

Розрахунок напружено-деформованого стану складних технічних об'єктів за допомогою методів теорії потенціалу

С. А. Левчук¹, А. А. Хмельницький

Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

¹ kpmf.mf@znu.edu.ua

Моделюється напружено-деформований стан складної технічної конструкції – діафрагми вулканізатора. Пакет робочих пластин моделюється у вигляді круглої пластини дискретно-змінної в радіальному напрямку товщини. Запропоновано алгоритм розв'язку контактної задачі, що виникає. Для досягнення практичної вірогідності отриманих розрахункових результатів їх порівнювали з експериментальними.

Ключові слова: складене тіло, теорія потенціалу, напружено-деформований стан, матриця типу Гріна, контактна задача.

У деяких технічних конструкціях для передачі обтиснення на вулканізований об'єкт використовується пристрій, що складається з двох круглих тонких пластин, жорстко з'єднаних між собою по обмежуючих їх контурах, у порожнину між якими подається газ під значним тиском. Для зниження напружень, які виникають у круглих пластинах, можуть використовуватися підресорні кільцеві пластини. Якщо за пристрій, що передає навантаження, використати круглу плиту, то отримаємо конструкцію, яку далі будемо називати діафрагмою вулканізатора (рис. 1). Тобто однією з основних робочих частин є тонкостінна конструкція, яка складається з круглих пластин, підресорюваних двома кільцевими (рис. 1).

Таким чином, у ролі фізичної моделі треба було б розглядати задачу про контактування жорстко з'єднаних по зовнішньому контуру трьох пластин відповідної форми (рис. 2).

При строгому розв'язанні такої задачі необхідно спочатку визначити зони контакту, а потім розв'язувати задачу про сумісне деформування цих пластин з урахуванням їх взаємодії. У даній роботі пропонується наступний алгоритм розрахунку досліджуваної задачі в рамках теорії тонких пластин. Якщо припустити відсутність відставань та ковзань граничних поверхонь пластин у пакеті (рис. 2), то при моделюванні пакета пластин його можна замінити однією пластиною сумарної товщини. У результаті отримаємо модель у вигляді круглої пластини дискретно-змінної у радіальному напрямку товщини (рис. 3).

Щоб підтвердити адекватність використання цього припущення, виконували розрахунок за схемою, наведеною на рис. 3, і експеримент (рис. 2). При цьому за товщини секцій, які з'єднуються (рис. 3), було прийнято сумарні товщини контактуючих пластин (рис. 2). Проте питання про вірогідність такої спрощеної моделі і для таких значень її параметрів вимагає проведення додаткового дослідження. Попереднє розв'язання даної задачі проводилося раніше [1–6].

У [5] було показано, що напружено-деформований стан круглої пластини дискретно-змінної товщини (рис. 3) за статичного деформування може бути розрахований наступним методом (при цьому отримаємо точний розв'язок задачі).

Розв'язок базується на побудові матриць типу Гріна для даної задачі. Розглянемо круглу пластину дискретно-змінної товщини, радіальний переріз якої показано на рис. 3. З огляду на осьову симетрію розв'язок досить отримати тільки вздовж радіуса пластини. Останню можна розглядати як об'єкт, складений з круглої пластини радіуса

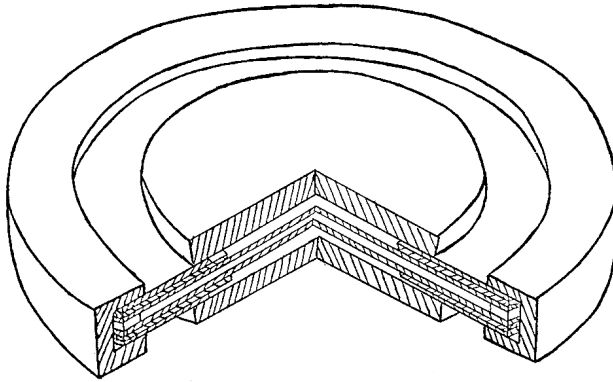


Рис. 1. Діафрагма вулканізатора.



Рис. 2. Осьовий переріз пакета робочих пластин (верхня половина).

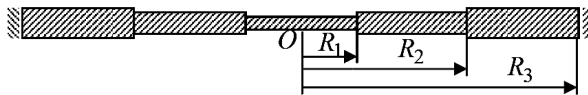


Рис. 3. Осьовий переріз розрахункової моделі (верхня половина).

R_1 і двох кільцевих пластин, для яких $R_1 \leq r \leq R_2$ та $R_2 \leq r \leq R_3$ відповідно. Круглу пластину та кільця, які утворюють даний складений об'єкт, будемо називати секціями складеної пластини.

Розрахункова схема для такої моделі може бути визначена таким чином. Вісесиметричний нормальний прогин $W = W(r)$ повинен задовольняти рівняння [7]

$$\Delta \Delta W = F, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$; F – права частина рівняння, що враховує поверхневе нормальне навантаження та фізичні характеристики об'єкта.

Фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння можуть бути системи функцій [7]:

для круглої пластини ($0 \leq r \leq R_1$):

$$W^{(1)} = 1, \quad W^{(2)} = r^2;$$

для кілець ($R_i \leq r \leq R_{i+1}$, $i = 1, 2$):

$$W^{(1)} = 1, \quad W^{(2)} = \ln(r), \quad W^{(3)} = r^2, \quad W^{(4)} = r^2 \ln(r).$$

Таким чином, загальні розв'язки рівняння (1) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} W_1(r) &= C_1(r) + C_2(r)r^2; \\ W_k(r) &= C_j(r) + C_{j+1}(r)\ln(r) + C_{j+2}(r)r^2 + C_{j+3}(r)r^2 \ln(r), \end{aligned} \quad (2)$$

де $W_1(r)$ – нормальний прогин круглої пластини радіуса R_1 ; $W_k(r)$ – нормальний прогин k -ї кільцевої секції пластини; $k=2, 3$, індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k=2$ відповідає $j=3$.

Якщо далі розв’язок здійснювати методом варіації довільних сталих, то, визначивши C_j і підставивши їх вирази у (2), отримаємо залежності з точністю до сталих інтегрування [5]:

$$W_1(r) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 r^2 + \int_0^r F_1(\xi) \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\} d\xi;$$

$$W_k(r) = \bar{C}_j + \bar{C}_{j+1} \ln(r) + \bar{C}_{j+2} r^2 + \bar{C}_{j+3} r^2 \ln(r) +$$

$$+ \int_0^r F_k(\xi) \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\} d\xi. \quad (3)$$

Для визначення сталих \bar{C}_j ($j=1, 2, \dots, 10$) у формулах (3) слід скористатися крайовими умовами, наприклад умовами жорсткого затиснення країв складеної пластини:

$$W_3|_{r=R_3} = 0, \quad \frac{dW_3}{dr} \Big|_{r=R_3} = 0 \quad (4)$$

та умовами з’єднання елементів складеного об’єкта (формулюються з фізичних міркувань):

$$W_i|_{r=R_i} = W_{i+1}|_{r=R_i}; \quad \frac{dW_i}{dr} \Big|_{r=R_i} = \frac{dW_{i+1}}{dr} \Big|_{r=R_i};$$

$$M_i|_{r=R_i} = M_{i+1}|_{r=R_i}; \quad Q_i|_{r=R_i} = Q_{i+1}|_{r=R_i}, \quad (5)$$

де $i=1, 2$; M_i і Q_i – згинальний момент та поперечна сила відповідно (нижніми індексами тут і далі позначено номери секцій у складеному тілі), для яких мають місце формули [7]:

$$M(r) = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left\{ \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dW}{dr} \right\}; \quad Q(r) = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{d}{dr} \Delta W \quad (6)$$

(h_i – товщина секції; σ_i – коефіцієнт Пуассона; E_i – модуль Юнга).

Підставимо (3), (6) в (4), (5) і отримаємо систему десяти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих \bar{C}_j із матрицею коефіцієнтів при невідомих $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{10}$. Розв’яжемо дану систему і підставимо знайдені вирази для \bar{C}_j ($j=1, 2, \dots, 10$) у (3), в результаті чого одержимо остаточний розв’язок задачі (1):

$$W_k(r) = \sum_{l=1}^3 \int_0^{R_l} G_l(r, \xi) \bar{F}_l(\xi) d\xi, \quad (7)$$

де $W_k(r)$ – нормальний прогин k -ї секції складеної пластини; $G_l(r, \xi)$ – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі; $\bar{F}_l(\xi) = (F_l(\xi) F_{l+1}(\xi))^T$;

$$\bar{F}_3(\xi) = F_3(\xi); \quad G_l(r, \xi) = (G_{l1}(r, \xi) G_{l2}(r, \xi)); \quad l=1, 2; \quad k=1, 2, 3.$$

Позначимо через $\bar{A} = \{\bar{a}_{ij}\}_{i,j=1}^{10}$ матрицю, обернену до матриці $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{10}$, та введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 t_{l1}^j(\xi) &= -\bar{a}_{ji} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_l^2) \ln \frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2 \right\} - \bar{a}_{ji+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_l \ln \frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l \right\} + \\
 &+ \bar{a}_{ji+2} D_l \frac{\xi}{4} \left\{ 2(1 + \sigma_l) \ln \frac{R_l}{\xi} + (\sigma_l - 1) \frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_l \right\} + \bar{a}_{ji+3} D_l \frac{\xi}{R_l}; \\
 t_{l2}^j(\xi) &= \bar{a}_{ji} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_l^2) \ln \frac{R_l}{\xi} + \xi^2 - R_l^2 \right\} + \bar{a}_{ji+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_l \ln \frac{R_l}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_l} - R_l \right\} - \\
 &- \bar{a}_{ji+2} D_{l+1} \frac{\xi}{4} \left\{ 2(1 + \sigma_{l+1}) \ln \frac{R_l}{\xi} + (\sigma_{l+1} - 1) \frac{\xi^2}{R_l^2} + 1 - \sigma_{l+1} \right\} - \bar{a}_{ji+3} D_{l+1} \frac{\xi}{R_l}; \\
 t_3^j(\xi) &= -\bar{a}_{j9} \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + R_3^2) \ln \frac{R_3}{\xi} + \xi^2 - R_3^2 \right\} - \bar{a}_{j10} \frac{\xi}{4} \left\{ 2R_3 \ln \frac{R_3}{\xi} + \frac{\xi^2}{R_3} - R_3 \right\},
 \end{aligned}$$

де $j = 1, 2, \dots, 10$; $l = 1, 2$, а індекс i збільшується на чотири одиниці при збільшенні l на одну одиницю, причому $l = 1$ відповідає $j = 1$.

Тоді компоненти побудованих матриць типу Гріна $G_l(r, \xi)$, через які подано точний розв'язок задачі, набудуть вигляду (більш докладно див. у [5]):

при $k = 1$:

$$G_{l1}(r, \xi) = \begin{cases} t_{l1}^1(\xi) + t_{l1}^2(\xi)r^2 & \text{при } l \neq 1; \\ t_{l1}^1(\xi) + t_{l1}^2(\xi)r^2 + I_1(r, \xi) & \text{при } l = 1; \\ I_1(r, \xi) = 0 & \text{при } \xi > r; \end{cases}$$

$$G_{l2}(r, \xi) = t_{l2}^1(\xi) + t_{l2}^2(\xi)r^2;$$

при $k \neq 1$:

$$G_{l1}(r, \xi) = \begin{cases} t_{l1}^j(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi)r^2 \ln(r) & \text{при } l \neq k; \\ t_{l1}^j(\xi) + t_{l1}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l1}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l1}^{j+3}(\xi)r^2 \ln(r) + I_l(r, \xi) & \text{при } l = k; \\ I_l(r, \xi) = 0 & \text{при } \xi > r; \end{cases}$$

$$G_{l2}(r, \xi) = t_{l2}^j(\xi) + t_{l2}^{j+1}(\xi) \ln(r) + t_{l2}^{j+2}(\xi)r^2 + t_{l2}^{j+3}(\xi)r^2 \ln(r);$$

$$G_3(r, \xi) = \begin{cases} t_3^7(\xi) + t_3^8(\xi) \ln(r) + t_3^9(\xi)r^2 + t_3^{10}(\xi)r^2 \ln(r) & \text{при } l \neq k; \\ t_3^7(\xi) + t_3^8(\xi) \ln(r) + t_3^9(\xi)r^2 + t_3^{10}(\xi)r^2 \ln(r) + I_3(r, \xi) & \text{при } l = k; \\ I_3(r, \xi) = 0 & \text{при } \xi > r, \end{cases}$$

де $l = 1, 2$; $k = 2, 3$, а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k = 2$ відповідає $j = 3$;

$$I_k(r, \xi) = \frac{\xi}{4} \left\{ (\xi^2 + r^2) \ln \frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2 \right\}.$$

Для визначення контакту пакету пластин із круглою товстою плитою у вулканізованій діафрагмі необхідно наступне. Припустимо, що кругла пластина разом із підресорними кільцевими пластинами під дією внутрішнього навантаження інтенсивністю p_1 вигнулася (рис. 4), і відбувся контакт із круглою товстою плитою (враховуючи осьову симетрію, будемо розглядати лише половину досліджуваної конструкції).

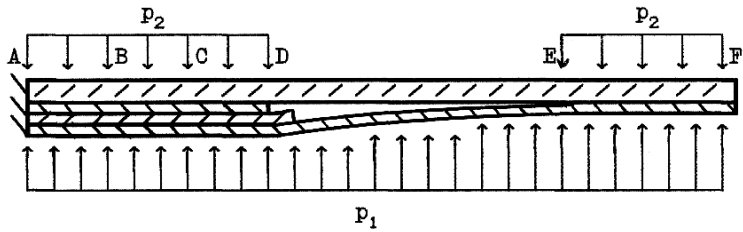


Рис. 4. Діафрагма вулканізатора у здеформованому стані (верхня половина).

При цьому з достатньою долею вірогідності будуть виконуватися наступні умови.

Зонами контакту будуть: AD , шириною, що дорівнює ширині меншого кільця, і EF , яка надалі буде коректуватися експериментально.

Нормальний прогин зони EF буде дорівнювати сумарній товщині першого та другого кілець (можливість застосування теорії тонких пластин для розрахунку їх статичного деформування за таких великих прогинів досліджується нижче).

Нормальний прогин зони AD буде дорівнювати нулю.

Пропонується наступна розрахункова схема:

зону AD розіб'ємо на три рівні зони точками B і C (для підвищення точності апроксимації можна взяти більшу кількість точок);

обчислимо нормальний прогин $W^{(1)}$ за умови, що внутрішній тиск повітря відсутній $p_1 = 0$, а “контактний” тиск інтенсивністю $p_2 = \text{const} \neq 0$ (зокрема, можна покласти $p_2 = 1$) існує тільки в зоні EF . Для визначення $W^{(1)}$ і нижченаведених нормальних прогинів використовувалося співвідношення (7). Ширина зони EF визначалася з умови найкращого збігу розрахункових і експериментальних даних, що буде показано нижче;

обчислимо нормальні прогини $W^{(2)}, W^{(3)}, W^{(4)}$ при $p_1 = 0$ і контактному тиску інтенсивністю $p_2 = 1$, який діє по черзі у зонах AB, BC і CD відповідно;

обчислимо нормальний прогин $W^{(0)}$ при реально діючому внутрішньому навантаженні інтенсивністю $p_1 = \text{const} \neq 0$ і $p_2 = 0$;

сформуємо наступну систему з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha W^{(1)}(r_i) + \beta W^{(2)}(r_i) + \gamma W^{(3)}(r_i) + \delta W^{(4)}(r_i) + W^{(0)}(r_i) = b_i,$$

де $i = F, B, C, D$; $b_i = 0$ при $i = B, C, D$, $b_i = h_1 + h_2$ при $i = F$ (h_1, h_2 – товщини кілець); r_i – значення координати r у відповідних точках, якщо за початок координат вибрано точку A (рис. 4);

розв'язуємо дану систему і визначаємо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$;

нормальний прогин у довільній точці r досліджуваної конструкції будемо обчислювати за формулою

$$W(r) = \alpha W^{(1)}(r) + \beta W^{(2)}(r) + \gamma W^{(3)}(r) + \delta W^{(4)}(r) + W^{(0)}(r).$$

Визначивши $W(r)$, можна знайти інші характеристики напруженого стану конструкції, що досліджується, за формулами (6).

Аналіз вищенаведеної розрахункової схеми показує, що нормальний прогин однієї з тонких пластин дорівнює двом її товщинам, хоча, згідно з теорією тонких пластин, він не може перевищувати чверті товщини. Тому виникає питання щодо практичної вірогідності запропонованої розрахункової схеми. Для дослідження цього питання було використано спеціально отримані експериментальні дані [1, 4]. На рис. 5 наведено, зокрема, експериментальні результати (точки), які визначають залежність так званої “плями контакту” (зони EF) від величини навантаження (r_{\max} – максимальне значення розрахункової плями контакту). Товщини секцій використовувалися як коректуючі параметри (таблиця).

Оцінка величини середньоквадратичного відхилення $\bar{\delta}$ розрахункових даних від експериментальних

№ варіанта	$72h_1/r_{\max}$	$72h_2/r_{\max}$	$72h_3/r_{\max}$	$(72\bar{\delta}/r_{\max})^2$
1	1,6	3,2	4,8	73
2	1,5	3,2	4,8	169
3	1,6	3,3	4,8	75
4	1,6	3,2	4,7	74

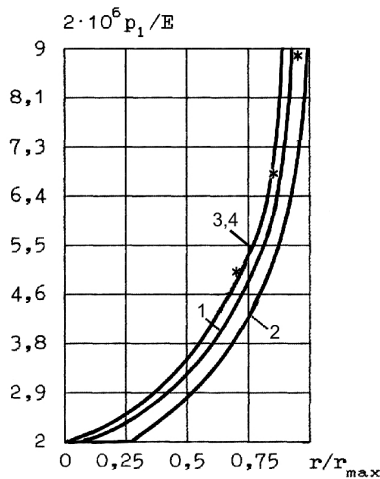


Рис. 5. Залежність зони контакту від величини зовнішнього навантаження (1–4 – моделювання контактуючих елементів за допомогою круглої пластини змінної товщини – рис. 3).

Оцінка величини середньоквадратичного відхилення $\bar{\delta}$ розрахункових даних від експериментальних показує, що його найменше значення відповідає варіанту № 1 (таблиця), який, в свою чергу, відповідає випадку, коли товщини секцій дорівнюють відповідним сумах товщин контактуючих елементів. Таким чином, можна зробити висновок, що при розглянутих навантаженнях відставань або ковзань між пластинами-шарами не відбувається, а також що застосування диференціальних рівнянь теорії тонких пластин у вищевикладеній розрахунковій схемі (при розглянутих навантаженнях на конструкцію) виправдано.

Резюме

Моделируется напряженно-деформированное состояние сложной технической конструкции – диафрагмы вулканизатора. Пакет рабочих пластин моделируется в виде круглой пластины дискретно-переменной в радиальном направлении толщины. Предложен алгоритм решения контактной задачи, которая возникает. Для достижения практической достоверности полученных расчетных результатов их сравнивали с экспериментальными.

1. *Гавеля С. П., Головки Д. Б., Кульбаиный П. Ф., Левчук С. А.* Использование экспериментальных возможностей при расчете контактирования упругих пластин. – Запорожье, 1992. – 7 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.08.92, № 1285-Ук92.
2. *Гавеля С. П., Головки Д. Б., Кульбаиный П. Ф., Левчук С. А.* Исследование подрессоривания вулканизационной диафрагмы // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. “Методы потенциала и конечных элементов в автоматизированных исследованиях инженерных конструкций”. – Киев, 1991. – С. 21.
3. *Гавеля С. П., Головки Д. Б., Кульбаиный П. Ф., Левчук С. А.* Экспериментальная корректировка расчета сложного напряженно-деформированного состояния составных тонкостенных конструкций // Тез. докл. IV симп. “Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии”. – Киев, 1992. – С. 19.
4. *Гавеля С. П., Кульбаиный П. Ф., Левчук С. А.* Экспериментальная корректировка расчета подрессоренной кольцевой пластины. – Запорожье, 1992. – 6 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.10.92, № 1668-Ук92.
5. *Левчук С. А.* Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Запоріжжя, 2002. – 25 с.
6. *Левчук С. А.* Моделювання напружено-деформованого стану складних технічних об'єктів за допомогою методів теорії потенціалу // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2005. – № 2. – С. 87–91.
7. *Биргер И. А., Пановко Я. Г.* Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.

Поступила 24. 02. 2015