

## **Программа численного расчета динамического напряженно-деформированного состояния и прочности полых многослойных анизотропных цилиндров и сфер. Сообщение 1. Описание программы**

**П. П. Лепихин, В. А. Ромащенко, О. С. Бейнер, В. Н. Сторожук, Ю. Н. Бабич, Е. В. Бахтина**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Описан разработанный в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины пакет прикладных программ для расчета напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных композитных цилиндров и сфер при внутреннем импульсном нагружении. Показаны его преимущества и ограничения по сравнению с современными зарубежными коммерческими аналогами.*

**Ключевые слова:** пакет прикладных программ, композитные материалы, взрывчатое вещество, численные методы, многослойные цилиндры и сферы, спиральная ортотропия, напряженно-деформированное состояние, прочность.

Развитие науки и техники обусловило интерес к динамическим процессам в различных конструкциях. К таковым относятся сосуды, корпуса и защитные сооружения, предназначенные для удержания значительных гидро-, газодинамических нагрузок и экологически опасных продуктов взрыва, контейнеры для хранения и транспортировки взрывоопасных грузов, токсичных веществ, камеры для энергетики взрывного термоядерного синтеза и т.д. Такие конструктивные элементы часто представляют собой многослойные цилиндры либо сферы, для их изготовления используются композитные материалы (КМ), в том числе со спиральной намоткой слоев, а также металлокомпозиты, состоящие из внутреннего металлического слоя и наружного многослойного композита.

Возможность управления симметрией свойств указанных материалов при изготовлении позволяет целенаправленно изменять напряженно-деформированное состояние (НДС) и прочность конструкций. Одними из наиболее существенных факторов, определяющих динамическую реакцию и несущую способность конструкции, являются направления спирального армирования материалов слоев и их взаиморасположение в конструктивном элементе, которые необходимо учитывать при расчетах НДС и прочности.

Обзор текущего состояния теоретического и экспериментального исследования НДС и прочности многослойных анизотропных цилиндров при внутреннем взрывном нагружении, а также анализ некоторых современных феноменологических критериев прочности КМ приведены ранее [1–3].

В настоящее время экспериментальные исследования подобных задач широко представлены в литературных источниках [1]. При этом получен ряд важных результатов. Даны рекомендации по выбору материалов, схем армирования и др. Наряду с известными преимуществами экспериментальные исследования имеют ряд недостатков: дороговизна и трудоемкость их проведения, существенные трудности получения необходимого количества экспериментальных результатов для достаточно полного и адекватного анализа динамического НДС и прочности испытуемого объекта в условиях взрывного нагружения. Поэтому провести широкомасштабное исследование динамического поведения и прочности, а также выбрать оптимальную конструкцию весьма проблематично.

На сегодня разработаны и получили широкое распространение коммерческие пакеты прикладных программ (ППП): ABAQUS, ANSYS, LS-DYNA и др., которые позволяют рассчитывать многомерное динамическое НДС и прочность таких конструктивных элементов [4–7]. Их преимуществом является универсальность (пригодность для решения широкого круга краевых задач, в том числе для композитных цилиндров и сфер), возможность расчета как начального, так и прогрессирующего разрушения композитных конструкций, доступность приобретения, наличие детального описания пакетов и их возможностей для пользователей. Следует отметить, что с помощью рассматриваемых ППП можно оценить начальную прочность по целому ряду критериев. Кроме того, пользователь может вводить дополнительные подпрограммы, в том числе для оценки прочности по выбранным им критериям прочности. Однако использование последней возможности требует доработки ППП и наличия у пользователя довольно высокой квалификации.

Вместе с тем данные ППП обладают рядом недостатков.

1. Для спирально ортотропных цилиндров двухмерные (2D) осесимметричные задачи с помощью пакетов ANSYS и LS-DYNA можно решать только как трехмерные (3D). Пакет ABAQUS позволяет такие задачи рассматривать как двухмерные и численно интегрировать их методом конечных элементов (МКЭ) на 2D-сетке. Применительно к телам регулярной геометрии, каковыми являются цилиндры, это представляется нерациональным подходом – для таких задач более удобными будут методы конечных разностей (МКР) [8].

2. Трехмерные неосесимметричные задачи интегрируются в большинстве случаев МКЭ на трехмерной конечноэлементной сетке. Метод конечных элементов весьма трудоемкий (при подготовке входных данных и дискретизации расчетной области) и неэкономичный (требует значительных объемов оперативной памяти и компьютерного времени для расчета конкретной задачи). С помощью коммерческого ППП ANSYS можно решать некоторые неосесимметричные задачи для упругих тел вращения путем разложений переменных в ряды Фурье по окружной координате, понижая при этом размерность задачи на единицу, что позволяет в некоторых случаях вместо МКЭ применять разностные 2D-методы [6]. Однако задачи для спирально ортотропных цилиндров посредством ANSYS таким способом интегрировать невозможно.

3. Трехмерные задачи, в том числе для тел вращения, численно интегрируются в прямоугольных декартовых координатах, несмотря на то что для цилиндрических тел наиболее рациональной и удобной для решения является форма записи уравнений в цилиндрических координатах. Применительно к цилиндрам использование декартовых координат создает целый ряд дополнительных и весьма нежелательных трудностей, а именно:

а) сложности при математической формулировке граничных и контактных условий на цилиндрических поверхностях;

б) трудности и, как следствие, погрешности, возникающие при 3D-дискретизации цилиндрической расчетной области конечными элементами с плоскими гранями;

в) как следствие из предыдущих двух подпунктов при численном расчете возникает ряд паразитных эффектов. В частности, появление паразитных окружных волновых процессов, которые не исчезают даже при осесимметричном нагружении, когда никаких окружных волн не должно быть по определению. Причем эти паразитные ошибки нарастают с течением времени, что делает расчет 3D-задач на достаточно продолжительных временных интервалах практически невозможным.

Несмотря на значительный интерес к изучению поведения многослойных полых цилиндров и сфер из КМ при внутреннем взрывном нагружении и наличие коммерческих ППП, теоретическому исследованию НДС, особенно прочности, таких конст-

руктивных элементов на основе применения трехмерных уравнений динамических теорий упругости [9] и упругопластичности [10] анизотропного тела, а также современных теорий прочности анизотропных материалов уделяется в зарубежной литературе мало внимания [2]. В основном работы посвящены анализу НДС и прочности при статических условиях нагружения, определению собственных частот и форм колебаний, их динамической реакции в оболочечном приближении [2]. При этом традиционным является подход, который базируется на замене каждого спирально армированного слоя композитного материала гомогенным спирально ортотропным телом.

Для импульсно нагруженных многослойных полых цилиндров со спиральной ортотропией каждого слоя одно- (1D) (бесконечно длинные цилиндры при осесимметричной нагрузке), двух- (2D) (цилиндры конечной длины при осесимметричной нагрузке либо бесконечно длинные цилиндры при неосесимметричной нагрузке) и трехмерные (3D) (цилиндры конечной длины при неосесимметричной нагрузке) нестационарные задачи определения НДС и оценки прочности в линейной, в геометрически и физически нелинейных постановках, а также аналитические (инженерные) методы определения НДС динамически нагруженных неоднородных спирально ортотропных полых цилиндров рассматривались и разрабатывались в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины [11–35]. При этом в [11–19] изучались только случаи цилиндрической ортотропии, а в [20–35] задачи решались в более общей постановке – для спирально ортотропных слоев. Материалы со спиральной и цилиндрической трансропией, а также изотропией свойств автоматически были включены в эту общую постановку как частные случаи. Одномерная задача для сферически трансропной многослойной полый сферы при центрально-симметричном взрыве рассматривалась ранее [36].

Все динамические краевые задачи для цилиндров решались в цилиндрических координатах  $x$ ,  $\varphi$ ,  $r$  [11–35]. При их численном интегрировании использовались явные по времени схемы МКР. Линейные задачи (небольшие нагрузки, малые упругие деформации и перемещения) решались МКР в перемещениях [11, 12, 14, 15, 17] либо с помощью линеаризованного двухмерного алгоритма Уилкинса [14, 17, 18, 32, 33]. Для неосесимметричных задач применялись численно-аналитические методики, основанные либо на разложении неизвестных в ряды Фурье [14, 17, 18, 32, 33], либо на использовании метода Бубнова–Галеркина [14–17] по угловой координате с последующим применением двухмерного алгоритма Уилкинса [37]. Как показывают исследования [19, 31], классический двухмерный осесимметричный алгоритм Уилкинса хорошо себя зарекомендовал при решении линейных и нелинейных задач как при малых, так и при больших (вплоть до достижения квазистатического нагружения) временах расчета. Поэтому в работах [20–35], где задачи рассматривались в наиболее общей постановке (спиральная ортотропия), использовался именно этот алгоритм либо его модификации.

Целью данной работы является описание созданного в последнее время в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины специализированного ППП для расчета динамического одно-, двух- и трехмерного НДС и прочности многослойных полых спирально ортотропных цилиндров конечной и бесконечной длины [20–35], а также решения одномерных задач для трансропных полых сфер. В данном пакете, который начал разрабатываться в 2003 г. на основе алгоритмов [11–35] и модификации ранее созданных ППП, устранен ряд недостатков, имеющихся в коммерческих ППП.

Программа создана для платформы Windows на объектно-ориентированном языке программирования Object Pascal. Для визуализации задачи и результатов расчета использована платформонезависимая библиотека трехмерной компьютерной графики OpenGL. Приложение состоит из отдельных визуальных и не визуальных модулей, что позволяет легко модифицировать (изменять, добавлять/удалять) различ-

ные компоненты, использовать новые возможности и развивать пакет в целом. Поскольку программа имеет графический оконный интерфейс, пользователь в интерактивном диалоговом режиме может управлять параметрами решаемой задачи. В результате работы программы получен полный набор компонентов НДС и значений критериев прочности в заданный момент времени в произвольной точке расчетной области. Имеется также демонстрационная версия программы, единственным ограничением которой является количество запусков приложения – 100 раз.

Управление программой осуществляется из главного окна и имеет диалоговый интерфейс. Все параметры для выполнения расчета конкретной задачи можно задать в соответствующих формах: “База материалов”, “Геометрия”, “Нагрузка”, “Сетка” и сохранить в отдельном файле конфигурации. Для ввода используются редактируемые, взаимозависимые и информационные поля, выпадающие списки и подменю, таблицы и файлы данных. Информационные поля имеют ограничения на ввод некорректной информации и всплывающие подсказки с описанием (пояснение и пределы применимости). Для удобства работы некоторые действия можно выполнять как с помощью “мыши”, так и “горячих” клавиш клавиатуры.

Нагружение полых цилиндров и сфер в ППП осуществляется взрывом линейного или сосредоточенного заряда взрывчатого вещества (ВВ), расположенного во внутренней полости цилиндра либо в центре сферы.

В разработанном ППП моделирование взрывного нагружения может выполняться с помощью ряда инженерных методик, отобранных по результатам тестовых расчетов из большого количества известных способов математического описания одномерных ударных волн (УВ), возникающих при взрыве сосредоточенного заряда ВВ в воздухе.

1. Методика, основанная на эмпирических зависимостях, предложенных в [38]. Данная модель нашла широкое применение в зарубежной литературе при описании поведения различных элементов конструкций при взрывной нагрузке. В ней используется закон подобия, согласно которому при одинаковом значении параметра  $Z$ , зависящего от массы ВВ и расстояния до взрыва, наблюдаются одинаковые УВ. Параметр  $Z$  определяется как  $Z = r/M_{ТНТ}^{1/3}$ , где  $M_{ТНТ}$  – масса заряда (в кг) тротилового (тринитротолуолового – ТНТ) эквивалента;  $r$  – расстояние до заряда (в м).

Методика применима в диапазоне  $0,147 < Z < 40$  м/кг<sup>1/3</sup>.

2. Методика, учитывающая нерегулярное отражение УВ [39]. Если фронт падающей УВ образует некоторый угол  $\alpha \geq \alpha_{кр}$  с поверхностью стенки, реализуется нерегулярное (нелинейное) отражение, суть которого заключается в том, что распространяющаяся по возмущенной среде волна догоняет падающую и, сливаясь с ней, образует третью волну, называемую головной УВ, или волной Маха. Это приводит к зависимости коэффициента отражения УВ  $C_r$  от угла падения  $\alpha$  и амплитуды давления  $P_{int}$  падающей УВ. Действующее на стенку элемента конструкции давление  $P_{load}$  определяется из выражения  $P_{load} = P_{int} C_r$ .

Коэффициент отражения  $C_r$  в разработанном ППП автоматически выбирается из таблицы по значениям  $P_{int}$  и  $\alpha$ . Точность значения  $P_{int}$ , которое находится с помощью зависимости Кинни [40], мало отличается от полученного по выражению, представленному в [38]. Остальные параметры УВ определяются по методике, описанной в п. 1. Методика применима в диапазоне  $0,15 < Z < 20$  м/кг<sup>1/3</sup>.

3. В методике, предложенной в работе [41], профиль давления  $P(r, t)$ , действующий на внутреннюю поверхность оболочки при подрыве в ее центре сферического заряда ВВ, описывается эмпирической зависимостью

$$P(r, t) = kQ_{ВВ} Z^{-3} H(krQ_{ВВ}^{-1/2} - t),$$

где

$$k = 0,32(3\gamma - 1)/(\gamma^2 - 1);$$

$Q_{BB}$  – теплотворная способность ВВ;  $\gamma$  – показатель адиабаты в уравнении состояния ВВ;  $H(t)$  – функция Хевисайда.

4. В методике, представленной в работе [42], используются эмпирические зависимости для определения избыточного давления  $\Delta P$  в ближней зоне взрыва сферического заряда в виде

$$\Delta P = P_0 e^{-t/\theta},$$

где

$$\theta = 10^{-6} (r/r_0)^{1,6}, \text{ с}; \quad P_0 = 100/(r/r_0)^{1,38}, \text{ МПа};$$

$r_0$  – радиус заряда ТНТ-эквивалента. Данные выражения справедливы в диапазоне  $1 \leq r/r_0 \leq 16$ . Эта методика применяется совместно с описанной в п. 3 при расчете  $P_{int}$ .

Во всех методиках расчеты проводятся для ТНТ. При использовании ВВ другого типа необходимо провести перерасчет его массы  $M_{BB}$  в эквивалентную массу ТНТ  $M_{ТНТ}$  по формуле [40]

$$M_{ТНТ} = M_{BB} Q_{BB} / Q_{ТНТ},$$

где  $Q_{ТНТ}$  – удельная теплота (теплотворная способность) ТНТ.

В коммерческих ППП ABAQUS и LS-DYNA расчет параметров взрывного нагружения проводится по методике, рассмотренной в п. 1, или с помощью технологии ALE (произвольная лагранжево-эйлерова сетка) [4, 7]. В разработанном ППП учет нерегулярного отражения УВ позволяет в ряде случаев более точно описать распределение давления по внутренней поверхности цилиндра. Кроме того, применение данных методик приводит к значительному сокращению машинного времени для численного решения задачи по сравнению с технологией ALE.

Наружная цилиндрическая поверхность той или иной оболочки принята свободной от напряжений.

Краевые условия на торцах цилиндра могут быть нескольких видов. Для осесимметричных задач (2D-опция, сферический или линейный заряд ВВ расположен на оси цилиндра) торцы могут быть свободными, неподвижно либо скользяще закрепленными. Для неосесимметричных задач (3D-опция, сферический или линейный заряд ВВ имеет радиальное смещение относительно оси цилиндра) торцы могут быть неподвижно либо скользяще закрепленными.

В расчетах бесконечно длинных цилиндров при линейном заряде ВВ используется условие плоской деформации, расчетная область разбивается на две ячейки вдоль оси (шаг по оси обычно выбирается равным шагу по радиусу), на мнимых торцах записываются условия скольжения, которые математически эквивалентны условиям плоской деформации либо симметрии, что в данном случае одно и то же. При этом осесимметричные динамические краевые задачи вырождаются по пространству в одномерные, неосесимметричные – в двухмерные.

Созданный специализированный ППП содержит два основных вышеописанных независимых блока (2D- и 3D-опции).

Если заряд ВВ расположен на оси цилиндра, НДС становится осесимметричным, в общем случае двухмерным, за исключением случая бесконечно длинного цилиндра в условиях плоской деформации, когда задача вырождается в одномерную, и используется 2D-опция. Задача может рассматриваться в геометрически и физически нелинейной постановке, линейные случаи следуют из общей постановки как частные. Используются динамические уравнения теории упругости спирально ортотропного тела в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии [9, 31]. Материалы слоев могут также деформироваться пластически, при этом используются

уравнения теории течения ортотропной среды без упрочнения [10, 30, 31], вырождающиеся для изотропных материалов в теорию течения Прандтля–Рейса. Цилиндрически ортотропные, спирально либо цилиндрически транслопные, а также изотропные слои являются частными случаями спирально ортотропных. При численном интегрировании нестационарной двухмерной осесимметричной краевой задачи используется традиционный алгоритм Уилкинса [37], модифицированный для спирально ортотропных слоев [30, 31], который, как известно, позволяет учитывать как физическую (пластичность), так и геометрическую (большие повороты, деформации и перемещения) нелинейности. Подробная математическая постановка, описание численного метода и конечноразностных уравнений, тестовые и модельные расчеты НДС и прочности (в том числе сравнение с известными экспериментальными результатами), полученные с использованием разработанного ППП, приведены ранее [31].

Если заряд ВВ имеет радиальное смещение относительно оси цилиндра, НДС становится неосесимметричным, в общем случае трехмерным, за исключением случая бесконечно длинного цилиндра в условиях плоской деформации, когда задача вырождается в двухмерную, и используется 3D-опция. Задача решается в линейной постановке: предполагается, что деформации и перемещения являются достаточно малыми, а материалы слоев деформируются упруго вплоть до разрушения. Используются трехмерные уравнения динамической теории упругости спирально ортотропного тела в цилиндрических координатах в общей неосесимметричной постановке [9, 32, 33]. Как и в 2D-опции, случаи цилиндрической ортотропии, спиральной и цилиндрической транслопии, а также изотропии получаются при этом автоматически как частные. Как показано ранее [14, 17, 18, 32, 33], для тел вращения и упругих деформаций при решении линейной задачи, если зависимость НДС от окружной координаты  $\varphi$  обусловлена только неосесимметричностью нагружения, хорошо зарекомендовал себя численно-аналитический метод, основанный на разложении переменных в ряды Фурье по  $\varphi$  (первый этап), в результате чего исходная нестационарная трехмерная краевая задача сводится к набору двухмерных. Этот метод и был использован в созданном специализированном ППП. На втором этапе полученные после тригонометрических разложений двухмерные динамические краевые задачи интегрируются численно с применением линеаризованного двухмерного алгоритма Уилкинса. Рассчитывается полный набор данных для определения НДС в любой точке расчетной трехмерной области для текущего момента времени путем суммирования по гармоникам для конкретной угловой координаты, задаваемой пользователем.

При необходимости проверка прочности проводится в каждой конечноразностной ячейке расчетной области на каждом временном шаге. В этом случае также необходимо варьировать координату  $\varphi$  с достаточно мелким шагом, что существенно увеличивает компьютерное время расчета по сравнению с таковым при определении только НДС.

В созданном ППП начальную прочность можно оценивать по наиболее распространенным в приложениях феноменологическим критериям [3]: максимальных напряжений, максимальных деформаций, Ашкенази, Хофмана, обобщенному Мизеса (в некоторых литературных источниках он получил название критерий Цая–Ву). Следует отметить, что эти критерии применяются и в отмеченных выше коммерческих ППП. Используемый в приложениях для решения двухмерных задач критерий Хилла для трехосного НДС, как показывает анализ [3], обладает рядом существенных недостатков. Поэтому в разработанном ППП он не представлен. Критерий Ашкенази используется только для равнопрочных КМ при растяжении и сжатии, все остальные – как для равно-, так и неравнопрочных материалов.

С помощью ППП можно оценить прочность в текущий момент времени во всей расчетной области: отслеживается максимальная по всему объему исследуемого тела

величина функции прочности  $\Phi_{\max}$  на каждом временном шаге посредством того или иного (либо нескольких сразу) критерия прочности. Если соблюдается условие  $\Phi_{\max} \leq 1$ , конструкция считается прочной. При  $\Phi_{\max} > 1$  условие прочности не выполняется, и прочность конструкции в данной точке (конечноразностной ячейке) конструктивного элемента в настоящий момент времени нарушается.

Отметим, что при задании прочностных характеристик КМ в ППП при использовании критериев Хофмана и Ашкенази следует проверять выполнение необходимых и достаточных условий устойчивости [43, 44]. Для квадратичных критериев прочности Хофмана и обобщенного Мизеса в случаях транслопных и изотропных материалов добавляется проверка условий инвариантности [3, 34, 43].

Математическая постановка, описание численно-аналитического метода, различия между линейризованным алгоритмом Уилкинса и традиционным, тестовые и модельные расчеты, в том числе сравнение с результатами, полученными с использованием коммерческого ППП LS-DYNA, приведены в [32, 33]. Подробно численно-аналитический метод, включая все промежуточные этапы (формулировка разрешающих двумерных динамических краевых задач, получаемых после разложений переменных в ряды Фурье по  $\varphi$ , и их конечноразностная аппроксимация), описан в работе [45].

Для контроля вычислений в программе предусмотрена визуализация зависимостей компонент напряжений, деформаций, перемещений и критериев прочности от времени в виде диаграмм и векторных полей. Такое представление позволяет контролировать величины искомых функций, их динамику и распределение по расчетной области, прекратить вычисления при неустойчивости решения и в случае превышения критериев прочности, в результате чего сокращается время вычислений при вариации параметрами. Процесс расчета и получаемые результаты представлены в окнах “Расчет” и “Графика”. По окончании расчета избранные результаты можно сохранить в текстовом файле или экспортировать в приложение MS Office Excel.

Таким образом, как двух-, так и трехмерные динамические краевые задачи в предложенном ППП сводятся к двумерным и интегрируются в цилиндрических координатах с использованием явной схемы по времени на двумерной конечноразностной сетке МКР без привлечения трехмерной дискретизации расчетной области и динамического трехмерного МКЭ в декартовых координатах, как это традиционно принято в современных коммерческих пакетах [4–7]. Это позволяет значительно упростить для пользователя подготовку входных данных и уменьшить компьютерное время решения задач, упростить получение выходных данных, существенно сэкономить требуемый для расчета объем оперативной памяти и, как следствие, точнее рассчитывать НДС и прочность на мелких 2D-сетках по сравнению с более крупной 3D-дискретизацией расчетной области при одних и тех же размерах массивов переменных, а также благодаря использованию глобальной цилиндрической системы координат получать более точные результаты по НДС и прочности исследуемого цилиндрического объекта по сравнению с таковыми при использовании коммерческих ППП [4–7], блочная структура пакета дает возможность вводить дополнительные относительно несложные подпрограммы, не требующие высокой квалификации в области программирования, позволяющие оценивать прочность по иным, отличающимся от описанных выше, критериям.

Ограничения разработанного ППП по сравнению с коммерческими аналогами заключаются в следующем:

- узкий класс решаемых задач;
- для расчета пластичности используется только теория течения без упрочнения (Прандтля–Рейса);
- отсутствие возможности рассчитывать прогрессирующее разрушение;
- возможность численного расчета неосесимметричных задач только в линейных постановках.

В заключение отметим, что в предложенном ППП реализована также опция для решения линейных одномерных задач для многослойных упругих полых сфер при центрально-симметричной импульсной нагрузке [36]. Слои – сферически транслопные или изотропные. Задача численно решается в перемещениях по явной схеме МКР типа “крест” [11, 12, 15, 36]. Пакет прикладных программ позволяет определять НДС таких объектов и оценивать их прочность с помощью вышеуказанных критериев.

## Резюме

Описано розроблений в Інституті проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України пакет прикладних програм для розрахунку напружено-деформованого стану і міцності багатослойових композитних циліндрів і сфер під дією внутрішнього імпульсного навантаження. Показано його переваги й обмеження порівняно із сучасними зарубіжними комерційними аналогами.

1. *Летихин П. П., Ромащенко В. А., Бахтина Е. В.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 1. Экспериментальные исследования // Пробл. прочности. – 2013. – № 1. – С. 17–32.
2. *Летихин П. П., Ромащенко В. А.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 2. Теоретические методы // Там же. – № 2. – С. 31–45.
3. *Летихин П. П., Ромащенко В. А.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 3. Феноменологические критерии прочности // Там же. – № 3. – С. 24–41.
4. *ABAQUS 6.14. Theory Manual.* – Dassault Systèmes, 2014. – 1174 p.
5. *ABAQUS 6.14. Analysis User’s Guide. Vol. II: Analysis.* – Dassault Systèmes, The 3D EXPERIENCE Company, 2014. – 1489 p.
6. *ANSYS Documentation. Release 15.0.* – ANSYS Inc.
7. *LS-DYNA. Theory Manual.* – Livermore Software Technology Corporation, Livermore, 2014. – 818 p.
8. *Кукуджанов В. Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Усп. механики. – 1985. – 8, № 4. – С. 21–65.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
10. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
11. *Галиев Ш. У., Ромащенко В. А., Алтаудзе З. Г.* Влияние анизотропии и вязкости на распространение волн в многослойных цилиндрах // Пробл. прочности. – 1983. – № 9. – С. 40–44.
12. *Галиев Ш. У., Ромащенко В. А.* Нестационарная динамика и прочность полых вязкоупругих анизотропных многослойных цилиндров конечной длины // Механика композитных материалов. – 1984. – № 4. – С. 681–685.
13. *Ромащенко В. А.* Вязкоупругопластические волны в окрестности угловых точек анизотропных оболочек // Пробл. прочности. – 1984. – № 10. – С. 89–92.



14. Галиев Ш. У., Алтаидзе З. Г., Ромащенко В. А. и др. Методики численного расчета анизотропных полых тел вращения на импульсные нагрузки / Ин-т проблем прочности АН УССР. – Препр. – Киев, 1984. – 54 с.
15. Галиев Ш. У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
16. Галиев Ш. У., Ромащенко В. А. Численное исследование трехмерных нелинейных волн в составных телах вращения // Механика композитных материалов. – 1989. – № 1. – С. 136–141.
17. Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
18. Ромащенко В. А. Методика решения трехмерных нелинейных динамических задач для составных тел вращения // Пробл. прочности. – 1993. – № 6. – С. 60–70.
19. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Корбач В. Г. Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек // Там же. – 2003. – № 1. – С. 76–86.
20. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Деменко В. Ф. Численное исследование динамики цилиндрических спирально армированных толстостенных оболочек // Авіац.-косм. техніка і технологія. – 2003. – Вип. 5 (40). – С. 56–60.
21. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных толстостенных оболочек с винтовой ортотропией // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 13–20.
22. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Деменко В. Ф. Численное моделирование динамики толстостенных многослойных спирально армированных цилиндрических оболочек // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2004. – Вып. 23. – С. 170–182.
23. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных ортотропных толстостенных оболочек // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2004. – № 1 (22). – С. 136–141.
24. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Численное исследование динамики многослойных толстостенных спирально-ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 99–110.
25. Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Численное исследование динамики толстостенных цилиндрических спирально армированных оболочек // Механика композитных материалов. – 2005. – № 2. – С. 225–236.
26. Прочность материалов и конструкций. – Киев: Академперіодика, 2-е изд., 2006. – 1088 с.
27. Ромащенко В. А. Динамическая задача для несжимаемого многослойного цилиндра с винтовой анизотропией. Сообщ. 1. Теория // Пробл. прочности. – 2006. – № 2. – С. 114–123.
28. Ромащенко В. А. Динамическая задача для несжимаемого многослойного цилиндра с винтовой анизотропией. Сообщ. 2. Расчеты // Там же. – 2007. – № 1. – С. 114–120.
29. Ромащенко В. А. Решения динамических задач для несжимаемых и слабо сжимаемых спирально ортотропных неоднородных толстостенных цилиндров // Прикл. математика и механика. – 2007. – № 1. – С. 56–65.

30. *Ромащенко В. А.* Численное исследование нелинейной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 110–121.
31. *Летихин П. П., Ромащенко В. А.* Прочность толстостенных оболочек вращения при импульсном нагружении // Прочность материалов и конструкций / Под общ. ред. В. Т. Трошенко. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2010. – Т. 3. – 320 с.
32. *Ромащенко В. А., Бейнер О. С., Бабич Ю. Н.* Численно-аналитический метод исследования трехмерной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2011. – № 4. – С. 103–113.
33. *Ромащенко В. А., Бейнер О. С.* Численное исследование трехмерной динамики и прочности многослойных спирально ортотропных цилиндров // Там же. – 2012. – № 2. – С. 101–112.
34. *Ромащенко В. А.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропного материала // Там же. – № 4. – С. 42–57.
35. *Ромащенко В. А., Бабич Ю. Н., Бахтина Е. В.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 2. Численная оценка прочности многослойных цилиндров конечной длины при внутреннем взрыве // Там же. – № 5. – С. 56–68.
36. *Ромащенко В. А., Тарасовская С. А.* Динамическая задача теории упругости для трансформной многослойной сферы // Там же. – 2011. – № 2. – С. 93–107.
37. *Уилкинс М. Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
38. *Randers-Pehrson G. and Bannister K. A.* Airblast Loading Model for Dyna-2D & Dyna-3D. – Army Research Laboratory. – ARL-TR-1310. – 1997. – 97 p.
39. *Chock M. K.* Review of Methods for Calculating Pressure Profiles of Explosive Air Blast and Its Sample Application. – Blacksburg, Virginia, 1999. – 125 p.
40. *Kinney G. F. and Grahm K. J.* Explosive Shocks in Air. – Berlin: Springer, 1985. – 269 p.
41. *Адищев В. В., Корнев В. М., Талзи Л. А.* Оценка максимальных напряжений в замкнутых цилиндрических сосудах при осесимметричном взрывном нагружении. – Новосибирск, 1983. – Деп. в ВИНТИ, № 6588-83.
42. *Адушкин В. В.* О формировании ударной волны и разлете продуктов взрыва в воздухе // Прикл. механика и теорет. физика. – 1963. – № 5. – С. 107–115.
43. *Ромащенко В. А.* Конкретизация квадратичного критерия прочности ортотропного материала // Пробл. прочности. – 2013. – № 5. – С. 28–38.
44. *Ромащенко В. А.* О шестимерных гиперповерхностях прочности второго порядка ортотропных материалов // Там же. – 2014. – № 1. – С. 72–79.
45. *Летихин П. П., Ромащенко В. А.* Прочность неоднородных анизотропных полых цилиндров при импульсном нагружении. – Киев: Наук. думка, 2014. – 232 с.

Поступила 02. 12. 2014