

Особенности решения задач теории упругости в зонах идеального контакта твердых тел

В. А. Ромащенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Аналитически исследованы особенности решения задач теории упругости в окрестности нормального (под прямым углом) пересечения поверхности идеального контакта двух упругих сред со свободной, а также неподвижно либо скользяще закрепленной поверхностью. Установлены необходимые и достаточные условия существования таких особенностей, а также основные закономерности влияния упругих характеристик контактирующих тел на их порядок.

Ключевые слова: теория упругости, плоская задача, идеальный контакт, сингулярность, особенность, клин.

Практически во всех областях современной техники широко используются составные и (или) многослойные конструктивные элементы, изготовленные из материалов с различными физико-механическими характеристиками. Технология изготовления таких элементов (сварка, склеивание, предварительный натяг, нанесение покрытия и пр.) зачастую обеспечивает тот или иной контакт между слоями. Во многих практически важных случаях в качестве первого приближения контакт можно рассматривать как идеальный, для которого выполняются следующие условия:

на контактной поверхности слои не смещаются относительно друг друга;

нормальные к поверхности контакта и касательные вдоль нее напряжения при переходе с одного слоя на другой изменяются непрерывно, без скачков.

При выходе поверхности контакта на свободную (либо тем или иным образом закрепленную) поверхность конструктивного элемента образуется линия, в окрестности которой решения задач теории упругости могут иметь особенности [1–14]. Как установлено в [1], эти особенности необходимо изучать на простейших моделях с расчетной областью в виде клина, рассматривая при этом двухмерную плоскую задачу теории упругости при плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$). В [1, 15] показано, что в случае осесимметричной деформации особенность решения будет такая же, как и при плоской деформации. Обобщенная плоская деформация ($\varepsilon_z = \text{const} \neq 0$, начальный распор) никак не влияет на характер особенности решения. При несложных выкладках видно, что в этом случае к сингулярному решению будет добавляться элементарная постоянная в пределах каждого слоя составляющая от распора, не имеющая никаких сингулярностей и удовлетворяющая и уравнениям равновесия, и краевым условиям на свободной поверхности, и условиям сопряжения на контактной поверхности.

Таким образом, согласно [1–15] и вышеизложенному изучение особенности в малой ε -окрестности критической точки выхода поверхности контакта на свободную сводится к исследованию решений плоской задачи теории упругости при плоской деформации в этой окрестности. То же касается и случаев выхода поверхности контакта на неподвижно либо скользяще закрепленную. Все исследования базируются на методике, приведенной в [1].

Далее ограничимся как наиболее распространенным случаем нормального (под прямым углом) выхода контакта на поверхность (рис. 1). О возможном появлении сингулярных решений в этой зоне указывалось в [1, 2, 6, 10–14, 16]. Цель работы заключается в исследовании соотношений упругих характеристик контактирующих

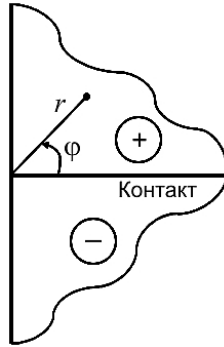


Рис. 1. Расчетная схема объекта исследования.

слоев, при которых появляется сингулярность, и определении ее порядка для первой, второй и третьей основных плоских задач теории упругости.

Исследуем плоскую задачу теории упругости для псевдоклина с углом раствора π , состоящего из двух идеально контактирующих изотропных клиньев каждый с углом раствора $\pi/2$ с различными упругими константами: коэффициентами Пуассона ν_{\pm} и модулями сдвига μ_{\pm} , где “минус” соответствует “нижнему” клину ($\varphi \in [-\pi/2; 0]$), а “плюс” – “верхнему” ($\varphi \in [0; \pi/2]$) (рис. 1). Точку выхода контакта на поверхность принимаем за начало координат и вводим полярную систему (r, φ) – рис. 1. Тогда уравнения Ламе в этих координатах запишутся так [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{w}{r} \right) - \chi_{\pm} \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{w}{r} \right) + \chi_{\pm} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где w, u – радиальное и окружное перемещения соответственно; $\chi_{\pm} = \frac{1 - 2\nu_{\pm}}{2 - 2\nu_{\pm}}$.

Представляющие интерес напряжения будут:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\varphi}}{2\mu_{\pm}} &= \frac{\nu_{\pm}}{1 - 2\nu_{\pm}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{w}{r} \right) + \frac{w}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi}; \\ \frac{\tau_{r\varphi}}{\mu_{\pm}} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{u}{r}. \end{aligned} \tag{2}$$

В (1) и (2) для краткости изложения нижние индексы “ \pm ” при w и u опущены.

Следуя [1], будем отыскивать решение в виде произведения функций:

$$w_{\pm}(r, \varphi) = r^{\lambda} f_{\pm}(\varphi), \quad u_{\pm}(r, \varphi) = r^{\lambda} g_{\pm}(\varphi). \tag{3}$$

В [1] также установлено, что из получаемого множества решений однородных краевых задач следует исключить те, которые приводят к бесконечной энергии. При этом можно исходить из того соображения, что при сглаживании особенности, т.е. замены нерегулярной части границы гладкой поверхностью либо, как в нашем случае, при стремлении μ_{+} и μ_{-} в критической точке $r = +0$ к какому-то общему пределу, энергия конечна, и поэтому физический смысл имеют лишь те решения, в

которых ограниченность энергии сохраняется. При проведении численной реализации наибольший интерес представляет то слагаемое, которое (после отсечения решений с бесконечной энергией) содержит наиболее сильную особенность для производных и, следовательно, больше всего затрудняет реализацию расчетной схемы. Слагаемые, дифференцируемые один раз и более, практически не влияют на реализацию, и нет никакой необходимости в их предварительном выявлении [1]. Представляют интерес только $\lambda \in (0, 1)$, а именно: наименьшее из них, при котором сингулярность напряжений и деформаций $(1 - \lambda)$ в ε -окрестности критической точки будет максимальной.

Подставляя (3) в (1), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \chi_{\pm} f_{\pm}'' + (\lambda^2 - 1)f_{\pm} + [\lambda - 1 - \chi_{\pm}(\lambda + 1)]g_{\pm}' &= 0; \\ g_{\pm}'' + \chi_{\pm}(\lambda^2 - 1)g_{\pm} + [\lambda + 1 - \chi_{\pm}(\lambda - 1)]f_{\pm}' &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

решение которой имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f_+(\varphi) = A_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + A_2 \sin(1 + \lambda)\varphi + A_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + A_4 \sin(1 - \lambda)\varphi; \\ g_+(\varphi) = A_2 \cos(1 + \lambda)\varphi - A_1 \sin(1 + \lambda)\varphi + \beta_+ A_4 \cos(1 - \lambda)\varphi - \beta_+ A_3 \sin(1 - \lambda)\varphi; \\ f_-(\varphi) = A_5 \cos(1 + \lambda)\varphi + A_6 \sin(1 + \lambda)\varphi + A_7 \cos(1 - \lambda)\varphi + A_8 \sin(1 - \lambda)\varphi; \\ g_-(\varphi) = A_6 \cos(1 + \lambda)\varphi - A_5 \sin(1 + \lambda)\varphi + \beta_- A_8 \cos(1 - \lambda)\varphi - \beta_- A_7 \sin(1 - \lambda)\varphi, \end{cases} \tag{5}$$

где $\beta_{\pm} = (3 - 4\nu_{\pm} + \lambda)/(3 - 4\nu_{\pm} - \lambda)$.

Подставив (5) в (3), получим выражения для перемещений, для напряжений они запишутся так:

для верхнего ($\varphi \in [0; \pi/2]$) слоя:

$$\begin{aligned} -\frac{[\sigma_{\varphi}(\varphi)]_+ r^{1-\lambda}}{\mu_+} &= 2\lambda A_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + 2\lambda A_2 \sin(1 + \lambda)\varphi + (1 + \lambda)(1 - \beta_+)A_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + \\ &+ (1 + \lambda)(1 - \beta_+)A_4 \sin(1 - \lambda)\varphi; \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} -\frac{[\tau_{r\varphi}(\varphi)]_+ r^{1-\lambda}}{\mu_+} &= 2\lambda A_1 \sin(1 + \lambda)\varphi - 2\lambda A_2 \cos(1 + \lambda)\varphi + (1 - \lambda)(1 - \beta_+)A_3 \sin(1 - \lambda)\varphi - \\ &- (1 - \lambda)(1 - \beta_+)A_4 \cos(1 - \lambda)\varphi, \end{aligned} \tag{6b}$$

для нижнего ($\varphi \in [-\pi/2; 0]$) слоя:

$$\begin{aligned} -\frac{[\sigma_{\varphi}(\varphi)]_- r^{1-\lambda}}{\mu_-} &= 2\lambda A_5 \cos(1 + \lambda)\varphi + 2\lambda A_6 \sin(1 + \lambda)\varphi + (1 + \lambda)(1 - \beta_-)A_7 \cos(1 - \lambda)\varphi + \\ &+ (1 + \lambda)(1 - \beta_-)A_8 \sin(1 - \lambda)\varphi; \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} -\frac{[\tau_{r\varphi}(\varphi)]_- r^{1-\lambda}}{\mu_-} &= 2\lambda A_5 \sin(1 + \lambda)\varphi - 2\lambda A_6 \cos(1 + \lambda)\varphi + (1 - \lambda)(1 - \beta_-)A_7 \sin(1 - \lambda)\varphi - \\ &- (1 - \lambda)(1 - \beta_-)A_8 \cos(1 - \lambda)\varphi. \end{aligned} \tag{7b}$$

Рассмотрим согласно [1] вначале вторую основную задачу, когда поверхность $\varphi = \pm \pi/2$ псевдоклина свободна от нагрузок. Для этого выражения (6) при $\varphi = \pi/2$ и (7) при $\varphi = -\pi/2$ приравниваем к нулю, в результате чего имеем четыре однородных уравнения с восемью неизвестными. Добавляя к ним еще четыре условия сопряжения решений на границе контакта $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} f_+(0) &= f_-(0); & g_+(0) &= g_-(0); \\ [\sigma_\varphi(0)]_+ &= [\sigma_\varphi(0)]_-; & [\tau_{r\varphi}(0)]_+ &= [\tau_{r\varphi}(0)]_-, \end{aligned} \quad (8)$$

получаем однородную систему восьми линейных уравнений с восемью неизвестными:

$$[M]\{A_1; A_2; \dots; A_7; A_8\} = 0, \quad (9)$$

где ненулевые компоненты матрицы $[M]$ размерности (8×8) таковы:

$$\left\{ \begin{aligned} m_{11} &= 2\lambda \sin \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{12} &= -2\lambda \cos \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{13} &= (1+\lambda)(\beta_+ - 1) \sin \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{14} &= (1+\lambda)(\beta_+ - 1) \cos \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{21} &= -m_{12}; & m_{22} &= m_{11}; & m_{23} &= (1-\lambda)(1-\beta_+) \cos \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{24} &= (1-\lambda)(\beta_+ - 1) \sin \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{35} &= m_{22}; & m_{36} &= m_{21}; & m_{37} &= (1+\lambda)(\beta_- - 1) \sin \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{38} &= (1+\lambda)(1-\beta_-) \cos \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{45} &= m_{36}; & m_{46} &= -m_{35}; & m_{47} &= (1-\lambda)(1-\beta_-) \cos \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{48} &= (1-\lambda)(1-\beta_-) \sin \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{51} &= 1; & m_{53} &= 1; & m_{55} &= -1; & m_{57} &= -1; \\ m_{62} &= 1; & m_{64} &= \beta_+; & m_{66} &= -1; & m_{68} &= -\beta_-; \\ m_{71} &= 2\lambda; & m_{73} &= (1+\lambda)(1-\beta_+); & m_{75} &= -2\lambda K; \\ m_{77} &= K(1+\lambda)(\beta_- - 1); \\ m_{82} &= 2\lambda; & m_{84} &= (1-\lambda)(1-\beta_+); & m_{86} &= -2\lambda K; \\ m_{88} &= K(1-\lambda)(\beta_- - 1) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$(K = \mu_- / \mu_+)$.

Представляет интерес случай, когда однородная система (9) имеет нетривиальное решение, т.е. $\det[M] = 0$ при $\lambda \in (0; 1)$. Опуская из-за громоздкости подробности доказательств, можно строго установить, что

$$\det[M] = F(v_+; v_-; \lambda)D(v_+; v_-; K; \lambda). \quad (11)$$

Здесь F как функция от λ непрерывна и $F \neq 0$ при $\lambda \in (0; 1)$;

$$D(\nu_+; \nu_-; K; \lambda) = C + 2B \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} - A \sin^4 \frac{\pi\lambda}{2}, \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} C = C(\lambda) = \lambda^4 \delta^2 - 4\lambda^2 R^2; \\ B = B(\lambda) = 2(2 - 2\nu_- - R)^2 + \lambda^2 \delta(2R - \delta); \\ A = 16K(1 - \nu_-)(1 - \nu_+) + \delta(4R - \delta); \\ \delta = 1 - K; \\ R = \delta - \nu_- + K\nu_+, \end{cases} \quad (13)$$

т.е. наличие или отсутствие сингулярности будет целиком и полностью определяться наличием либо отсутствием корня $\lambda \in (0; 1)$ трансцендентного уравнения:

$$D(\nu_+; \nu_-; K; \lambda) = 0, \quad (14)$$

при этом в случае наличия корня сингулярность будет иметь порядок $(1 - \lambda)$.

Из (12) и (13) легко установить, что

$$D(\nu_+; \nu_-; K; \lambda) \equiv K^2 D(\nu_-; \nu_+; 1/K; \lambda). \quad (15)$$

Поэтому далее без ограничения общности полагаем

$$K \in [0; 1]. \quad (16)$$

Формула (15) полностью соответствует физическим соображениям: от перестановки слоев порядок сингулярности изменяться не должен (рис. 1).

Из (12)–(16) легко получить предельные случаи:

$K = 1 \Rightarrow$ слои имеют одинаковые модули сдвига. Тогда (12) трансформируется так:

$$D(\nu_+; \nu_-; 1; \lambda) = 4(1 - \nu_+)(1 - \nu_-) \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} - \lambda^2 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 4 \sin^4 \frac{\pi\lambda}{2} \right], \quad (17)$$

где $\alpha = \sqrt{(1 - \nu_-)/(1 - \nu_+)}$.

Как будет показано ниже, это уравнение не имеет корней $\lambda \in (0; 1)$. Если кроме $K = 1$ выполнено и $\nu_- = \nu_+ = \nu$, приходим к тривиальному случаю свободной поверхности: классический вырожденный клин с углом раствора π , в формуле (17) имеем $\alpha = 1 \Rightarrow D(\nu; \nu; 1; \lambda) = 4(1 - \nu)^2 \sin^2 \pi\lambda$. Таким образом приходим к решению [1] для вырожденного клина: никаких корней и соответственно сингулярностей при $\lambda \in (0; 1)$ нет, поскольку $D = 0$ либо при $\lambda = 0$, либо при $\lambda = 1$ – ни то, ни другое не лежит внутри открытого интервала $(0; 1)$;

$K = 0 \Rightarrow$ верхний слой абсолютно жесткий ($\mu_+ = \infty$), что для нижнего слоя ($\varphi \in [-\pi/2; 0]$) соответствует неподвижно закрепленной поверхности контакта $\varphi = 0$ и свободной поверхности $\varphi = -\pi/2$. Нетрудно показать, что уравнение (14) в этом случае принимает вид

$$\left(\sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} - \lambda^2 \right) \left[4(1 - \nu_-)^2 - \lambda^2 - (3 - 4\nu_-) \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} \right] = 0, \quad (18)$$

где первый множитель соответствует решению [1] для жесткого (верхнего, $\varphi \in [0; \pi/2)$) слоя, для которого нижнего слоя практически не существует ($K = 0$). Поэтому на обеих поверхностях (и $\varphi = 0$, и $\varphi = \pi/2$) для верхнего клина выполняются условия на свободной от напряжений поверхности и получается классическое решение [1] для клина с углом раствора $\pi/2$ в случае второй основной задачи. В открытом интервале $(0; 1)$ это уравнение корней не имеет (соответственно сингулярности тоже не будет).

Второй множитель в (18) соответствует мягкому (нижнему, $\varphi \in [-\pi/2; 0]$) клину. Поскольку для него верхний клин абсолютно жесткий, на контактной границе ($\varphi = 0$) для нижнего слоя должно выполняться кинематическое условие неподвижного закрепления $w = u = 0$, а на свободной ($\varphi = -\pi/2$) – силовое условие отсутствия напряжений. В результате имеем решение для клина с углом раствора $\pi/2$ с одной свободной и другой неподвижно закрепленной поверхностями. Следует отметить, что в [1] приведено неправильное решение для этого случая.

Не приводя подробностей доказательств, строго аналитически можно установить такие свойства определителя (12):

1. $D(v_+; v_-; K; 0) = \left. \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0; \left. \frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} > 0 \Rightarrow D(v_+; v_-; K; +0) > 0;$
2. $D(v_+; v_-; K; 1/2) > 0;$
3. $D(v_+; v_-; K; 1) = 0;$
4. $\left. \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 8R(\delta - R) \Rightarrow$
- 4а. $\left. \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} < 0$ при $R \notin [0; \delta] \Rightarrow$ (учитывая п. 3) $\Rightarrow D(v_+; v_-; K; 1-0) > 0;$
- 4б. $\left. \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} > 0$ при $R \in (0; \delta) \Rightarrow$ (учитывая п. 3) $\Rightarrow D(v_+; v_-; K; 1-0) < 0;$
- 4в. $\left. \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 0$ при $R = 0$ или $R = \delta$, но при этом еще выполняется условие $\left. \frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} > 0 \Rightarrow$ (учитывая п. 3) $\Rightarrow D(v_+; v_-; K; 1-0) > 0.$

Из пп. 2 и 4а–4в сразу следует достаточное условие существования корня $\lambda \in (1/2; 1)$ уравнения (14):

$$v_- \in (Kv_+; 1 - K + Kv_+). \quad (19)$$

Дальнейшие более детальные аналитические и численные исследования показали, что (19) также является необходимым условием существования особенности.

Таким образом, чтобы уравнение (14) имело решение $\lambda \in (0; 1)$, необходимо и достаточно выполнения условия (19). При этом $\lambda \in (1/2; 1)$; его минимальное значение $\lambda_{\min} \approx 0,5946$ (показатель сингулярности $(1 - \lambda)_{\max} \approx 0,4054$ максимален) достигается при $K = 0$, $v_- = 1/2$, v_+ может быть каким угодно.

При $K = 1$ сингулярности не будет: отсутствует открытый интервал $(v_+; v_+)$ в (19).

В случае $K = 0$ сингулярность будет всегда при $v_- > 0$, и она не зависит от v_+ . При $v_- = 0$ сингулярность отсутствует (рис. 2), при $v_- = 1/2$ она максимальна: $(1 - \lambda)_{\max} \approx 0,4054$.

О порядке сингулярности при промежуточных $K \in (0; 1)$ и различных $v_{\pm} \in [0; 1/2]$ можно судить исходя из данных, приведенных на рис. 2. Как видно, с

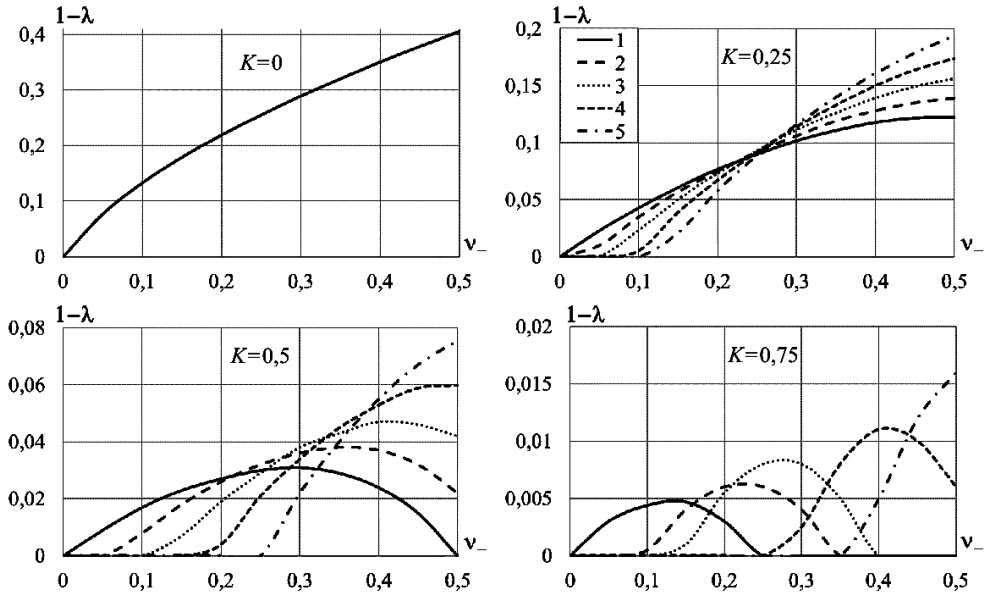


Рис. 2. Особенности в зоне выхода контакта на свободную поверхность: 1, 2, 3, 4, 5 – $v_+ = 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5$ соответственно.

увеличением значения K (приближением его к единице) сингулярность уменьшается и при $K = 1$ исчезает. При фиксированном v_+ зависимость сингулярности от v_- может иметь как монотонный, так и немонотонный (с явно выраженным экстремумом) характер. При $v_- = 0$ сингулярности не будет никогда. При $v_- \in [0; 1/2]$ область ее существования как функции v_- может быть различной: совпадать с полуоткрытым интервалом $[0; 1/2]$; составлять односвязную полуоткрытую либо открытую его часть, или, вообще, отсутствовать.

Согласно классификации, принятой в работе [1], рассмотрим первую основную задачу, когда поверхность $\varphi = \pm \pi/2$ псевдоклина неподвижно закреплена. Для этого приравняем к нулю выражения (3) при $\varphi = \pm \pi/2$, в результате чего имеем четыре однородных уравнения с восемью неизвестными. Добавляя к ним еще четыре условия сопряжения решений на границе контакта $\varphi = 0$ (8), получаем, как и выше, однородную систему восьми линейных уравнений с восемью неизвестными типа (9), где половина ненулевых компонент матрицы $[M]$ размерности (8×8) будет отличаться от (10):

$$\begin{cases} m_{11} = \sin \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{12} = -\cos \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{13} = -m_{11}; & m_{14} = m_{12}; \\ m_{21} = m_{12}; & m_{22} = m_{13}; & m_{23} = -\beta_+ \cos \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{24} = \beta_+ \sin \frac{\pi\lambda}{2}; \\ m_{35} = -m_{11}; & m_{36} = m_{12}; & m_{37} = m_{11}; & m_{38} = m_{36}; \\ m_{45} = -m_{36}; & m_{46} = m_{35}; & m_{47} = \beta_- \cos \frac{\pi\lambda}{2}; & m_{48} = \beta_- \sin \frac{\pi\lambda}{2}; \end{cases} \quad (20)$$

остальные m_{ij} такие же, как и в (10).

Утверждения (11), (12), (14)–(16) остаются в силе, но коэффициенты A , B и C в (12) будут уже другими:

$$\begin{cases} C = C(\lambda) = 4\lambda^4 \delta^2 - \lambda^2 \omega^2; \\ B = B(\lambda) = 2\lambda^2 \delta (N_+ + KN_+^2 - KN_- - N_-^2) + \Omega^2 / 2; \\ A = 4N_+ N_- (1 + KN_+) (K + N_-); \\ \omega = 1 + N_+ - K - KN_-; \\ \Omega = N_+ N_- (1 + K) + N_- + KN_+; \\ \delta = 1 - K; N_{\pm} = 3 - 4\nu_{\pm}. \end{cases} \quad (21)$$

Предельные случаи:

$K = 1 \Rightarrow$ слои имеют одинаковые модули сдвига. Тогда (12) с учетом (21) преобразуется так:

$$\begin{aligned} D(\nu_+; \nu_-; 1; \lambda) &= (N_+ + N_- + 2N_+ N_-)^2 \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} - \\ &- 4N_+ N_- (1 + N_+) (1 + N_-) \sin^4 \frac{\pi\lambda}{2} - \lambda^2 (N_+ - N_-)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

и уравнение (14), как показал дальнейший анализ, не имеет действительных корней $\lambda \in (0; 1)$. Если кроме $K = 1$ выполняется также $N_+ = N_- = N$, имеем классическое решение [1] для закрепленного вырожденного клина с углом раствора π , а именно: $\sin^2 \pi\lambda = 0$, не имеющее корней $\lambda \in (0; 1)$;

$K = 0 \Rightarrow$ верхний слой абсолютно жесткий ($\mu_+ = \infty$), что для нижнего мягкого слоя ($\varphi \in [-\pi/2; 0]$) соответствует неподвижному закреплению и на поверхности контакта $\varphi = 0$ и на поверхности $\varphi = -\pi/2$. Нетрудно показать, что в этом случае уравнение (14) с учетом (21) аналогично уравнению (18) для второй основной задачи и принимает вид

$$\left(N_-^2 \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} - \lambda^2 \right) \left[4(1 - \nu_+)^2 - \lambda^2 - (3 - 4\nu_+) \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} \right] = 0. \quad (23)$$

Первый множитель в (23) соответствует мягкому ($\varphi \in [-\pi/2; 0]$) слою и не имеет корней $\lambda \in (0; 1)$, второй – жесткому ($\varphi \in [0; \pi/2]$) слою и всегда имеет корень $\lambda \in (0; 1)$, если только $\nu_+ \neq 0$, при этом минимальный корень $\lambda = 0,5946$ (максимальная сингулярность 0,4054), как и во второй основной задаче, достигается при $\nu_+ = 0,5$. Порядок сингулярности не зависит от ν_- , а зависит только от ν_+ и имеет такой же вид, как на рис. 2 (при $K = 0$, где абсциссу следует рассматривать как ось ν_+ , а не ν_-). Отметим, что в [1] приведены неверные решения как для мягкого неподвижно закрепленного по обеим границам, так и для жесткого с одной закрепленной и второй свободной границами клиньев (каждый с углом раствора $\pi/2$).

Таким образом при $K = 0$ система (9) распадается на две независимые, поэтому сингулярность будет только в мягком слое во второй основной задаче и соответственно только в жестком слое в первой основной задаче теории упругости. При $K > 0$ система (9) становится связанной, и сингулярность, если такова существует, будет наблюдаться в обоих слоях (клиньях).

Как и выше, можно установить такие свойства определителя (12) с учетом (21):

$$D(\nu_+; \nu_-; K; 0) = \frac{\partial D}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} > 0 \Rightarrow D(\nu_+; \nu_-; K; +0) > 0;$$

$$D(\nu_+; \nu_-; K; 1/2) > 0;$$

при $\lambda = 1$ определитель (12) в зависимости от первых трех аргументов может принимать как положительные, так и отрицательные значения либо равняться нулю.

Отсюда следует достаточное условие существования сингулярности:

$$D(v_+; v_-; K; 1) < 0 \Rightarrow 4\delta^2 - \omega^2 + 4\delta(N_+ + KN_+^2 - KN_- - N_-^2) + \Omega^2 - A < 0, \quad (24)$$

которое, к сожалению, не является одновременно и необходимым (сравним с выше-рассмотренной второй основной задачей).

Сингулярность в случае первой основной задачи может быть и при $D(v_+; v_-; K; 1) \geq 0$. На рис. 3 приведен график $D(\lambda)$ для таких значений упругих характеристик: $K = 0,02$; $v_- = 0,5$; $v_+ = 0,3$. Видно, что несмотря на то что $D(1) \approx 0,176 > 0$, решение будет иметь сингулярность порядка около $1/4$. Поэтому для каждого конкретного случая ответ на вопрос существования сингулярности может дать только численное решение трансцендентного уравнения (14) с учетом (12) и (21), при этом определится и ее порядок.

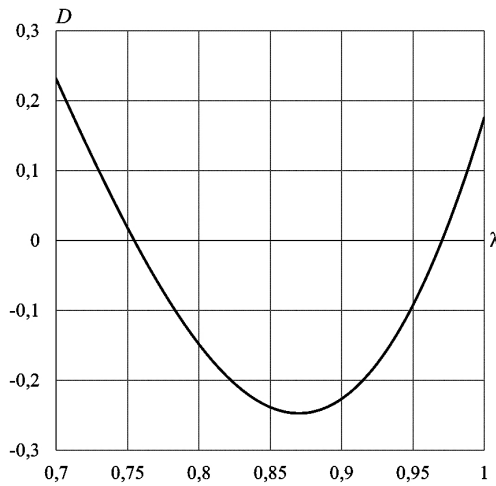


Рис. 3. Зависимость $D(\lambda)$ в первой основной задаче при $K = 0,02$; $v_- = 0,5$; $v_+ = 0,3$.

В первой основной задаче сингулярность всегда будет отсутствовать при $v_+ = 0$, а также при $K = 1$. При промежуточных $K \in (0; 1)$ представление о характере сингулярности дают данные, приведенные на рис. 4, а при $K = 0$ – на рис. 2 с вышеуказанным замечанием. В отличие от второй основной задачи, характер сингулярности как функции v_+ при фиксированных K и v_- всегда монотонный (сравним рис. 2 с рис. 4). Максимальная сингулярность ($\approx 0,4054$) реализуется при $K = 0, v_+ = 0,5$. При $K > 0$ порядок сингулярности зависит от v_- , при $K = 0$ – зависимость отсутствует. С ростом K порядок сингулярности уменьшается, и при $K = 1$ исчезает совсем.

Трансцендентное уравнение (14) аналитического решения, естественно, не имеет, за исключением нескольких простейших малоинтересных случаев. Оно решалось численно с достаточно малым шагом изменения λ , а именно: $h_\lambda = 10^{-6}$. Начиная с $\lambda = 0,5$ последовательно с шагом h_λ , вычисляли значения функции (12). Как только функция меняла знак либо точно обращалась в ноль линейной интерполяцией вычисляли искомый корень. Поэтому все вышепредставленные результаты можно считать практически точными: с погрешностью менее $h_\lambda = 10^{-6}$.

Рассмотрим вкратце третью основную задачу [1], когда на границе $\varphi = \pm \pi/2$ выполняются краевые условия смешанного типа: $u = \tau_{r\varphi} = 0$ (скользящее закрепле-

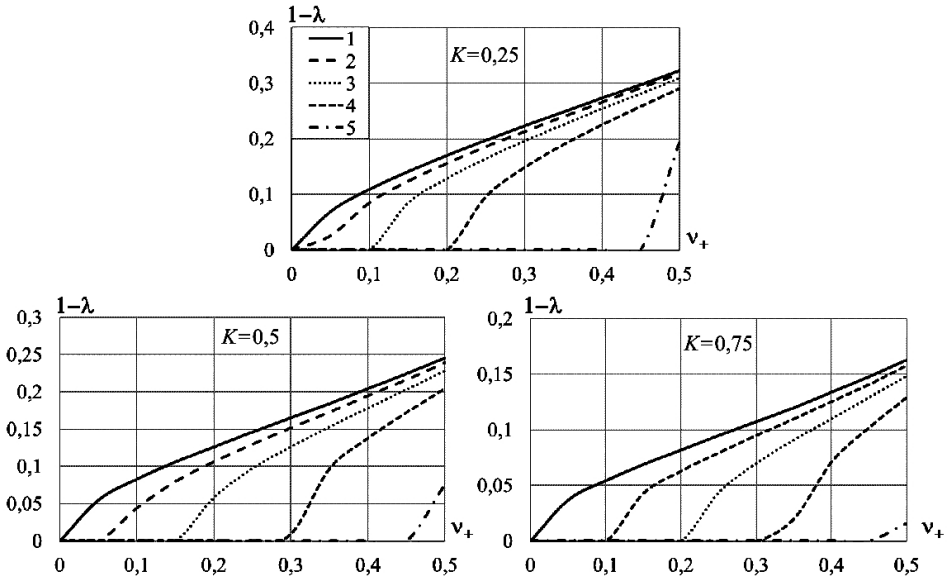


Рис. 4. Особенности в зоне выхода контакта на неподвижную границу: 1, 2, 3, 4, 5 – $v_- = 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5$ соответственно.

ние). Легко показать, что, используя (2) в случае нормального (под прямым углом) выхода поверхности контакта на скользяще закрепленную, эти условия отождествляются с условиями симметрии: $u = \partial w / \partial \varphi = 0$, т.е. зеркальному продолжению расчетной области влево (рис. 1) – в диапазон $\varphi \in [\pi/2; 3\pi/2]$. Поверхность контакта при этом также абсолютно гладко (без излома) продлится влево. Естественно, никаких особенностей такая задача в принципе иметь не может.

В заключение заметим, что (14) кроме действительных может иметь, вообще говоря, комплексные корни [1, 17]:

$$\lambda = \lambda_1 \pm i \lambda_2; \quad \lambda_1 \in (0; 1); \quad \lambda_2 > 0, \quad (25)$$

при наличии которых особенность решения в ε -окрестности критической точки помимо сингулярного будет иметь и осциллирующий характер. А именно: в решении могут появляться осциллирующие функции вида

$$r^{\lambda_1} \begin{cases} \cos(\lambda_2 \ln r); \\ \sin(\lambda_2 \ln r), \end{cases} \quad (26)$$

при дифференцировании которых будем иметь осциллирующую особенность.

Таким образом задача об исследовании сингулярностей типа (3) в зоне идеального контакта в случае расчетной схемы, приведенной на рис. 1 для первой, второй и третьей основных плоских задач теории упругости, решена полностью. Исследование осциллирующих особенностей типа (25), (26) представляет собой отдельную и достаточно сложную проблему [1, 17], и в данной работе не рассматривается.

Резюме

Аналітично досліджено особливості розв'язку задач теорії пружності в околі нормального (під прямим кутом) перетину поверхні ідеального контакту двох пружних середовищ із вільною та нерухомо або ковзною закріпленою поверхнею. Установлено

необхідні і достатні умови існування таких особливостей та основні закономірності впливу пружних характеристик контактуючих тіл на їх порядок.

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
2. *Аветисян А. Г., Чобанян К. С.* Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела в условиях плоской задачи теории упругости // Изв. АН Арм.ССР. Механика. – 1972. – **25**, № 6. – С. 13–25.
3. *Dolgov N. A. and Soroka E. B.* Stress singularity in a substrate-coating system // Strength Mater. – 2004. – **36**, No. 6. – P. 636–642.
4. *Денисюк І. Т.* Пружна рівновага тіла з негладким включенням. – Луцьк: Вид. Луцьк. техн. ун-ту, 2004. – 220 с.
5. *Фриштер Л. Ю.* Расчетно-экспериментальный метод исследования НДС составных конструкций в зонах концентрации напряжений // Строит. механика инж. конструкций и сооружений. – 2008. – № 2. – С. 20–27.
6. *Sinclair G. B.* Stress singularities in classical elasticity. – I: Removal, interpretation and analysis // Appl. Mech. Rev. – 2004. – **57**, No. 4. – P. 251–297.
7. *Матвеевко В. П., Накарякова Т. О., Севодина Н. В., Шардаков И. Н.* Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 3. – С. 477–484.
8. *He D., Sawa T., and Karami A.* Stress analysis and strength evaluation of scarf adhesive joints with dissimilar adherends subjected to static tensile loadings // Int. J. Adhes. Adhesiv. – 2009. – **3**, No. 8. – P. 1033–1044.
9. *Sjostrom S. and Brodin H.* Influence of TBC and geometry on the TMF life of an APS TBC // Proc. Eng. – 2010. – **2**, No. 1. – P. 1363–1371.
10. *Кулагина М. Ф., Иванов Э. Г.* Решение третьей основной задачи теории упругости для составного клина в случае гладкого контакта // Вест. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 307–317.
11. *Sator C. and Becker W.* Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions // Arch. Appl. Mech. – 2012. – **82**, No. 5. – P. 643–658.
12. *Пестренин В. М., Пестренина И. В., Ландик Л. В.* Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вест. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. – 2013. – № 4 (24). – С. 78–87.
13. *Cheng C., Niu Z., and Recho N.* Analysis of the stress singularity for a bi-material V-notch by the boundary element method // Appl. Math. Model. – 2013. – **37**, No. 22. – P. 9398–9408.
14. *Arabi H., Mirsayar M. M., Samaei A. T., and Darandeh M.* Study of characteristic equation of the elastic stress field near bimaterial notches // Strength Mater. – 2013. – **45**, No. 5. – P. 598–606.
15. *Zak A. R.* Stresses in the vicinity of boundary discontinuities in bodies of revolution // J. Appl. Mech. Ser. E. – 1964. – **31**, No. 1. – P. 150–152.
16. *Лепихин П. П., Ромащенко В. А.* Прочность неоднородных анизотропных полых цилиндров при импульсном нагружении. – Киев: Наук. думка, 2014. – 232 с.
17. *Karp S. N. and Karal F. C. J.* The elastic field behavior in the neighborhood of a crack of arbitrary angle // Commun. Pure Appl. Math. – 1962. – **15**, No. 4. – P. 413–421.

Поступила 22. 04. 2015