

## Предельная нагрузка трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластины, заземленной по внутреннему и свободно опертой по внешнему контурам

А. А. Джагангиров

Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан

al-akif@mail.ru

*Исследована несущая способность трехслойной кольцевой пластины, заземленной по внутреннему и свободно опертой по внешнему контурам. Пластина с лицевой стороны имеет покрытие из тонких слоев, средний слой армирован волокнами. Предполагается, что материал матрицы, волокон и покрытий является идеально жесткопластичным без упрочнения, причем его свойства при растяжении и сжатии различаются, а волокна в покрытии настолько тонкие, что их размерами в поперечном направлении можно пренебречь. Принято, что контакт между матрицей, покрытием и волокном – идеальный. Показано, что пластины разбиваются на четыре кольцевые зоны, в каждой из которых реализуется различное пластическое состояние. Определены статические поля моментов и кинематические поля скоростей прогибов, найдены уравнения для вычисления неизвестных радиусов, разделяющих различные пластические зоны, а также опорной реакции и предельной нагрузки в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки.*

**Ключевые слова:** трехслойный волокнистый композит, несущая способность, изгиб, предельная нагрузка.

**Введение.** Конструкции, изготовленные из композитных материалов, широко применяются в авиакосмической технике, корабле- и машиностроении, строительстве, в морских нефтяных платформах, эстакадах, в трубопроводах и др. Поэтому исследование несущей способности композитных оболочек и пластин является актуальной задачей механики.

Для разных условий пластичности гиперповерхность текучести в обобщенных напряжениях будет различаться. В работе [1] рассмотрено предельное равновесие оболочек вращения из волокнистого композита, материал матрицы и волокон которого является идеально жесткопластичным. В [2–4] результаты [1] применены к решениям конкретных задач. В [5] обсуждается аппроксимация поверхностей текучести для цилиндрических оболочек. В [6] предлагается метод построения поверхности текучести двоякопериодического однонаправленного композиционного материала с осреднением напряжений. Различные вопросы построения поверхностей текучести рассматриваются в работах [7–9]. Исследована несущая способность заземленных [10] и свободно опертых [11] по контурам круглых трехслойных пластин, средний слой которых армирован волокнами, находящимися под воздействием равномерно распределенных нагрузок. Определены статически допустимые поля изгибающих моментов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пластический изгиб кольцевой композитной пластины в области  $A \leq R \leq B$ ,  $-H/2 \leq z \leq H/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  при осесимметричной нагрузке интенсивностью  $q = \chi R$  в цилиндрической системе координат  $R$ ,  $\varphi$ ,  $z$  (ось  $z$  направлена вниз). Будем предполагать, что нагрузка  $q$  направлена вниз и толщина пластины  $H$  постоянна. Пластина заземлена по внутреннему и свободно оперта по внешнему контурам и остается недеформируемой вплоть до достижения предельной нагрузки (характеризует несущую способность пластины). Композит состоит из

идеально пластичной матрицы с различными напряжениями текучести  $k\sigma_0$  и  $\sigma_0$  ( $0 < k \leq 1$ ) при растяжении и сжатии, армирован волокнами в двух ортогональных направлениях, совпадающих с осями главных изгибающих моментов, и имеет тонкий слой покрытия. Материал волокон и покрытий также считается идеально жестко-пластичным.

Пусть  $S_{0i}^+ = S_{0i}$  и  $S_{0i}^- = \mu_i S_{0i}^+$  – предельные усилия для волокон при растяжении и сжатии соответственно;  $S_{0i}^+ = F_i^+ \sigma_{0i}^+$ ;  $S_{0i}^- = F_i^- \sigma_{0i}^-$ , где  $F_i^+$ ,  $F_i^-$  – площади поперечного сечения волокон;  $\sigma_{0i}^+$ ,  $\sigma_{0i}^-$  – пределы текучести для волокон при растяжении и сжатии;  $i = 1, 2$  – ортогональные направления, совпадающие с осями главных изгибающих моментов. Волокна укладываются в каждом направлении в двух слоях, не симметричных относительно срединной плоскости конструкции. Их количество разное в каждом направлении. Покрытия имеют достаточно тонкий слой, их материал однородный изотропный идеально пластичный с пределами текучести  $Q_0$  при растяжении и  $Q_0^- = \nu Q_0$  ( $0 \leq \nu \leq 1$ ) при сжатии. Приближенное условие текучести в плоскости главных изгибающих моментов в зависимости от механических свойств матрицы, волокон и покрытий, а также характерных геометрических параметров имеет вид неправильных шестиугольников.

Обозначим отнесенные к единице длины главные изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях как  $M_1$  и  $M_2$  и примем следующие безразмерные величины:

$$r = \frac{R}{H}, \quad a = \frac{A}{H}, \quad b = \frac{B}{H}, \quad P = \frac{q}{4\sigma_0}, \quad m_i = \frac{4M_i}{\sigma_0 H^2}.$$

Тогда уравнение равновесия будет иметь вид

$$(rm_1)' - m_2 = -T^{ar} + Ta, \quad \left( T^{ar} = \int_a^r P(\eta) \eta d\eta \right), \quad (1)$$

где штрих обозначает производную по  $r$ ;  $T$  – неизвестная опорная реакция на внутреннем контуре, отнесенная к единице длины.

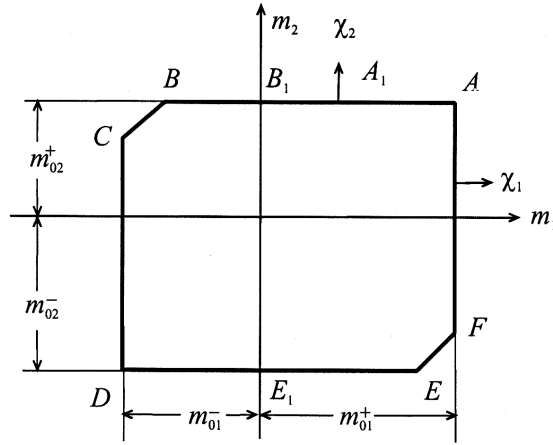
Скорости изменения кривизны в радиальном  $\chi_1$  и окружном  $\chi_2$  направлениях выражены через производные прогиба  $w$ :

$$\chi_1 = -w'', \quad \chi_2 = -(w'/r). \quad (2)$$

Уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением с двумя неизвестными  $m_1$  и  $m_2$ . Второе уравнение между этими величинами записывается в виде условия пластического течения (рисунок).

Будем предполагать, что пластина подчиняется условию пластического течения, которое в плоскости  $m_1 m_2$  представляет собой неправильный шестиугольник  $ABCDEF$  (рисунок). Пластина разбивается на кольцевые зоны, в каждой из которых условие текучести линейное, и интегрирование приведенного ниже уравнения (8) легко осуществляется. На окружности, разделяющей кольцевые зоны различных решений, в силу условий равновесия изгибающий момент  $m_1$  и срезывающее усилие должны быть непрерывными, а изгибающий момент  $m_2$  может быть прерывным. Для сторон  $AB$  и  $AF$  шестиугольника имеем следующие предельные значения положительных и отрицательных изгибающих моментов:

$$m_i = m_{0i}^+ = c_0 + c_{1i}^+ s_{0i} - c_{2i} s_{0i}^2 + c_3 q_0 - c_4 q_0^2 - c_{5i} s_{0i} q_0, \quad (3)$$



Шестиугольник течучести.

для сторон  $CD$  и  $DE$  –

$$m_i = -m_{0i}^- = -[c_0 + c_{1i}^- s_{0i} - c_{2i} s_{0i}^3 + c_3 q_0 - c_4 q_0^2 - c_{5i} s_{0i} q_0], \quad (4)$$

для сторон  $EF$  и  $BC$  соответственно –

$$m_2 = \alpha m_1 + \beta_1, \quad m_2 = \alpha m_1 + \beta_2. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения для коэффициентов:

$$c_0 = \frac{2k}{1+k}; \quad c_{1i}^+ = 4 \left( d_i'' + \mu_i d_i' + \frac{1-\mu_i}{2} \frac{1-k}{1+k} \right); \quad c_{2i} = \frac{2(1-\mu_i)^2}{1+k}; \quad c_3 = 4 \frac{1+\nu k}{1+k};$$

$$c_4 = \frac{2(1-\nu)^2}{1+k}; \quad c_{5i} = \frac{4(1-\mu_i)(1-\nu)}{1+k}, \quad i = 1, 2; \quad c_{1i}^- = 4 \left( d_i' + \mu_i d_i'' + \frac{1-\mu_i}{2} \frac{1-k}{1+k} \right);$$

$$\alpha = \frac{(1-k)[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] + k}{(1-k)[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] + k}, \quad i = 1, 2; \quad q_0 = \frac{Q_0}{\sigma_0 H^2};$$

$$\beta_1 = a_2 - \alpha a_1; \quad \beta_2 = a_4 - \alpha a_3; \quad s_{0i} = \frac{S_{0i}}{\sigma_0 H^2};$$

$$a_1 = \frac{1}{1-k^2} \{ k(1-k) + (1+k^2)[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] - 2k[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] \} +$$

$$+ 4(d_1'' + \mu_1 d_1') s_{01}^+ + 2(1-\nu)q_0;$$

$$a_2 = -\frac{1}{1-k^2} \{ k(1-k) - (1+k^2)[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] + 2k[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] \} +$$

$$+ 4(d_2' + \mu_2 d_2'') s_{02} - 2(1+\nu)q_0;$$

$$a_3 = -a_1 - 4(1 - \mu_1)(d'_1 - d''_1)s_{01}; \quad a_4 = -a_2 - 4(1 - \mu_2)(d'_2 - d''_2)s_{02};$$

$d'_i$  и  $d''_i$  – безразмерные расстояния, отнесенные к толщине  $H$ , от срединной плоскости до верхних и нижних слоев волокон.

Уравнение (1) можно решить при соблюдении следующих граничных условий: вдоль заделанного внутреннего края имеем  $r = a$ ,  $w = 0$ ,  $dw/dr = 0$  или  $m_1 = -m_{10}^-$ , на свободно опертом внешнем крае –  $r = b$ ,  $m_1 = 0$ ,  $w = 0$ .

**Результаты расчета.** Полагаем, что нагрузка направлена вниз. Радиальный изгибающий момент будет иметь положительное значение (растяжение нижних и сжатие верхних слоев), тогда как вне тонкого кольца, примыкающего к заземленному внутреннему контуру, он имеет отрицательное значение. В этом случае пластическое состояние пластины определяется стороной  $DE$  шестиугольника текучести около внутренней кромки  $r = a$ , на которой  $m_1 = -m_{10}^-$  и  $m_2 = -m_{20}^-$ . Тогда решение задачи можно отыскивать для состояний  $DE - EF - FA - AB_1$ , так как в этом случае удовлетворяется и условие  $m_1 = 0$  при  $r = b$ . Поверхность пластины разделяем на четыре участка радиусом  $r = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ , которые должны быть определены.

На участке  $a \leq r \leq \rho_1$ , соответствующем пластическому режиму  $DE$ , имеем  $m_2 = -m_{20}^-$ . Подставляя это выражение в уравнение (1), после интегрирования получаем

$$rm_1 = (-m_{20}^- + Ta)r - \int_a^r T^{\alpha\xi} d\xi + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Вычисляя  $C$  из условия  $m_1(a) = -m_{10}^-$ , находим

$$rm_1 = -am_{10}^- + (-m_{20}^- + Ta)(r - a) - \int_a^r T^{\alpha\xi} d\xi, \quad m_2 = -m_{20}^-. \quad (6)$$

Определяя  $m_1(\rho_1)$  из (6) и подставляя его в формулу  $m_2 = \alpha m_1 + \beta_1$ , получаем  $-m_{20}^-$ , что дает

$$m_{20}^- \left( \alpha - 1 - \alpha \frac{a}{\rho_1} \right) = -\frac{\alpha a}{\rho_1} m_{10}^- + \beta_1 + Ta\alpha \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} - \frac{\alpha}{\rho_1} \int_a^{\rho_1} T^{\alpha\xi} d\xi. \quad (7)$$

При  $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$  имеем состояние  $EF$  (рисунок), при котором  $m_2 = \alpha m_1 + \beta_1$ . Тогда уравнение (1) примет вид

$$rm'_1 + (1 - \alpha)m_1 = (Ta + \beta_1) - T^{ar}.$$

В результате решения этого уравнения получим

$$m_1 = Cr^{\alpha-1} + (Ta + \beta_1) \frac{1}{1 - \alpha} - r^{\alpha-1} \int_a^r \xi^{-\alpha} T^{\alpha\xi} d\xi.$$

Определяя произвольную постоянную  $C$  из условия непрерывности  $m_1(\rho_2) = m_{10}^+$ , находим

$$m_1(r) = m_{10}^+ \left( \frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} + \frac{Ta + \beta_1}{1 - \alpha} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + r^{\alpha-1} \int_r^{\rho_2} \xi^{-\alpha} T^{\alpha\xi} d\xi. \quad (8)$$

С использованием условия непрерывности  $[m_1(\rho_1)] = 0$  получим

$$\begin{aligned}
 & -am_{10}^- + (-m_{20}^- + Ta)(\rho_1 - a) - \int_a^{\rho_1} T^{a\xi} d\xi = \\
 & = m_{10}^+ \frac{\rho_1^\alpha}{\rho_2^{\alpha-1}} + (Ta + \beta_1) \frac{\rho_1}{1-\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + \rho_1^\alpha \int_{\rho_1}^{\rho_2} \xi^{-\alpha} T^{a\xi} d\xi. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Если напряженное состояние пластины соответствует стороне  $FA$  ( $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ ), для скоростей деформации имеем

$$\chi_1 = -w'' \geq 0, \quad \chi_2 = -\frac{1}{r} w' = 0.$$

Естественным решением этих уравнений будет  $w = w_0 = \text{const}$ , т.е. кольцевая часть пластины ( $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ ), оставаясь жесткой, перемещается в этой области как абсолютно жесткое тело.

Окружности  $r = \rho_2$  и  $r = \rho_3$  являются шарнирными, на которых первая производная скорости прогиба претерпевает разрыв, скорость прогиба непрерывна, а значение радиального изгибающего момента максимальное.

На участке  $\rho_3 \leq r \leq b$  имеем состояние  $AB$ , при котором  $m_2 = m_{20}^+$ . Из уравнения (1) получим

$$rm_1 = (m_{20}^+ + Ta)r - \int_a^r T^{a\xi} d\xi + C,$$

где произвольную постоянную  $C$  определим из условия  $m_1(b) = 0$ .

Тогда

$$rm_1 = (m_{20}^+ + Ta)(r - b) + \int_r^b T^{a\xi} d\xi. \quad (10)$$

Подставляя (10) в условие  $m_1(\rho_3) = m_{10}^+$ , получаем

$$\rho_3 m_{10}^+ = (m_{20}^+ + Ta)(\rho_3 - b) + \int_{\rho_3}^b T^{a\xi} d\xi. \quad (11)$$

Теперь исследуем возможность продолжения статического поля на участок  $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ . Принимая, что тангенциальный момент  $m_2$  и перерезывающая сила являются непрерывными функциями, из уравнения равновесия (1) получаем, что производная  $dm_1/dr$  при  $r = \rho_2$  и  $r = \rho_3$  не может иметь скачков в области пластины:

$$\frac{dm_1}{dr} = 0, \quad (12)$$

так как  $m_1 = m_{10}^+$  на этих радиусах.

Однако если предположить скачкообразное изменение момента  $m_2$ , из уравнения равновесия (1) получим

$$r \left[ \frac{dm_1}{dr} \right] = [m_2], \quad (13)$$

где

$$\left[ \frac{dm_1}{dr} \right] = \frac{dm_1^+}{dr} - \frac{dm_1^-}{dr}, \quad [m_2] = m_2^+ - m_2^-;$$

$[m_2]$  – скачки соответствующих величин в рассматриваемой точке.

Поскольку при  $r = \rho_2$  и  $r = \rho_3$   $[m_2]$  имеет положительные значения, а  $[dm_1/dr]$  на этих радиусах может быть только отрицательным, условие (13) не выполняется. Следовательно, поле моментов  $m_2$  должно быть непрерывным в области пластины, т.е.  $[m_2] = [dm_1/dr] = 0$ .

Выполняя условие (12) с использованием производных формул (8) при  $r = \rho_2$  и (10) при  $r = \rho_3$ , получаем

$$Ta = T^{a\rho_2} + m_{10}^+(1 - \alpha) - \beta_1; \quad (14)$$

$$b(Ta + m_{20}^+) - \rho_3 T^{a\rho_3} - \int_{\rho_3}^b T^{a\xi} d\xi = 0. \quad (15)$$

По формуле (14) определяется неизвестная реакция  $Ta$ , а по (15) – предельная нагрузка.

Уравнения (7), (9) и (11) позволяют определить неизвестные радиусы  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ .

Статическое поле может быть продолжено на участок  $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$  разными способами без нарушения условий непрерывности. Если, например, принять, что оно соответствует стороне шестиугольника  $FA$  (рисунок), из уравнения равновесия (1) получим

$$m_1 = m_{10}^+, \quad m_2 = m_{10}^+ + T^{ar} - Ta. \quad (16)$$

Формулу (15) для предельной нагрузки в случае равномерно распределенной нагрузки  $P(r) = p = \text{const}$ ,  $T^{\rho_2\rho_3} = \frac{p}{2}(\rho_3^2 - \rho_2^2)$  с использованием (11), (14) можем записать в виде

$$\varphi = \frac{pb^2}{m_{02}^+} = \frac{2}{x_3^2 - x_2^2} \left( 1 - \frac{\alpha m_{01}^+ + \beta_1}{m_{02}^+} \right), \quad (17)$$

где  $x_i = \rho_i/b$ ,  $i = 2, 3$ .

В случае  $s_{0i} = q_0 = 0$  имеем

$$m_{0i}^+ = \frac{2k}{1+k}, \quad \alpha = 1, \quad a_1 = \frac{k}{1+k}, \quad a_2 = -\frac{k}{1+k}.$$

При этом получим

$$\beta_1 = -\frac{2k}{1+k}, \quad \alpha m_{01}^+ + \beta_1 = 0,$$

и формула (17) преобразуется в известную формулу для однородной изотропной пластины [12].

Как видно, за счет армирующих волокон и покрытий предельная нагрузка пластины увеличивается в  $1 - (\alpha m_{10}^+ + \beta_1) / m_{20}^+$  раза, поскольку выражение  $\alpha m_{10}^+ + \beta_1$  является отрицательным, будучи ординатой точки  $F$  шестиугольника текучести на плоскости  $m_1 m_2$ ,  $F(m_{01}^+, \alpha m_{01}^+ + \beta_1)$ . В случае  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  нетрудно получить

$$\alpha m_{01}^+ + \beta_1 = - \left[ 2q_0 \frac{1+\gamma k}{1+k} + 4(d_2' + d_2'')s_{02} \right].$$

Видно, что предельная нагрузка повышается с увеличением выражения внутри квадратной скобки. При  $\gamma = 1$ ,  $d_2' = d_2'' = 1/2$  это выражение имеет наибольшее значение  $2q_0 + 4s_{02}$ .

**Заключение.** Определена несущая способность кольцевой трехслойной пластины, центральный слой которой армирован волокнами. Принято, что внешние слои достаточно тонкие и изготовлены из однородного изотропного материала. Все составляющие пластины обладают идеально пластичными свойствами с различными предельными усилиями при растяжении и сжатии. Предполагается, что пластина закреплена по внутреннему и свободно оперта по внешнему контурам и находится под действием произвольной нагрузки  $P$  в верхней части поверхности. Определены статически допустимые поля изгибающих моментов. Выявлен характер зависимости коэффициента предельной нагрузки от свойств материалов составляющих пластины. Показано, что поверхность пластины разделена на четыре кольцевые зоны. Найдены уравнения для определения радиусов этих зон.

## Резюме

Досліджено несівну здатність тришарової кільцевої пластини, що затиснена по внутрішньому і вільно оперта по зовнішньому контурах. Пластина з ліцевої сторони має покриття з тонких шарів, середній шар армований волокнами. Припускається, що матеріал матриці, волокон і покриття є ідеально жорстко-пластичним без зміцнення, при цьому його властивості при розтязі і стиску є різними, а волокна в покритті настільки тонкі, що їх розмірами в поперечному напрямку можна знехтувати. Прийнято, що контакт між матрицею, покриттям і волокном – ідеальний. Показано, що пластина розбивається на чотири кільцеві зони, у кожній з яких реалізується різний пластичний стан. Визначено статичні поля моментів і кінематичні поля швидкостей прогинів, отримано рівняння для визначення радіусів, що розділяють різні пластичні зони, та опорної реакції і граничного навантаження у випадку рівномірно розподіленого поперечного навантаження.

1. *Mroz Z. and Shamiev F. G.* Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells // Arch. Inz. Lad. – 1979. – **25**, No. 3. – P. 463–476.
2. *Мовсумов Э. А., Шамиев Ф. Г.* Несущая способность пластинок из волокнистого композита // Механика композитных материалов. – 2005. – **41**, № 2. – С. 177–192.
3. *Kubishev I. N.* Bearing capacity of a composite annular plate with different fixing conditions, situated under the action of uniformly distributed load // Trans. of IMM of NAS of Azerbaijan. – 2009. – **29**, No. 1. – P. 187–198.
4. *Кубышев И. Н.* Несущая способность композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления, находящейся под воздействием кольцевой нагрузки // Аспирант и соискатель. – 2010. – № 2. – P. 86–98.

5. *Налимов А. В.* Универсальная аппроксимация поверхностей текучести для жесткопластических цилиндрических оболочек // Ползуновский вестник. – 2006. – № 2. – С. 90–94.
6. *Немировский Ю. В., Пятаев С. Ф.* Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала // Журн. Сиб. федерального ун-та. Сер. Математика и физика. – 2009. – 4, № 2. – С. 470–483.
7. *Суприн А. Н., Вежлис Т. М.* Единая математическая модель эволюции поверхности текучести при полной и частичной разгрузке // Пробл. прочности и пластичности. – 2008. – Вып. 70. – С. 24–31.
8. *Лукьянов А. А., Пеньков В. Б.* Корректная модель несжимаемой анизотропной ассоциированной пластичности: течение Хилла // Вест. СамГУ. Естественно-научная серия. – 2007. – № 4 (54). – С. 280–289.
9. *Bron F. and Besson J.* A yield function for anisotropic materials: application to aluminum alloys // Int. J. Plasticity. – 2004. – 20, No. 4-5. – P. 937–963.
10. *Джагангиров А. А.* Несущая способность армированной волокнами круглой трехслойной композитной пластинки, заземленной по контуру // Экоэнергетика. – 2012. – № 4. – С. 74–80.
11. *Джагангиров А. А.* Несущая способность армированной волокнами свободно опертой круглой трехслойной композитной пластинки // Научные труды – фундаментальные науки. – 2013. – 7 (45), № 1. – С. 50–54.
12. *Мруз З., Савчук А.* Несущая способность кольцевых пластин, закрепленных по обоим кромкам // Механика и машиностроение. – 1960. – № 3. – С. 72–78.

Поступила 17. 04. 2014