

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178.5:620.179

## К вибродиагностике наличия закрывающейся краевой трещины в балке с амплитудно-зависимой демпфирующей способностью при супергармоническом резонансе

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич, Е. А. Синенко, А. П. Яковлев

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Представлены результаты приближенного расчета влияния характера амплитудно-зависимой демпфирующей способности колебательной системы на вибродиагностические параметры наличия краевой закрывающейся трещины нормального отрыва в консольной балке прямоугольного поперечного сечения при разных способах возбуждения супергармонического резонанса 2-го порядка низшей собственной формы изгибных колебаний.*

**Ключевые слова:** балка, закрывающаяся трещина, нелинейные колебания, супергармонический резонанс, вибродиагностика усталостного повреждения.

**Введение.** Ранее [1, 2] отмечалось, что установление взаимосвязи между параметрами колебаний балочных конструкций и их повреждением типа закрывающейся трещины усталости при супер- и субгармоническом резонансах продолжает привлекать внимание исследователей. Однако известные как аналитические, так и численные решения ограничиваются рассмотрением колебаний упругой системы при учете линейного вязкого трения. В [2] были представлены результаты аналитического определения вибродиагностических параметров наличия краевой закрывающейся трещины нормального отрыва в балках прямоугольного поперечного сечения при возбуждении субгармонического резонанса с учетом амплитудно-зависимого демпфирования колебаний.

В данном исследовании в развитие работ [2, 3] на примере консольной балки такого же сечения и с такой же трещиной (рис. 1) рассматриваются результаты расчета влияния указанного демпфирования на вибродиагностические параметры наличия трещины при супергармоническом резонансе 2-го порядка какой-либо  $j$ -й изгибной формы колебаний, т.е. при частоте возбуждения  $\nu$ , равной половине собственной частоты  $j$ -й формы колебаний поврежденной балки  $\omega_{0j}$ .

**Виды неупругого сопротивления.** Рассмотрим характерные виды неупругого сопротивления как функции амплитуды  $A_j$  перемещения (прогиба) свободного конца балки при ее деформировании по  $j$ -й резонирующей форме изгибных колебаний (таблица).

В таблице указаны соответствующие приведенным видам сопротивления выражения для логарифмического декремента колебаний балки  $\delta_n(\omega_{0j}, A_j)$ , которые удобно представить единой зависимостью

$$\delta_n = k_n A_j^{n-1}, \quad (1)$$

**Виды неупругого сопротивления**

Вид неупругого сопротивления	Декремент колебаний
Вязкое, пропорциональное $n$ -й степени скорости	$4h_n\omega_{0j}^{n-2}A_j^{n-1}\phi(n)$
Эллиптическая петля гистерезиса	$k_nA_j^{n-1}$
Петля гистерезиса Давиденкова ( $n > 1$ )	$\frac{2^{n+1}(n-1)\eta}{n(n+1)}A_j^{n-1}$

**Примечание.**  $h_n, k_n, \eta$  – постоянные;  $\phi(n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} \varphi d\varphi$ .

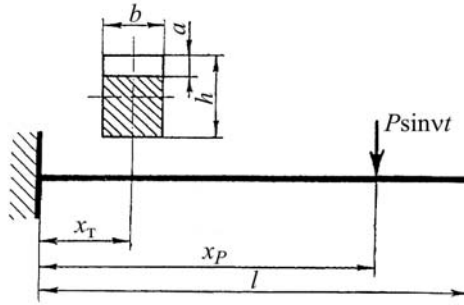


Рис. 1. Схема консольной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной и силовым гармоническим возбуждением ее изгибных колебаний.

при условии

$$k_n = 4h_n\omega_{0j}^{n-2}\phi(n) = \frac{2^{n+1}(n-1)\eta_n}{n(n+1)}. \tag{2}$$

**Методика расчета вибродиагностических параметров повреждения балки.**

Согласно результатам [3] для случая настроенного супергармонического резонанса  $j$ -й формы колебаний балки в качестве основного вибродиагностического параметра наличия в некотором ее сечении  $x = x_T$  закрывающейся трещины можно принять отношение максимальной амплитуды второй (резонирующей) гармоники колебаний  $A_{2j}$  с частотой  $\omega_{0j}$  к амплитуде основных вынужденных колебаний балки с частотой  $(1/2)\omega_{0j}$ , т.е. к амплитуде полной первой гармоники  $A_{1\Sigma}$ :  $\bar{A}_{2/1(j)} = A_{2j}/A_{1\Sigma}$ . Приведенные в [3] формулы для параметра  $\bar{A}_2 = A_2/A_1$ , соответствующие решению дифференциального уравнения колебаний одномассовой системы, можно, выражая амплитуду вынуждающей нагрузки  $q$  через амплитуду первой гармоники  $A_{1j}$  ( $q = \frac{3}{4}\omega_{0j}^2 A_{1j}$ ), представить для системы с распределенными параметрами в следующем виде:

$$\bar{A}_{2/1(j)} = n \sqrt{\frac{0,58\alpha\lambda_j}{k_n A_{1\Sigma}^{n-1}}} \tag{3}$$

для слабого резонанса ( $\bar{A}_2 < 0,9$ ) и

$$\bar{A}_{2/1(j)} = n+1 \sqrt{\frac{0,5256\alpha\lambda_j^2}{k_n A_{1\Sigma}^{n-1}}} \tag{4}$$

для сильного резонанса ( $\bar{A}_2 > 0,9$ ), где  $\lambda_j$  равно отношению амплитуд первой гармоники основных вынужденных колебаний по одной резонирующей  $j$ -й форме ( $A_{1j}$ ) и по конечному числу учитываемых форм ( $A_{1\Sigma}$ ), т.е.  $\lambda_j = A_{1j} / A_{1\Sigma}$ .

При этом формула для слабого резонанса используется при

$$\frac{\alpha}{k_n} < 1,7241 \cdot 0,9062^n A_1^{n-1}. \quad (5)$$

В формулах (3)–(5)  $\alpha$  – параметр, характеризующий исходную, т.е. до проявления резонанса, нелинейность колебательной системы при ее деформировании при основных вынужденных колебаниях по резонирующей  $j$ -й форме в составе остальных форм колебаний [1].

Согласно [1]  $\alpha$  определяется через энергетическую характеристику повреждения балки  $\kappa$  ( $\alpha = \kappa / (1 + \kappa)$ ), которая вычисляется с использованием значений коэффициента интенсивности нормальных напряжений  $K_1$  для трещины, расположенной в заданном сечении  $x = x_\tau$  с данной относительной глубиной  $\gamma = a/h$ , и амплитудных функций линии прогиба неповрежденной балки  $y_i(x) \equiv A_{1i}(x)$  по ограниченному числу  $N$  ее изгибных форм колебаний ( $1 \leq i \leq N$ ) по формуле

$$\kappa = 6\pi h H_1(\gamma) \frac{\left( \frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)_{x=x_\tau} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d^2 y_i}{dx^2} \right)_{x=x_\tau}}{\int_0^l \left( \frac{d^2 y_j}{dx^2} \right)^2 dx}, \quad (6)$$

где

$$H_1(\gamma) = 0,078\theta^2 [(1-\gamma)^{-2} + 0,5(1-\gamma)^4 - 1,5]; \quad (7)$$

$\theta = 1,15 - 60\gamma^2$  при  $0 < \gamma < 0,05$  и  $\theta = 1$  при  $\gamma > 0,05$ .

Для рассматриваемого случая консольной балки амплитудная функция линии прогибов определяется по формулам

$$y_i(x) = \frac{Pl^3}{EI(k_j l)^4} X_i(x_P) X_i(x) \beta_i$$

при возбуждении колебаний сосредоточенной силой  $P \sin vt$ , приложенной в сечении  $x = x_P$ ,

$$y_i(x) = \frac{Ml^3}{EI(k_j l)^4} X_i'(x_M) X_i(x) \beta_i$$

при возбуждении колебаний сосредоточенным моментом  $M \sin vt$ , приложенным в сечении  $x = x_M$ , и

$$y_i(x) = \frac{Bmv^2 l^3}{EI(k_j l)^4} X_i(x) \int_0^l X_i(x) dx \beta_i$$

при возбуждении колебаний перемещением заделки ( $x = 0$ )  $B \sin vt$ , где

$$X_i(x) = (\operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x) - \frac{\operatorname{ch} k_i l + \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l + \sin k_i l} (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x);$$

$$\beta_i = \left[ \left( \frac{k_i l}{k_j l} \right)^4 - \left( \frac{\nu}{\omega_j} \right)^2 \right]^{-1};$$

$\nu = \omega_j / 2$ ;  $k_i l$  –  $i$ -й корень частотного уравнения;  $EI$  – изгибная жесткость сечения балки;  $m$  – масса единицы ее длины;  $\omega_j$  – собственная частота  $j$ -й формы колебаний.

В качестве другого диагностического параметра можно рассматривать отношение амплитуды  $A_{2j}$  к максимальной амплитуде  $A_{0j}$  основной гармоники при основном резонансе ( $\nu = \omega_{0j}$ )  $j$ -й формы колебаний ( $A_{2j}/A_{0j} = \bar{A}_{2/0(j)}$ ), которое определяется по выражениям

$$\bar{A}_{2/0(j)} = \sqrt[n]{0,24616\alpha \frac{Q_c}{Q_0}} \quad (8)$$

при слабом и

$$\bar{A}_{2/0(j)} = \sqrt[n+1]{0,09467\alpha k_n \left( \frac{Q_c}{Q_0} \right)^2 A_{0j}^{n-1}} \quad (9)$$

при сильном суперрезонансе, где  $Q_c$  и  $Q_0$  – амплитуды вынуждающей нагрузки ( $P, M, Bm\nu^2$ ) соответственно при супергармоническом и основном резонансах.

Как видно, при  $n \neq 1$  в случае сильного суперрезонанса значения  $\bar{A}_{2/0(j)}$ , как и параметров  $\bar{A}_{2/1(j)}$  (3), (4), не являются относительными характеристиками, поскольку зависят от абсолютных значений амплитуды  $A_{0j}$  или  $A_{1\Sigma}$ , а следовательно, от уровня вынуждающей нагрузки  $Q_0$  или  $Q_c$  и выбора места регистрации прогиба. Кроме того, в формулы (3), (4), (9) входит коэффициент  $k_n$ , значение которого, как правило, различается для разного показателя степени  $n$  амплитудной зависимости декремента колебаний  $\delta_n$ .

В связи с этим рассмотрим еще параметр  $\bar{A}_{2/1(j)}$  при выборе значения  $k_n$  из условия равенства максимальной амплитуды прогиба в каком-либо сечении  $x^*$  при основном резонансе, для заданных  $j$ -й формы колебаний и амплитуде вынуждающей нагрузки  $Q_0$ , таковой при линейном вязком трении ( $n = 1$ ) с заданной величиной декремента колебаний  $\delta_1 \equiv k_1$ :

$$k_n = \frac{\delta_1^n}{\pi^{n-1} Q_0^{n-1} \Delta_j^{n-1}}, \quad (10)$$

где постоянная  $\Delta_j$  определяется следующими выражениями:

$$\frac{l^3 X_j(x_P) X_j(x^*)}{EI(k_j l)^4}; \quad \frac{l^3 X'_j(x_M) X_j(x^*)}{EI(k_j l)^4} \quad \text{и} \quad \frac{l^3 X_j(x^*) \int_0^l X_j(x) dx}{EI(k_j l)^4} \quad (11)$$

соответственно при возбуждении колебаний сосредоточенной силой, моментом и перемещением защемленного сечения.

В этом случае при таком же способе возбуждения супергармонического резонанса с амплитудой нагрузки  $Q_c$ , при которой  $A_{1\Sigma} = \frac{4}{3} \frac{Q_c}{\lambda_j} \Delta_j$ , из (3) и (4) соответственно найдем

$$\bar{A}_{2/1(j)} = 2,3562 \frac{\lambda_j}{\delta_1} \sqrt[n]{0,24616\alpha \left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^{n-1}} \quad (12)$$

и

$$\bar{A}_{2/1(j)} = 2,3562 \frac{\lambda_j}{\delta_1} \sqrt[n+1]{0,09467\alpha\delta_1 \left(\frac{Q_0}{Q_c}\right)^{n-1}}, \quad (13)$$

значения которых не зависят от абсолютного уровня  $Q_0$  и  $Q_c$ .

**Оценка согласования результатов аналитического и численных решений.**

Прежде чем перейти к анализу влияния параметров амплитудно-зависимого демпфирования, сравним результаты расчета по рассмотренной методике с данными численного решения для случая возбуждения колебаний балки сосредоточенной силой при линейном вязком трении ( $n = 1, k_n = \delta_1$ ), когда вибродиагностические параметры (3), (4) и (8), (9) не зависят ни от абсолютного значения нагрузок  $Q_0$  и  $Q_c$ , ни от их отношения.

Для сравнения были рассмотрены известные данные, полученные с использованием балочной конечноэлементной модели балки при определении изменения жесткости элемента с трещиной при ее открытии через коэффициент интенсивности напряжений [4], и результаты решения, выполненного с помощью программного комплекса ANSYS [5] с использованием линейного восьмиузлового конечного элемента (Solid45) при представлении дышащей трещины в виде математического разреза с соответствующими условиями контактной задачи. Решение получаемой нелинейной системы дифференциальных уравнений осуществляется интегрированием по времени с последующим преобразованием Фурье.

На рис. 2 и 3 для случая первой резонирующей формы колебаний ( $j = 1$ ) представлены построенные путем расчета и по данным численных решений зависимости соответственно параметров  $\bar{A}_{2/1}$  и  $\bar{A}_{2/0}$  от места приложения ( $x_P/l$ ) вынуждающей силы для балки с отношением  $h/l \approx 0,085$  и относительной глубиной трещины  $\gamma = 0,2$ , расположенной в сечениях  $x_T = 0,1l$  и  $0,5l$ , при  $\delta_1 = 0,01$ . Для параметра  $\bar{A}_{2/0}$  отношение амплитуд вынуждающих сил при супер  $P_c$  и основном  $P_0$  резонансах составляет 100. Как видно, имеет место достаточно удовлетворительное согласование результатов.

Следует отметить характерную особенность отличия слабого супергармонического резонанса от сильного. Так, например, результаты численного решения для одномассовой модели, вынужденные колебания которой описываются уравнением

$$\ddot{y} + 2h_1 \dot{y} + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } y)]y = q \sin vt,$$

показывают, что если при слабом суперрезонансе амплитудно-частотная характеристика второй гармоники практически соответствует основному резонансу при равных максимальных амплитудах ( $A_2 = A_0$ ), то при сильном суперрезонансе резонансный пик значительно уже (рис. 4). Это, естественно, усложняет нахождение резонанса.

**Влияние характера амплитудной зависимости декремента колебаний на вибродиагностические параметры.** Как и выше, ограничимся рассмотрением возбуждения первой резонирующей формы колебаний ( $j = 1$ ).

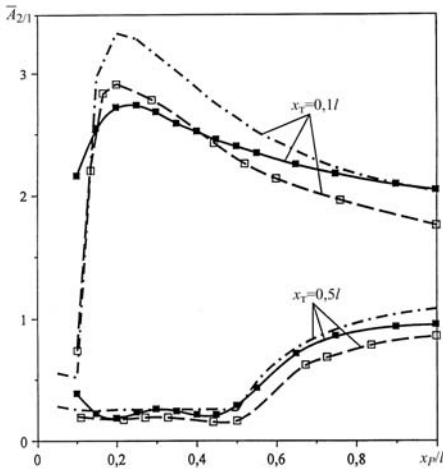


Рис. 2

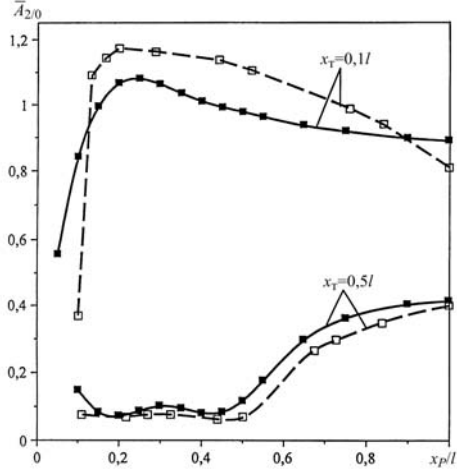


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/1}$  от места приложения вынуждающей силы ( $x_p/l$ ) при расположении трещины с относительной глубиной  $\gamma = 0,2$  в сечениях  $x_T = 0,1l$  и  $0,5l$ . (Здесь и на рис. 3: сплошные линии – результаты расчета, штриховые – по данным численных решений, штрихпунктирные – по данным работы [4].)

Рис. 3. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/0}$  от места приложения вынуждающей силы ( $x_p/l$ ) при расположении трещины с относительной глубиной  $\gamma = 0,2$  в сечениях  $x_T = 0,1l$  и  $0,5l$ .

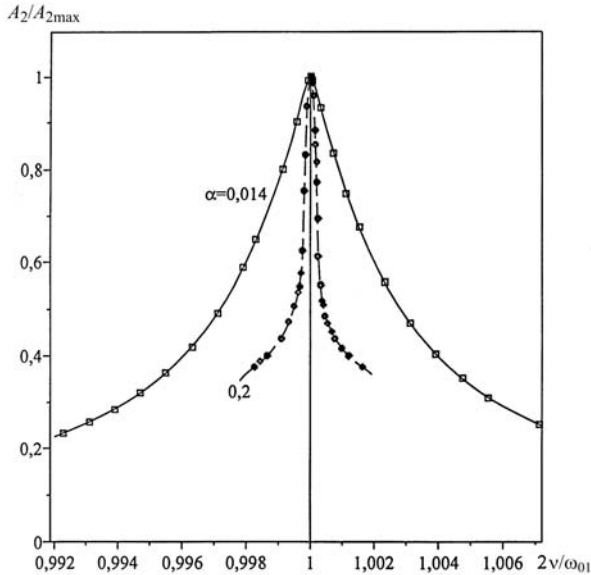


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики колебательной системы при слабом ( $\alpha = 0,014$ ,  $A_{2/1} = 0,776$ ) и сильном ( $\alpha = 0,2$ ,  $A_{2/1} = 3,20$ ) супергармонических резонансах 2-го порядка.

При использовании формул (3), (4) и (9), например, в случае возбуждения колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении  $x_p = l$ , и измерении прогиба в сечении  $x^* = l$ , кроме параметра  $\alpha = \kappa/(1+\kappa)$ , где  $\kappa$  определяется по (6), необходимо знать для данной амплитуды вынуждающей силы  $P_c$  или  $P_0$  абсолютное значение  $A_{1\Sigma}$  или  $A_{01}$ :

$$A_{1\Sigma} = \frac{4}{3} P_c \frac{\Delta_1}{\lambda_1}; \quad A_{01} = \sqrt[n]{P_0 \frac{\pi}{k_n} \Delta_1}, \quad (14)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{l^3 X_1^2(l)}{EI(k_1 l)^4}; \quad \lambda_1 = \frac{4}{3} X_1^2(l) \left[ \sum_{i=1}^N \frac{X_i^2(l)}{\left(\frac{k_i l}{k_1 l}\right)^4} - \frac{1}{4} \right]^{-1}. \quad (15)$$

Тогда (3), (4) соответственно примут вид

$$\bar{A}_{2/1} = \lambda_1 \sqrt[n]{\frac{0,435\alpha}{k_n (P_c \Delta_1)^{n-1}}} \quad (16)$$

и

$$\bar{A}_{2/1} = \lambda_1 \sqrt[n+1]{\frac{0,3942\alpha}{k_n (P_c \Delta_1)^{n-1}}}, \quad (17)$$

а (9) –

$$\bar{A}_{2/0} = \sqrt[n+1]{0,09467\alpha k_n^{1/n} \left(\frac{P_c}{P_0}\right)^2 (\pi P_0 \Delta_1)^{(n-1)/n}}. \quad (18)$$

Как следует из (16)–(18), изменение поврежденности балки по величине параметров  $\bar{A}_{2/1}$  и  $\bar{A}_{2/0}$  целесообразно определять при выбранных способе возбуждения и месте регистрации колебаний при одном и том же значении амплитуды вынуждающей нагрузки или учитывать поправку на их различие.

Влияние показателя степени  $n$  на вибродиагностические параметры хорошо видно из представленной на рис. 5 зависимости  $\bar{A}_{2/1}(n)$ , вычисленной по формуле (17) при разных значениях коэффициента  $k_n [1/m^{n-1}]$  для балки с относительной глубиной трещины  $\gamma = 0,2$ , расположенной в корневом сечении при следующих размерах балки:  $b = 0,004$  м;  $h = 0,02$  м;  $l = 0,23$  м; модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; амплитуда вынуждающей силы  $P_c = 100$  Н.

На рис. 6 показана аналогичная зависимость параметра  $\bar{A}_{2/0}$  (18) для той же балки при отношении  $P_c/P_0 = 50$ ,  $P_0 = 2$  Н.

В заключение рассмотрим влияние характера амплитудной зависимости декремента колебаний на вибродиагностический параметр  $\bar{A}_{2/1}$  (12), (13), который не зависит от абсолютных значений амплитуд вынуждающей нагрузки  $Q_0$  и  $Q_c$ , но выбранная величина  $Q_0$  определяет значение амплитуды колебаний  $A_{01} = \frac{\pi}{\delta_1} \Delta_1 Q_0$ , при которой демпфирующая способность балки с нелинейным сопротивлением ( $n \neq 1$ ) одинакова с амплитудно-независимым ( $n = 1$ ), характеризуемым значением декремента колебаний  $\delta_1$ .

В качестве примера использования формул (12) и (13) на рис. 7 показаны зависимости  $\bar{A}_{2/1}$  от места приложения вынуждающей сосредоточенной силы  $P$  для балки с отношением  $h/l = 0,85$  и относительной глубиной трещины  $\gamma = 0,2$ , расположенной в сечениях  $x_T = 0$  и  $0,25l$ , для различных отношений  $P_c/P_0$  и характера амплитудной зависимости декремента колебаний при значениях  $\delta_1 = 0,01$ .

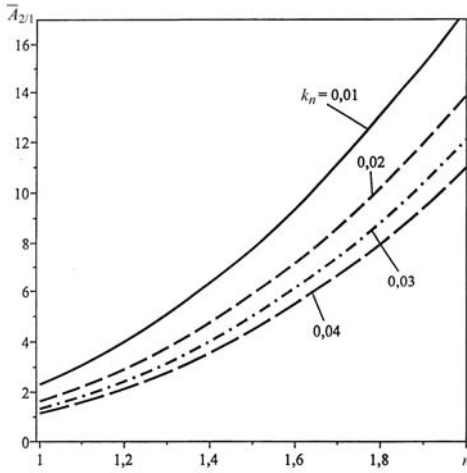


Рис. 5

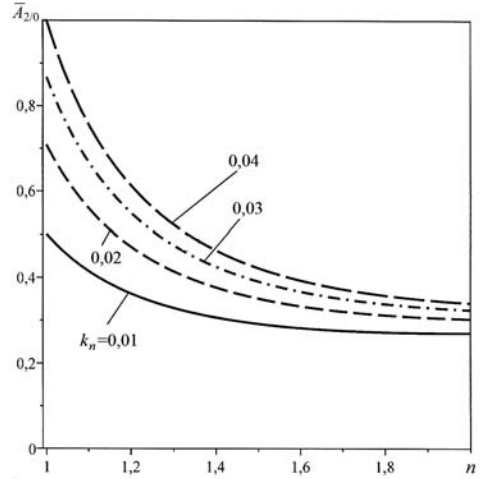
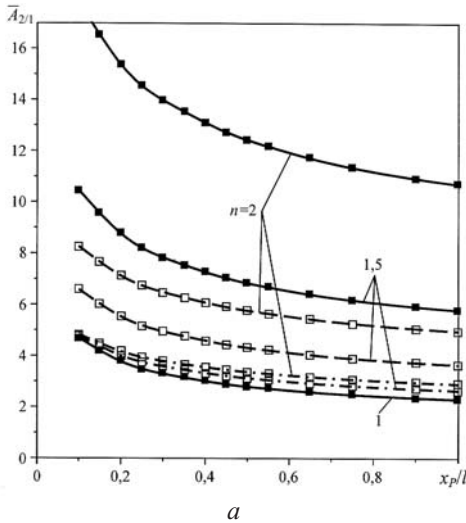


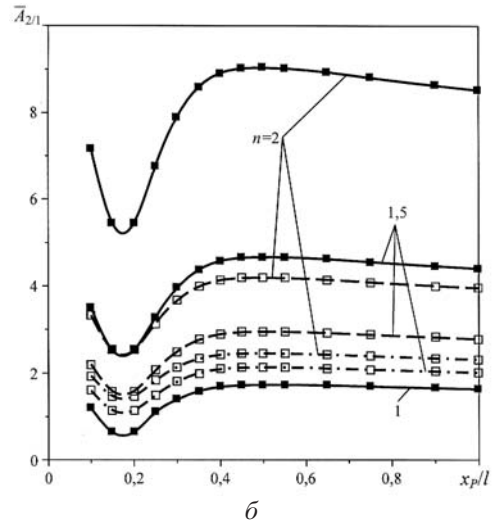
Рис. 6

Рис. 5. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/1}$  при возбуждении колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении  $x_p = l$ , от показателя степени  $n$  при разных значениях коэффициента  $k_n$ .

Рис. 6. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/0}$  при возбуждении колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении  $x_p = l$ , от показателя степени  $n$  при разных значениях коэффициента  $k_n$ .



а



б

Рис. 7. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/1}$  от места приложения вынуждающей силы при расположении трещины с относительной глубиной  $\gamma = 0,2$  в сечениях  $x_T = 0$  (а) и  $0,25l$  (б) при разных значениях показателя степени  $n$  амплитудной зависимости неупругого сопротивления в случае разной величины отношения  $P_c/P_0$ . (Сплошные линии –  $P_c/P_0 = 1$ , штриховые –  $P_c/P_0 = 10$ , штрихпунктирные –  $P_c/P_0 = 50$ .)

На рис. 8 представлены зависимости  $\bar{A}_{2/1}$  от относительной глубины трещины  $\gamma$ , расположенной в корневом сечении, при различных значениях показателя степени  $n$  в случае возбуждения колебаний балки сосредоточенными силой и моментом, приложенными в сечении  $x_p = x_M = l$ , а также перемещением опоры при  $P_c/P_0 = M_c/M_0 = B_c/B_0 = 1$ .



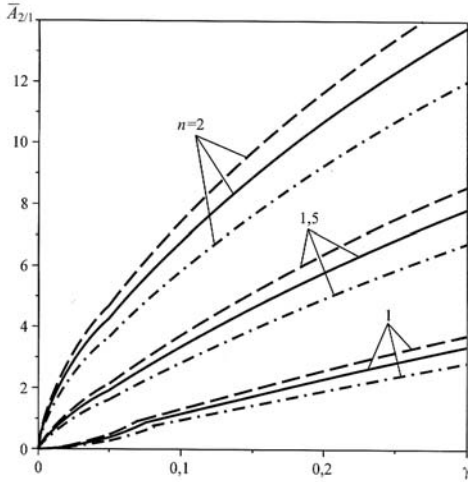


Рис. 8

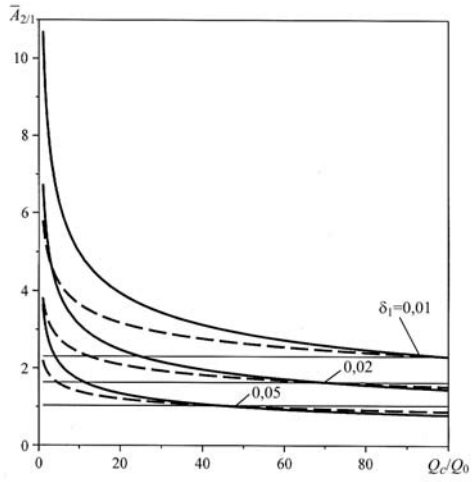


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/1}$  от относительной глубины трещины  $\gamma$ , расположенной в корневом сечении балки, при разных значениях показателя степени  $n$  в случае возбуждения колебаний сосредоточенными силой (сплошные линии) и моментом (штрихпунктирные линии), а также перемещением опоры (штриховые линии).

Рис. 9. Зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{2/1}$  от отношения амплитуд вынуждающих нагрузок  $Q_c/Q_0$  при разных значениях логарифмического декремента колебаний  $\delta_1$  и показателя степени  $n$ . (Сплошные линии –  $n = 2$ , штриховые –  $n = 1,5$ , горизонтальные сплошные –  $n = 1$ .)

На рис. 9 на примере балки с относительной глубиной трещины  $\gamma = 0,2$ , расположенной в корневом сечении, показано влияние отношения амплитуд вынуждающих нагрузок  $Q_c/Q_0$  на значения  $\bar{A}_{2/1}$  при возбуждении колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении  $x_p = l$ , при разных величинах  $n$  и  $\delta_1$ .

**Заключение.** Рассмотрены базирующиеся на расчете колебаний неповрежденной системы методы определения влияния нелинейности демпфирующей способности балки при супергармоническом резонансе 2-го порядка нижней собственной формы изгибных колебаний на вибродиагностические параметры наличия в ней краевой закрывающейся трещины. В качестве вибродиагностических параметров использованы отношения максимальной амплитуды второй резонирующей гармоники к полной амплитуде первой гармоники колебаний ( $\bar{A}_{2/1}$ ) и к максимальной амплитуде основного резонанса ( $\bar{A}_{2/0}$ ). Для степенной зависимости декремента от амплитуды колебаний ( $\delta_n = k_n A^{n-1}$ ) определены возможные зависимости параметров  $\bar{A}_{2/1}$ ,  $\bar{A}_{2/0}$  от показателя степени  $n$  при разных значениях коэффициента  $k_n$ , относительной глубины  $\gamma$  и местоположения  $x_T$  трещины, а также особенностей возбуждения колебаний. Показано существенное влияние амплитудной зависимости демпфирующей способности колебательной системы на значения вибродиагностических параметров. Однако характер их зависимости как от относительной глубины и местоположения трещины, так и способа возбуждения колебаний не изменяется.

## Резюме

Представлено результати наближеного розрахунку впливу характеру амплітудно-залежної демпфувальної здатності коливальної системи на вібродіагностичні параметри наявності крайової тріщини нормального відриву, що закривається, в консоль-

ній балці прямокутного поперечного перерізу за різних способів збудження супергармонічного резонансу 2-го порядку нижчої власної форми згинних коливань.

1. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е., Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2014. – № 3. – С. 21–37.
2. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е.* Влияние амплитудно-зависимого демпфирования на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся трещины в балке при субгармоническом резонансе // Там же. – 2015. – № 3. – С. 5–15.
3. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Влияние неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Там же. – 2014. – № 4. – С. 21–35.
4. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Там же. – 2010. – № 3. – С. 125–141.
5. *Басов К. А.* ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Поступила 08. 06. 2015