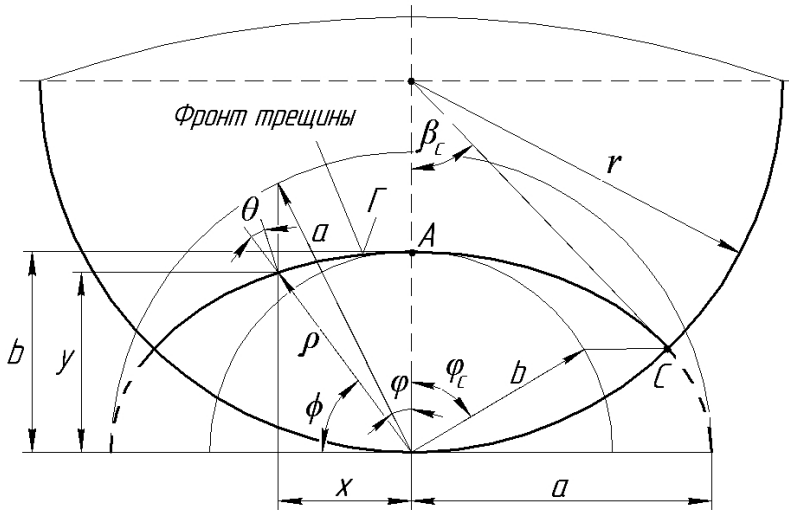


Рис. 2. Геометрия полуэллиптической поверхностной трещины в стержне круглого сечения.

Рассмотрим два варианта изменения фронта трещины. В первом – предположим, что фронт трещины изменяется при постоянном соотношении полуосей, т.е. при $a/b = \text{const}$, во втором – при $a/r = \text{const}$. Для первого варианта из представленной на рис. 2 схемы, при задании радиус-вектора $\bar{\rho}$ в полярных координатах (ρ и ϕ), следует $\cos \theta = \rho \frac{d\phi}{d\Gamma}$, $\delta\bar{\rho} = \frac{\rho}{b} db$ и $d\phi = \frac{ab}{\rho^2} d\phi$, и формула (6) принимает вид

$$\Delta\Pi_{jt} = \frac{2}{E} \frac{a}{b} \int_0^b \int_0^{\phi_c} K_1^2 b db d\phi. \quad (7)$$

Для рассматриваемого случая трещины коэффициент интенсивности нормальных напряжений согласно [6, 7] определяется по формуле

$$K_1 = \sigma_{Tj} \sqrt{\pi c} F_1, \quad (8)$$

где σ_{Tj} – номинальное максимальное нормальное напряжение в сечении расположения трещины $x = x_T$ при изгибе стержня по j -й форме его деформирования в составе остальных форм (здесь и далее обозначено звездочкой) вынужденных колебаний

$\left(\sigma_{Tj} = Er \left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)_{x=x_T} \right)$; c – полудлина дуги окружности сечения, охватываемой трещиной ($c = r\beta_c$); F_1 – безразмерный коэффициент интенсивности.

С использованием приведенных в [6, 7] табличных значений для F_1 в точках A и C контура трещины для разных отношений b/a и b/r , а также графиков зависимости F_1 от относительного угла $\bar{\varphi} = \varphi/\varphi_c$ можно в приближении для заданных значений полуосей эллипса a , b и радиуса поперечного сечения стержня r записать F_1 в виде функции двух переменных: относительного угла $\bar{\varphi}$, изменяющегося от нуля до единицы, и относительной текущей глубины трещины $z = \tilde{b}/r$, изменяющейся от нуля до b/r .

$$F_1(z, \bar{\varphi}) = F_{1A}(z) + 0,511\Delta F_1 \bar{\varphi} - 1,511\Delta F_1 \bar{\varphi}^2, \tag{9}$$

где $\Delta F_1 = F_{1A}(z) - F_{1C}(z)$; F_{1A} , F_{1C} представляются в виде степенных рядов переменной z .

Так, например, для первого варианта изменения фронта трещины при $a/b = 2,5$ найдем

$$\begin{aligned} F_{1A}(z) &= 0,56 - 0,027z - 0,058z^2 + 0,382z^3; \\ F_{1C}(z) &= 4,426z - 20,9z^2 + 45,18z^3 - 43,7z^4 + 15,75z^5; \end{aligned} \tag{10}$$

для второго варианта при $a/r = 1$ –

$$\begin{aligned} F_{1A}(z) &= 0,4505 + 0,4457z - 0,425z^2 + 0,0521z^3; \\ F_{1C}(z) &= 0,8186z + 0,33z^2 + 0,037z^3. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом условия ортогональности собственных форм колебаний потенциальная энергия деформирования стержня по j -й форме в составе остальных форм определяется как по изолированной:

$$\Pi_j = \frac{\pi}{8} Er^4 \left[\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)^2 = \int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 \right] dx. \tag{12}$$

Тогда найдем

$$\chi = 16 \frac{a}{b} r \int_0^{b/r} z \varphi_c(z) \beta_c(z) \int_0^l (F_1(z, \bar{\varphi}))^2 dz d\bar{\varphi} \frac{\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)^2_{x=x_T}}{\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 dx}, \tag{13}$$

где

$$\varphi_c(z) = \arccos \left(\frac{-1}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) z} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) z^2} \right] \right); \tag{14}$$

$$\beta_c(z) = \arccos(1 - z \cos \varphi_c). \quad (15)$$

В качестве примера рассмотрим стержень с трещиной относительной глубины $b/r = 0,4$ и отношением полуосей эллипса $b/a = 0,4$.

После интегрирования в (13) функций от z и $\bar{\varphi}$ с использованием (10), (14), (15) получим

$$\chi = 0,4224r \frac{\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)_{x=x_r}^2}{\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 dx}. \quad (16)$$

Значение $\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)$, как и ранее [1], определяем при деформировании стержня по j -й форме в составе остальных учитываемых форм колебаний по формуле

$$\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2} \right)^2 = \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2} \right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2} \right). \quad (17)$$

Для амплитудных функций прогиба $y_i(x)$ при рассмотрении консольного стержня имеем

$$y_i(x_p, x) = \frac{Pl^3}{EI(k_j l)^4} X_i(x_p) X_i(x) \beta_i \quad (18)$$

в случае возбуждения колебаний сосредоточенной силой $P \sin vt$, приложенной в сечении $x = x_p$, и

$$y_i(x) = \frac{Bmv^2 l^3}{EI(k_j l)^4} X_i(x) \int_0^l X_i(x) dx \beta_i \quad (19)$$

при перемещении заделки ($x = 0$) $B \sin vt$, где

$$\beta_i = \left[\left(\frac{k_i l}{k_j l} \right)^4 - \left(\frac{\nu}{\omega_j} \right)^2 \right]^{-1};$$

$$X_i(x) = (\operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x) - \frac{\operatorname{ch} k_i l + \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l + \sin k_i l} (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x); \quad (20)$$

$k_i l$ – i -й корень частотного уравнения; m – масса единицы длины стержня, EI – изгибная жесткость поперечного сечения.

Для второго варианта изменения фронта трещины ($a/r = \text{const}$), пренебрегая членами второго порядка малости, имеем $\delta \bar{\rho} \approx \frac{\rho}{b(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} db$, и формулы (7) и (13)

принимают следующий вид:

$$\Delta\Pi_{j\tau} = \frac{2a}{E} \int_0^b \int_0^{\varphi_c} K_1^2 \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} dbd\varphi; \quad (21)$$

$$\chi = 16a \int_0^{b/r} \varphi_c(z) \beta_c(z) \int_0^l \frac{(F_1(z, \bar{\varphi}))^2}{1+\operatorname{tg}^2(\varphi_c(z) \bar{\varphi})} dz d\bar{\varphi} \frac{\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)^2_{x=x_\tau}}{\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)^2 dx}, \quad (22)$$

где

$$\varphi_c(z) = \arccos \left(\frac{-z}{\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 - z^2\right)} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 - z^2\right)}{z^2}} \right] \right); \quad (23)$$

$F_1(z, \bar{\varphi})$, $\beta_c(z)$ определяются по зависимостям (9) и (15).

Для рассматриваемого примера $a/r = 1$ и $b/r = 0,4$ после интегрирования в (22) функций от $\bar{\varphi}$ и z с использованием (11), (15), (23) получим

$$\chi = 0,425a \frac{\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)^2_{x=x_\tau}}{\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)^2 dx}. \quad (24)$$

При принятом условии $a = r$ результаты, полученные по (24), практически не отличаются от таковых по (16).

Методика численного решения. Численно задача решается с использованием конечноэлементной (КЭ) модели стержня с полуэллиптической дышащей трещиной (рис. 3), которая позволяет учитывать геометрию объекта исследования и его физико-механические характеристики. Для моделирования КЭ сетки используется линейный восьмиузловой конечный элемент Solid45 и его модификации [8]. Дышащая трещина представлена в виде математического разреза, отслеживание относительных положений контактирующих берегов которой обеспечивается поверхностными четырехузловыми контактными элементами Conta174, позволяющими также исключить их взаимное проникновение и соударение.

Таким образом, рассматриваемая система стержня с трещиной будет нелинейной, поскольку жесткость, в зависимости от контактного взаимодействия берегов трещины, изменяется во времени и определяется решением уравнения статического равновесия:

$$[C] \{\tilde{u}\} = \{\tilde{P}\}, \quad (25)$$

где $\{\tilde{u}\}$ – вектор-столбец узловых перемещений; $[C]$ – матрица жесткости; $\{\tilde{P}\}$ – вектор узловых усилий, которые возникают в процессе контактного взаимодействия поверхностей.

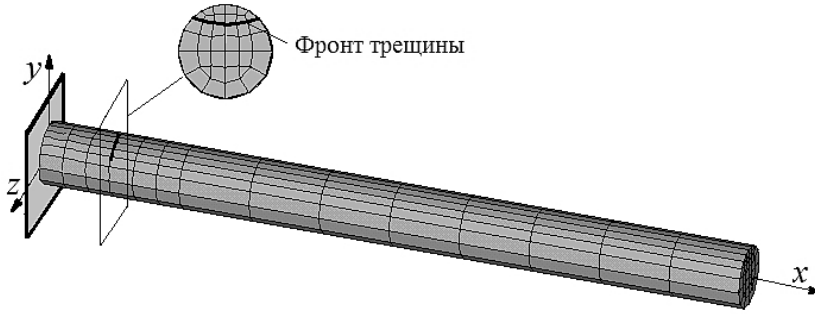


Рис. 3. Конечноэлементная модель стержня с полуэллиптической поверхностной трещиной.

Колебание КЭ модели стержня описывается матричным уравнением

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D]\{\dot{u}\} + [C](u) = \{P(t)\}, \quad (26)$$

где $[M]$, $[D]$ – инерционная и диссипативная матрицы системы; $\{P(t)\}$, $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{\ddot{u}\}$ – вектор-столбцы вынуждающей силы, перемещения, скорости и ускорения соответственно.

Диссипативную матрицу примем в виде

$$[D] = \eta[M], \quad (27)$$

для которой при независимом от амплитуды перемещения декременте δ_j рассматриваемой резонирующей j -й формы колебаний стержня постоянная η определяется по формуле

$$\eta = \delta_j \frac{\omega_j}{\pi}. \quad (28)$$

При выбранном виде матрицы $[D]$ и значении η декремент колебаний по какой-либо иной i -й собственной форме будет

$$\delta_i = \delta_j \frac{\omega_i}{\omega_j}, \quad (29)$$

т.е. при $i > j$ имеем $\delta_i < \delta_j$.

Уравнение (26) решается интегрированием по времени с использованием метода Ньюмарка.

Для обработки полученной зависимости перемещения нейтральной линии в сечении свободного конца стержня от времени используем процедуру быстрого преобразования Фурье (FFT) и в результате определяем гармоники исследуемого колебательного процесса.

Результаты аналитического и численного решений. Решения были проведены для супер- ($\nu/\omega_j = 1/2$) и субгармонического ($\nu/\omega_j = 2$) резонансов первой ($j = 1$) формы изгибных колебаний стержня при соотношениях $a/b = 2,5$, $l/r = 23$ и значениях

$$\lambda_{1l} = \frac{y_l(l)}{\Sigma y_i(l)}, \quad \lambda_{2l} = \frac{\Sigma y_i(l)}{y_l(l)}. \quad (30)$$

Рассмотрим характерные зависимости вносимой трещиной нелинейности колебательной системы при супер- и субгармоническом резонансах от относительной глубины трещины b/r , от ее местоположения x_T и от места приложения x_P вынуждающей силы $P \sin \nu t$.

В качестве примера на рис. 4 показана зависимость параметра нелинейности α , определяемого по (3) с использованием (13), (16) для случая $x_P = l$, от величин b/r при $x_T = 0,1l$ и x_T при $b/r = 0,4$, на рис. 5 – зависимость α от x_P при $b/r = 0,4$, $x_T = 0,1l$. Во всех случаях отмечается существенная зависимость параметра α от значений b/r , x_T и x_P , которая может различаться при супер- и субгармоническом резонансах.

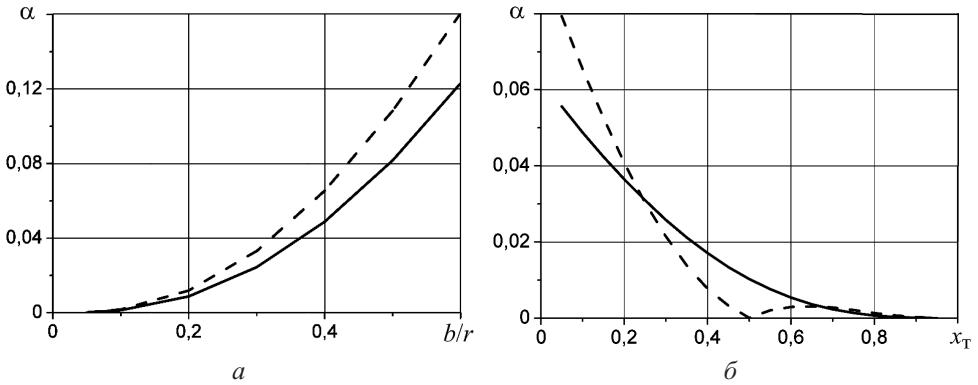


Рис. 4. Зависимость параметра α от относительной глубины трещины b/r , расположенной в сечении $x_T = 0,1l$ (а), и местоположения трещины x_T относительной глубины $b/r = 0,4$ (б) при возбуждении колебаний силой $P \sin \nu t$, приложенной в сечении $x_P = l$, с частотой $\nu = 0,5\omega_1$ (сплошные линии) и $\nu = 2\omega_1$ (штриховые линии).

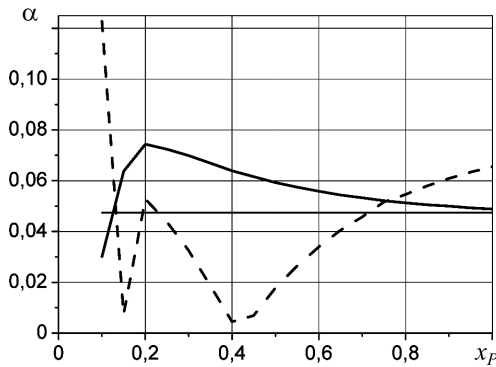


Рис. 5. Зависимость параметра α от места приложения вынуждающей силы P с частотой $\nu = 0,5\omega_1$ (сплошная линия) и $\nu = 2\omega_1$ (штриховая линия) для стержня с трещиной относительной глубины $b/r = 0,4$, расположенной в сечении $x_T = 0,1l$.

По найденным значениям α с использованием формул (1), (2) были определены соответствующие им зависимости вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от относительной глубины трещины b/r при $x_T = 0,1l$ в случае возбуждения супер- и субгармонического резонансов силой, приложенной в сечении $x_P = l$ (рис. 6), а также при кинематическом возбуждении (рис. 7). Зависимости $\bar{A}_{2/1}$, $\bar{A}_{1/2}$ от местоположения трещины x_T относительной глубины $b/r = 0,4$ при силовом и кинематическом возбуждении представлены на рис. 8 и 9.

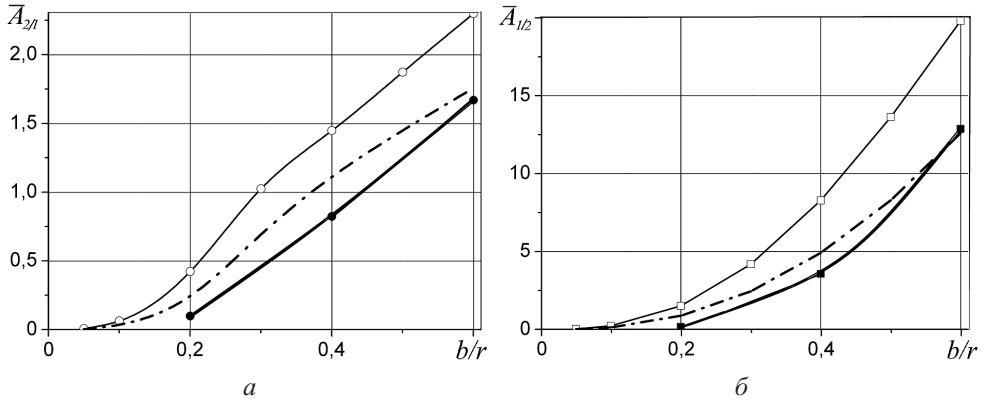


Рис. 6. Зависимость вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от относительной глубины трещины b/r , расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, при возбуждении супер- (а) и субгармонического (б) резонансов сосредоточенной гармонической силой, приложенной в сечении $x_P = l$. (Здесь и на рис. 7–10: светлые точки – данные аналитического решения, темные – численного.)

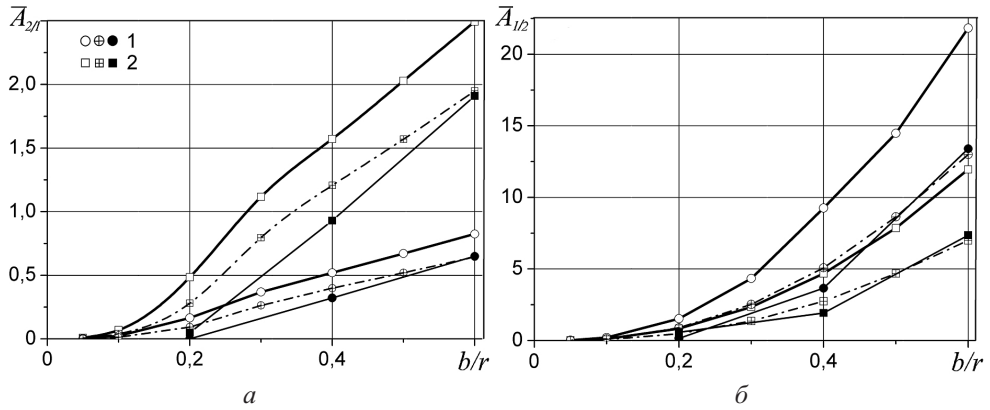


Рис. 7. Зависимость вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от относительной глубины трещины b/r , расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, при кинематическом возбуждении супер- (а) и субгармонического (б) резонансов в случае учета абсолютного (1) и относительного (2) перемещений стержня по гармонике с частотой возбуждения колебаний.

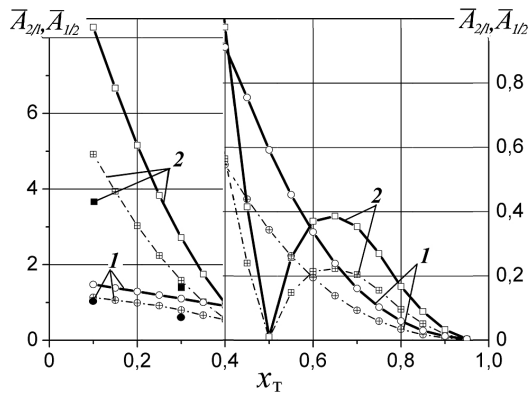


Рис. 8. Зависимость вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от местоположения трещины относительной глубины $b/r = 0,4$ при приложении вынуждающей силы в сечении $x_P = l$ в случае супер- (1) и субгармонического (2) резонансов.

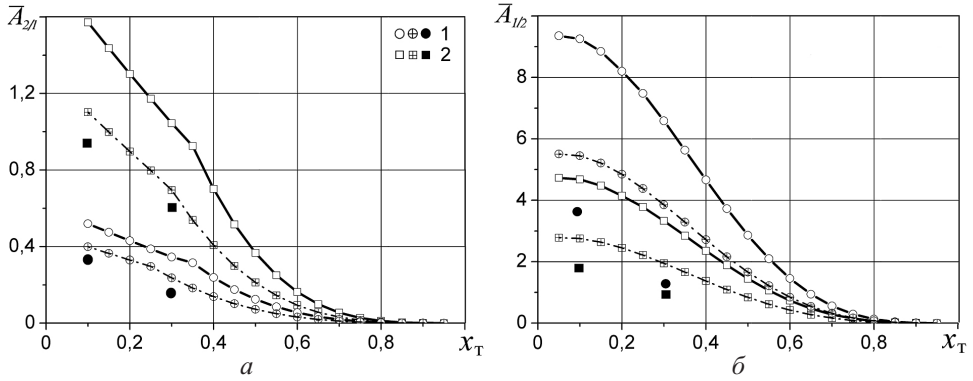


Рис. 9. Зависимость вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от местоположения трещины относительной глубины $b/r = 0,4$ при кинематическом возбуждении супер- (а) и субгармонического (б) резонансов в случае учета абсолютного (1) и относительного (2) перемещения стержня по гармонике с частотой возбуждения колебаний.

На рис. 10 показаны зависимости вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от места приложения x_p вынуждающей силы для такой же трещины, расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, при супер- и субгармоническом резонансах.

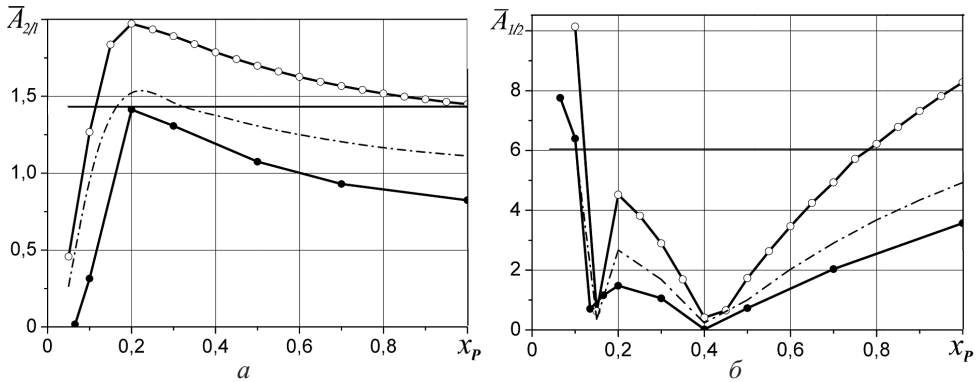


Рис. 10. Зависимость параметров $\bar{A}_{2/1}$ (а) и $\bar{A}_{1/2}$ (б) от места приложения x_p вынуждающей силы $P \sin vt$ для трещины относительной глубины $b/r = 0,4$ в сечении $x_T = 0,1l$.

Следует заметить, что при учете деформирования стержня только по одной резонирующей форме колебаний, т.е. при $\left(\frac{d^2 y_j^*}{dx^2}\right)_{x=x_T} = \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)_{x=x_T}$, значения пара-

метра α и соответственно $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ не зависят ни от места приложения x_p вынуждающей силы, ни от способа возбуждения данной резонирующей формы колебаний. Соответствующие этому условию расчетные значения указанных параметров для случая вынужденных колебаний сосредоточенной силой показаны на рис. 5 и 10 горизонтальными линиями.

Результаты определения $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ при кинематическом возбуждении колебаний представлены для случаев вычисления амплитуд $A_{1\Sigma}$ или $A_{2\Sigma}$ как по относительному перемещению конца стержня ($x_0 = l$) (на рис. 7, 9 точки 2), т.е. перемещению от деформирования стержня при его колебаниях, так и по абсолютному перемещению (точки 1), состоящему из относительного перемещения и перемещения

стержня как жесткого тела вследствие перемещения заделки. Для относительных частот рассматриваемых резонансов вынужденные колебания стержня и его перемещения как жесткого тела практически находятся в одной фазе при супергармоническом и в противофазе при субгармоническом резонансах. Это позволяет, как и в (5), рассматривать амплитудные функции прогибов и легко определить амплитуду абсолютного перемещения.

При субгармоническом резонансе на амплитуду колебаний стержня как упругого тела оказывает влияние также резонирующая вторая гармоника с амплитудой $A_{2p} = \frac{2\alpha}{9\pi} A_1$, которая имеет сдвиг фаз по отношению ко второй на $\pi/2$ и учитывается вторым членом в подкоренном выражении (2) [3]*.

Приведенные на рис. 6–10 результаты свидетельствуют о существенной зависимости вибродиагностических параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ от относительной глубины b/r и местоположения x_T трещины, а также от места приложения x_p вынуждающей силы. При этом, если зависимость указанных параметров от b/r и x_T является в основном монотонной, то от x_p наблюдаются экстремальные точки, количество и местоположение которых существенно зависит от местоположения трещины. Следует также отметить, что характер рассмотренных зависимостей обусловлен в основном параметром нелинейности колебательной системы α (рис. 4, 5).

Результаты численных решений также представлены на рис. 6–10, где соответствующие зависимости для параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ показаны темными точками. Как видно, при практически соответствии характера указанных зависимостей аналитическим решениям значения этих параметров существенно различаются. При принятых моделях этих решений расхождение в данных может быть, как обычно считают, следствием того, что в аналитическом решении не учитывается изменение формы колебаний при открытии трещины, и процесс перехода открытия–закрытия трещины принимается скачкообразным.

Проведенные дополнительно численные решения показывают, что для рассматриваемых малых относительных глубин трещин изменение формы колебаний является несущественным, но контакт узлов разреза по высоте трещины происходит, строго говоря, неодновременно. Это будет учитываться в дальнейших исследованиях.

Было также рассмотрено предположение о возможном различии в значениях коэффициента интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва K_1 , используемых в аналитическом решении по [6, 7] и вычисляемых по раскрытию трещины при численном решении для данной КЭ модели стержня с заданным характером его деформирования. Во втором случае, используя известное выражение для нормальных смещений v контактирующих поверхностей трещины вблизи ее фронта через K_1 [9, 10] и выражая смещение через величину раскрытия трещины Δv , найдем

$$K_1 = \frac{\Delta v E}{1 + \mu} \sqrt{\frac{\pi}{8p}} \left[\sin \frac{\gamma}{2} \left(2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (31)$$

где p, γ – координаты контактирующих узлов, ближайших к узлам фронта трещины (рис. 11).

* В работе [3] формула (33) для $\bar{A}_{1/2}$ должна иметь следующий вид:

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{8\alpha(1 + 0,6\alpha)}{3\psi\left(\frac{v}{2}, A_{1Cm}\right)} \left\{ 1 + \frac{1}{9} \left[\frac{(4\alpha(1 + 0,6\alpha))^2}{9\pi\psi\left(\frac{v}{2}, A_{1Cm}\right)} \right]^2 \right\}^{-0,5}.$$

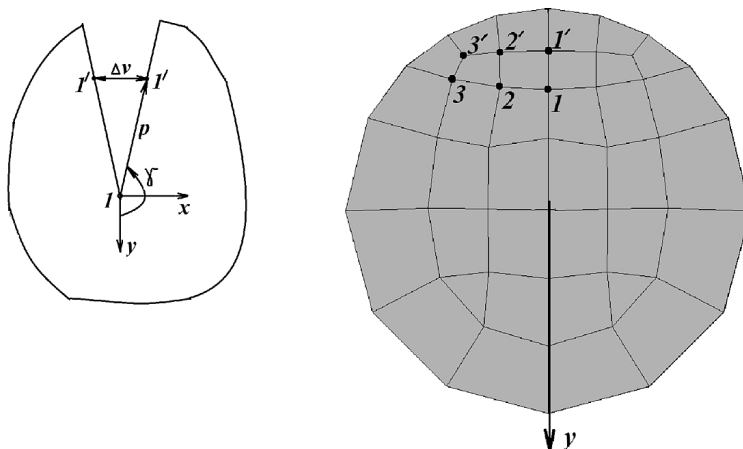


Рис. 11. К определению коэффициентов интенсивности напряжений K_1 по раскрытию трещины Δv .

Значения K_1 по (31) вычисляли по перемещениям узлов $1', 2', 3'$ (рис. 11) при статическом нагружении стержня на свободном конце ($x_p = l$) силой для трещины, расположенной в сечении $x_T = 0, l$.

В таблице приведены значения K_1 , определенные по (8) и (31) при двух значениях силы (100 и 200 Н). Как видно, значения K_1 при численных решениях существенно отличаются от использованных в аналитическом решении по данным [6, 7] для случая чистого изгиба стержневого элемента. В результате вычислений K_1 с использованием КЭ модели стержня длиной $0,2l$ при расположении трещины в сечении $x_T = 0, l$ и нагружении узлов свободного конца продольными силами с характером распределения по высоте стержня, соответствующим распределению нормальных напряжений при изгибе, получены данные, близкие к таковым в [6, 7], расхождение составляет 5,8%.

Результаты расчетов КИН по формулам (8) и (31)

№ узла на рис. 11	КИН	P, Н	
		100	200
1	2	3	4
1	K_1	$\frac{2,58}{2,0}$	$\frac{5,16}{4,01}$
	ΔK_1	$\frac{-}{-22}$	$\frac{-}{-22,2}$
2	K_1	$\frac{2,59}{1,933}$	$\frac{5,18}{3,867}$
	ΔK_1	$\frac{-}{-25,6}$	$\frac{-}{-25,3}$
3	K_1	$\frac{2,33}{1,78}$	$\frac{4,66}{3,564}$
	ΔK_1	$\frac{-}{-23,6}$	$\frac{-}{-23,5}$

1	2	3	4
Среднее значение	K_1	$\frac{2,5}{1,904}$	$\frac{5,0}{3,81}$
	ΔK_1	$\frac{-}{-23,7}$	$\frac{-}{-23,66}$

Примечание: 1 – K_1 , МПа · м^{1/2}; 2 – $\Delta K_1 = (K_{1(31)} - K_{1(8)})/K_{1(8)}$ (%); 3 – над чертой приведены данные, полученные по (8), под чертой – по (31).

Среднеарифметическое значение K_1 , полученное по исследуемой КЭ модели стержня, составляет примерно 76% такового по данным [6, 7]. Если чисто формально принять, что в (8) значения безразмерного коэффициента интенсивности напряжений F_1 на 24% меньше использованных, то соответствие между результатами аналитического и численного решений по определению параметров $\bar{A}_{2/1}$ и $\bar{A}_{1/2}$ даже при таком формальном уточнении значительно улучшается. На рис. 6–10 уточненные данные показаны штрихпунктирными линиями.

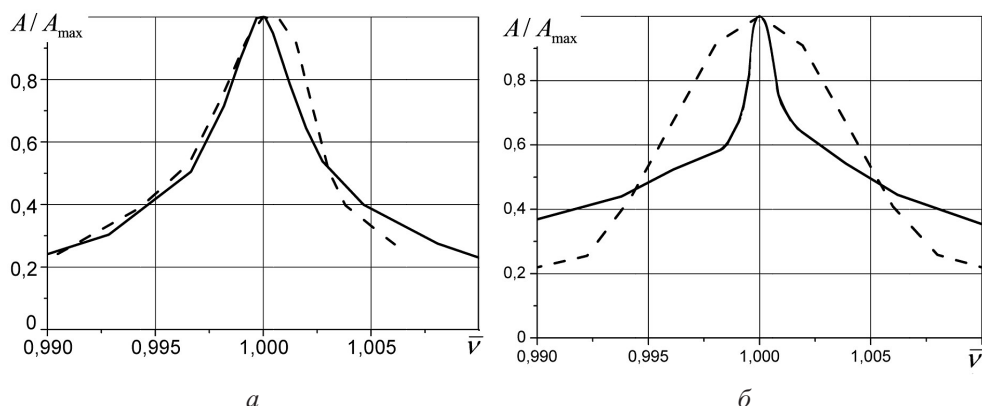


Рис. 12. Амплитудно-частотные характеристики стержня при слабом (а) и сильном (б) супергармоническом резонансах ($\bar{\nu} = 2\nu/\omega_1$). (Штриховые линии – АЧХ при основном резонансе ($\bar{\nu} = \nu/\omega_1$)).

При численном решении была подтверждена выявленная ранее [11] на примере системы с одной степенью свободы характерная особенность в формировании амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) при сильном супергармоническом резонансе. Так, если при слабом резонансе (рис. 12,а), как и при любом субгармоническом резонансе, АЧХ в относительных значениях амплитуды колебаний A/A_{\max} практически соответствует основному резонансу, то при сильном суперрезонансе (рис. 12,б) резонансный пик фиксируется более узким, что усложняет его нахождение.

Выводы

1. Рассмотрены приближенные методы определения вибродиагностических параметров наличия в стержне круглого поперечного сечения полуэллиптической трещины нормального отрыва при супер- и субгармоническом резонансах: аналити-

ческое решение, основанное на данных расчета вынужденных поперечных колебаний неповрежденного стержня, и численное решение с использованием КЭ модели стержня.

2. Результаты проведенных расчетов для случая резонанса первой формы изгибных колебаний показали существенную зависимость значений вибродиагностических параметров от местоположения и относительной глубины трещины, вида и особенностей возбуждения колебаний. В частности, при возбуждении колебаний сосредоточенной силой величины вибрационных параметров зависят от места приложения силы x_p по длине стержня и характеризуются наличием экстремальных точек, количество и местоположение которых определяется местоположением трещины.

3. Установлено удовлетворительное согласование между данными аналитического и численных решений при объяснимой корректировке значений коэффициентов интенсивности напряжений, использованных в аналитическом решении.

4. Выявлена особенность формирования амплитудно-частотной характеристики при сильном супергармоническом резонансе, которая отличается от таковой при других резонансах, что усложняет его нахождение.

Резюме

Розглянуто методи і результати наближеного аналітичного і чисельного розрахунку вібродіагностичних параметрів наявності поверхневої напівеліптичної тріщини, що закривається, в консольному стрижні круглого поперечного перерізу при супер- та субгармонічному резонансах нижчої власної форми згинних коливань при силовому і кінематичному збудженні. Представлено залежності діагностичних параметрів від місця положення і відносної глибини тріщини, а також від місця прикладання змушувальної сили. Відмічено, що амплітудно-частотна характеристика при сильному суперрезонансі відрізняється від характеристики при слабкому і субгармонічному резонансах. Визначено причини розбіжності між результатами аналітичного і чисельного рішення, отриманого з використанням скінченноелементної моделі стрижня.

1. Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е., Синенко Е. А. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2014. – № 3. – С. 21–37.
2. Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П. Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // Там же. – 2010. – № 5. – С. 62–83.
3. Матвеев В. В., Богинич О. Е. Влияние неупругого сопротивления на колебания упругого тела с закрывающейся трещиной при основном и субгармоническом резонансах // Там же. – 2014. – № 1. – С. 5–24.
4. Матвеев В. В., Богинич О. Е. Влияние неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Там же. – 2014. – № 4. – С. 21–35.
5. Матвеев В. В., Богинич О. Е. Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // Там же. – 2004. – № 6. – С. 5–16.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 448 с.

7. *Nisitani H. and Chen D.-H.* Stress intensity factor for a semi-elliptic surface crack in a shaft under tension // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* – 1984. – **50**, No. 453. – P. 1077–1082.
8. *Басов К. А.* ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК “Пресс”, 2005. – 640 с.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
10. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
11. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Синенко Е. А., Яковлев А. П.* К вибродиагностике наличия закрывающейся трещины в балке с амплитудно-зависимой демпфирующей способностью при супергармоническом резонансе // *Пробл. прочности.* – 2015. – № 5. – С. 5–14.

Поступила 22. 07. 2015