https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.010
УДК 514

Є.П. Устянич, А.Є. Устянич

Технофарм, інкорп., Торонто, Канада
E-mail: austyanich@gmail.com

Про практичний спосіб визначення довжини еліпса

Представлено академіком НАН України А.А. Мартинюком

Описано практичний і високоточний спосіб визначення довжини еліпса, який не потребує використання таблиць для еліптичних інтегралів другого роду в формі Лежандра. На основі прийнятого авторами постулату, що еліпс є проєкцією кола, виведено нову універсальну формулу обчислення довжини еліпса. Оскільки еліпс є проєкцією кола, нахиленого під довільним кутом до площини, то рівняння довжини еліпса аналітично і функціонально пов'язане з рівнянням довжини кола. Лінія проєкції кола являє собою "подвійну" і неперервну криву Жордана, при цьому співвідношення довжин осей еліпса (проєкції кола) зменшується від 1 до 0. Якщо мала вісь дорівнює 0, то довжина "подвійної" лінії проєкції дорівнює подвійному діаметру кола. Збільшуючи кут нахилу, "подвійна" лінія проєкції кола роздвоюється, формуючи еліпс, співвідношення осей якого збільшується від 0, якщо $\alpha = 90°$, *до 1 у випадку* $\alpha = 180°$. *Таким чином, основним параметром запропонованого розрахунку є співвідношення довжин півосей еліпса. Це дало змогу вивести нелінійне рівняння розрахунку довжини еліпса з високою точністю в усьому інтервалі зміни відношення його осей.*

Ключові слова: *еліпс, формула для визначення довжини.*

Однією з вельми популярних замкнутих алгебраїчних кривих на площині є еліпс (див. [1] і бібліографію там).

Вивчення властивостей еліпса сягає ще часів Евкліда і започатковане в працях Аппpolонія Пергського (див. [2, с. 32]). Зокрема, було встановлено рівняння конічних перетинів $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, де p — параметр конічного перерізу. Якщо $\frac{p}{a} < 0$, це є рівняння еліпса в системі прямокутних координат, осями якої є вісь симетрії еліпса, що містить його величину, вісь і дотична до еліпса в лівому кінці великої осі.

Детальна характеристика еліпса міститься в багатьох роботах з геометрії (див., наприклад, [1] і бібліографію там). Застосування виробів еліптичної форми в різних галузях промисловості представлено в публікаціях [4, 5].

Метою цієї роботи є розробка практичного способу визначення довжини контуру еліпса за характерними лінійними параметрами, наприклад, довжинами осей (півосей) еліпса, або коефіцієнтом стиску еліпса і довжиною однієї з його осей.

Цитування: Устянич Є.П., Устянич А.Є. Про практичний спосіб визначення довжини еліпса. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 9. С. 10–18. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.09.010

1. Еліпс як проєкція кола. Будемо розглядати еліпс як проєкцію кола на площину (рисунок). Залежно від кута нахилу α проєкція кола має форму еліпса, співвідношення осей (півосей) якого може змінюватися від 1 до 0. Якщо коло "лежить" на площині ($\alpha = 0$), то проєкція цього кола теж має форму кола такого ж діаметра. Якщо коло, що лежить на площині, піднімати за один край (А), збільшуючи кут нахилу до площини від 0 до 90°, то проєкція кола змінюється — "стискається" від форми кола до лінії, довжина якої дорівнює діаметру кола.

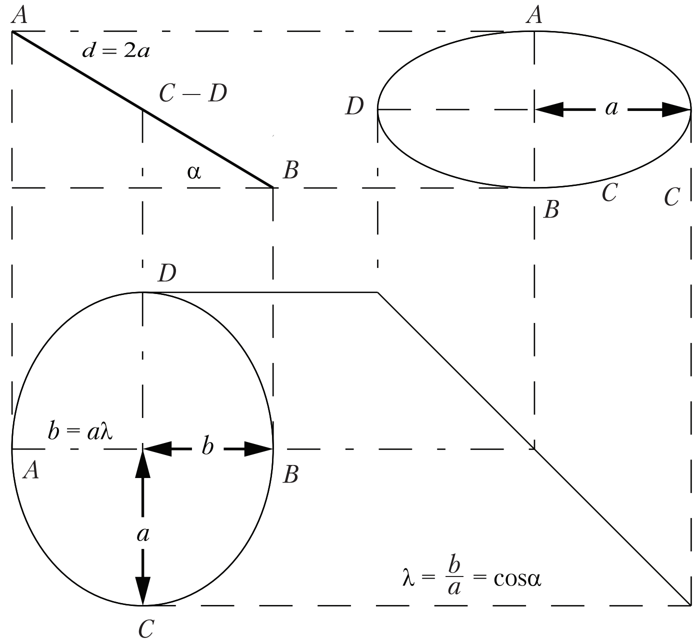

Схема побудови еліпса, як проєкції кола $A—D—B—C$ діаметром $2a$, на горизонтальну і вертикальну площини

Ця лінія проєкції кола "подвійна" і неперервна (замкнена сама на себе), оскільки на неї спроєктовано дві половини кола, що розміщені по обидва боки від горизонтально розміщеного діаметра. При цьому співвідношення осей еліпса (проєкції кола) зменшується від 1 до 0. Якщо мала вісь стає рівною нулю, то довжина "подвійної" лінії проєкції дорівнює подвійному діаметру кола. Отже, у випадку $\alpha = 90°$ дожина еліпса

$$L_e = 2d = 4a. \tag{1}$$

Зі збільшенням кута нахилу від 90 до 180° "подвійна" лінія проєкції кола роздвоюється, формуючи еліпс, співвідношення осей якого збільшується від 0, *якщо* $\alpha = 90°$, до 1 у випадку $\alpha = 180°$ (*у радіанній мірі до значення* π). При цьому коло проєктується на площину з протилежного боку від осі повороту.

Оскільки *еліпс є проєкцією кола*, нахиленого під довільним кутом до площини, то рівняння довжини еліпса L_e *аналітично* (*функціонально*) пов'язане з рівнянням довжини кола

$$L_e = f(L_k) = f(2\pi R). \tag{2}$$

Запишемо рівняння довжини кола у такій формі:

$$L_k = \pi d = \pi(R + R). \tag{3}$$

Аналогічно запишемо рівняння для визначення довжини еліпса через середній діаметр еліпса, тобто через суму його півосей:

$$L_e = \pi \overline{d} = \pi(a + b). \tag{4}$$

З аналізу рівняння (4) маємо:

якщо $b = a$, то

$$L_e = \pi(a+a) = 2\pi a = L_k, \tag{5}$$

якщо $b = 0$, то

$$L_e = \pi(a+0) = \pi a = \frac{1}{2} L_k. \tag{6}$$

Як бачимо, з рівняння (4) отримуємо точний результат (5) лише у випадку $b = a$, тобто коли еліпс набуває форми кола. Якщо $b = 0$, максимальна абсолютна похибка результату розрахунку довжини еліпса (6) за рівнянням (4): $L_e = \pi(a+0) = \pi a$ і дійсним значенням довжини еліпса (*проєкції кола*) за рівнянням (1) становить:

$$\Delta L_e = 4a - \pi a = a(4-\pi). \tag{7}$$

У відносних одиницях максимальна похибка розрахунку за рівняннями (1) і (4), якщо $b = 0$, становить 21,46 %.

Такий результат не може бути прийнятним для практичного застосування, тому рівняння (4) потребує корегування.

2. Лінійне рівняння довжини еліпса. Похибка розрахунку довжини еліпса (*проєкції кола*) зростає поступово від нуля до максимального значення $\Delta L_{e\max} = a(4-\pi)$ зі збільшенням кута нахилу кола α від $0°$ до $90°$ (див. рисунок). Це свідчить про те, що ця похибка має систематичний характер, залежить від кута нахилу кола і збільшується обернено пропорційно збільшенню кута нахилу. Для компенсації похибки в рівняння (4) вводимо поправку.

Як видно на рисунку, ця поправка повинна враховувати обернену пропорційність систематичної похибки залежно від косинуса кута нахилу кола *без врахування нелінійності цієї похибки*.

1. Обернену пропорційність виражаємо змінною величиною ($1-\cos\alpha$).

2. Приймаємо за вісь повороту горизонтальний діаметр кола $C - D = 2a$, кут нахилу відраховуємо відносно горизонтальної площини, що проходить через цей діаметр.

3. Виражаємо в радіанній мірі максимальний сумарний діапазон зміни кута нахилу лівого і правого півкола $2\alpha_{\max} = 2 \cdot 90° = 180° = \pi$.

4. Відносимо максимальну систематичну похибку розрахунку довжини еліпса $\Delta L_{e\max}$ до сумарного кута нахилу лівого і правого півкола $2\alpha_{\max} = \pi$ з врахуванням оберненої пропорційності зміни похибки.

5. У рівняння вводимо коефіцієнт “стиску”, який являє собою співвідношення осей (півосей) еліпса b/a і споріднений з колом через кут нахилу.

6. Виражаємо малу піввісь еліпса b через велику піввісь a і їх співвідношення. Тоді рівняння довжини еліпса запишемо так:

$$L_e = \pi\left[(a+b) + \frac{\Delta L_{e\max}}{2\alpha_{\max}}(1-\cos\alpha)\right] = \pi\left[\left(a + a\frac{b}{a}\right) + \frac{a(4-\pi)}{\pi}\left(1 - \frac{b}{a}\right)\right]. \tag{8}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2020. № 9

Ввівши заміну $\frac{b}{a} = \lambda = \cos\alpha$ (див. рисунок 1) і виконавши дії, одержимо ***лінійне рівняння для визначення довжини еліпса***, яке (*залежно від вихідних даних*) запишемо у вигляді

$$L_e = \pi a \begin{cases} \left[(1+\lambda) + \frac{(4-\pi)}{\pi}(1-\lambda)\right]; \\ \left[\frac{4}{\pi}(1-\lambda) + 2\lambda\right]; \\ \left[\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{b}{a}\right) + 2\frac{b}{a}\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Рівняння (9) включає три форми запису, які рівносильні і випливають із рівняння (8). Усі три вирази у рівнянні (9) рівні між собою, а постійна величина πa визначає довжину півкола, побудованого на великій осі еліпса.

Спорідненість рівняння (9) для визначення довжини еліпса і рівняння довжини кола $(L_k = 2\pi a)$, побудованого на великій осі еліпса як на діаметрі, запишемо у вигляді добутку довжини кола, помноженого на змінний коефіцієнт, який залежить від відношення півосей еліпса $\frac{b}{a}$. Для цього скористаємося будь-якою формою запису рівняння (9). Винісши двійку за квадратні дужки, згрупуємо подібні члени у квадратних дужках і введемо заміну $\frac{b}{a} = \lambda$, одержимо

$$L_e = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}\right] = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi} + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\lambda\right]. \tag{10}$$

Отже, лінійне рівняння довжини еліпса, *виражене через довжину кола і змінний коефіцієнт, що залежить від відношення осей (півосей) еліпса*, має вигляд

$$L_e = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi} + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\lambda\right]. \tag{11}$$

Як випливає з (11), вираз $(2\pi a)$ визначає довжину кола, побудованого на великій осі еліпса $(2a)$, а вираз у квадратних дужках $\left[\frac{2}{\pi} + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\lambda\right]$ являє собою змінний коефіцієнт, числове значення якого змінюється від 1 до $\left(\frac{2}{\pi}\right)$ при зміні співвідношення $\left(\lambda = \frac{b}{a}\right)$ від 1 до 0.

Одержане лінійне рівняння (11) для визначення довжини еліпса рівносильне всім трьом формам запису рівняння (9).

Результати обчислення довжини еліпса за рівняннями (9) та (11) у випадку граничних значень відношення півосей еліпса $\frac{b}{a} = \lambda$. Якщо $b = a$, то, згідно із будь-якою формою запису (9) або рівняння (11), одержимо

$$L_e = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}\right] = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi} + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\lambda\right] = 2\pi a\,.$$

Якщо $b = 0$, то

$$L_e = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{b}{a}\right)+\frac{b}{a}\right] = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi}+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\lambda\right] = 4a$$

Як бачимо, обчислення довжини еліпса за рівняннями (9) та (11) дає точний результат (*похибка розрахунку згідно з* (1) *та* (5) *дорівнює нулю*) у випадку граничних значень зміни відношення $\frac{b}{a} = \lambda$.

Однак у міру віддалення відношення $\frac{b}{a} = \lambda$ від граничних значень систематична похибка (похибка методу) нелінійно зростає від нуля до максимального значення, який становить приблизно 6 % у середині інтервалу зміни λ. Відповідно, результат розрахунку довжини еліпса за рівняннями (9) та (11) еквівалентно завищений у точках інтервалу, що віддалені від граничних значень λ.

3. Нелінійне рівняння довжини еліпса. З метою підвищення точності розрахунку довжини еліпса за рівнянням (11) в усьому інтервалі між граничними значеннями співвідношення $\frac{b}{a} = \lambda$ необхідно виключити (*звести до мінімуму*) систематичну похибку, похибку методу, максимальне значення якої має місце всередині інтервалу зміни відношення півосей еліпса.

Для цього потрібно розглядати нелінійне рівняння таким чином, щоб гладка крива розв'язку цього рівняння давала точний результат щонайменше у трьох точках інтервалу зміни $\left(\lambda = \frac{b}{a}\right)$: у двох граничних $\lambda = 1$ і $\lambda = 0$ та середньому значенні $\lambda = 0{,}5$.

У рівнянні (11) змінною величиною є співвідношення λ і від його значення нелінійно залежить величина систематичної похибки. Перепишемо це рівняння у вигляді показниково-степеневої функції і розкриємо степінь нелінійності систематичної похибки:

$$L_e = 2\pi a\left[\frac{2}{\pi}+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\lambda)^k\right]. \quad (12)$$

Якщо показник степеня k при змінній основі λ дорівнює одиниці, то рівняння (12) стає лінійним і аналогічне рівнянню (11), а результат розрахунку буде включати в себе максимальну похибку, яка становить ≈ 6 %.

Щоб виключити похибку розрахунку довжини еліпса при середньому значенні $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_0+\lambda_{\max}}{2} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$, потрібно:

по-перше, обчислити або визначити будь-яким відомим високоточним способом довжину еліпса L_e при середньому значенні $\bar{\lambda} = 0{,}5$;

по-друге, визначити показник степеня k при основі λ у середній точці інтервалу зміни $\left(\lambda = \frac{b}{a} = 0{,}5\right)$.

Визначаємо довжину еліпса в середині інтервалу значень відношення $\frac{b}{a}=\bar{\lambda}=0{,}5$ при значенні півосей еліпса $a=1$; $b=0{,}5$.

У рівняння (12) підставляємо значення довжини еліпса при $a=1$; $b=0{,}5$; $\frac{b}{a}=\lambda=0{,}5$ і визначаємо показник степеня *k*:

$$L_e=2\pi\left[\frac{2}{\pi}+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\bar{\lambda})^k\right]=4+2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\bar{\lambda})^k=4{,}844224047\,.$$

Звідси

$$(\bar{\lambda})^k=\frac{L_e-4}{2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}=\frac{4{,}844224047-4}{2{,}283185307}=0{,}36975713\,,$$

і

$$\lg(\bar{\lambda})^k=\lg 0{,}36975713=k\lg(\bar{\lambda})\,.$$

Показник степеня

$$k=\frac{\lg 0{,}36975713}{\lg(\bar{\lambda}=0{,}5)}=1{,}435350127\approx 1{,}435350.$$

Визначення довжини еліпса з високою точністю в усьому інтервалі зміни відношення його осей здійснюємо за формулою, яка має загальний вигляд

$$L_e=2\pi a\left[\frac{2}{\pi}+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^k\right];\qquad(13)$$

де $0\leqslant\left(\frac{b}{a}\right)\leqslant 1$.

Тут $k<1{,}44$ (для точного розрахунку) і $k\geqslant 1$ (для наближеного розрахунку, з максимальною похибкою ~6 %).

Формула (13) *захищена патентом України* (*див.* [3]).

4. Розрахунок довжини еліпса L_e за універсальною формулою (13). ***Результати розрахунку довжини еліпса L_e.*** Довжину еліпса L_e обчислюємо для усього інтервалу зміни відношення півосей $0\leqslant(b/a=\lambda)\leqslant 1$ за формулою (13).

Проаналізуємо похибки обчислень за формулою (13) у граничних точках інтервалу зміни відношення півосей λ.

Обчислення здійснюємо при значенні великої півосі еліпса $a=1$, враховуючи, що у випадку $\lambda=1$ еліпс вироджується в коло радіусом $R=a$, притому довжина еліпса L_e дорівнює довжині кола L_k, побудованого на великій осі еліпса, як на діаметрі. Згідно з результатами обчислень, для граничних точок $\lambda=1$ і $\lambda=0$ знаходяться похибки абсолютні ΔL_e і відносні $\Delta L_e(\%)$:

$$\lambda=1;\ \begin{vmatrix} L_e1 \\ L_e2 \\ L_e3 \\ L_e4 \\ L_e5 \end{vmatrix} = 2\pi a = 2\pi R = L_e = L_k;\ \begin{vmatrix} \Delta L_e1 \\ \Delta L_e2 \\ \Delta L_e3 \\ \Delta L_e4 \\ \Delta L_e5 \end{vmatrix} = L_e - L_k = 0;\ \begin{vmatrix} \Delta L_e1(\%) \\ \Delta L_e2(\%) \\ \Delta L_e3(\%) \\ \Delta L_e4(\%) \\ \Delta L_e5(\%) \end{vmatrix} = 0\%\,.$$

Як бачимо значення довжини еліпса ($L_e1 - L_e5$), обчислені за формулою (13) з показником $k=1$ і $k=1{,}435350$, збігаються в точці $\lambda=1$, абсолютна похибка $\Delta L_e = L_e - L_k$ дорівнює нулю і, відповідно, відносна похибка $\Delta L_e(\%) = \dfrac{\Delta L_e}{L_e}100$, виражена у відсотках, теж дорівнює нулю.

Аналогічно знаходимо похибку в другій граничній точці $\lambda=0$, у якій еліпс вироджується в подвійну лінію, довжина якої дорівнює подвоєній довжині великої осі еліпса, тобто $4a$:

$$\lambda=0;\ \begin{vmatrix} L_e1 \approx 3{,}993143738a \\ L_e2 \approx 4{,}71238898a \\ L_e3 \approx 3{,}992440664a \\ L_e4 = 4a \\ L_e5 = 4a \end{vmatrix};\ \Delta L_e = 4a - L_e = \begin{vmatrix} \Delta L_e1 \approx 0{,}00686 \\ \Delta L_e2 \approx -0{,}712389 \\ \Delta L_e3 \approx 0{,}00756 \\ \Delta L_e4 = 0 \\ \Delta L_e5 = 0 \end{vmatrix};\ \Delta L_e(\%) = \frac{\Delta L_e}{4a}100 = \begin{vmatrix} \Delta L_e1(\%) \approx -0{,}17 \\ \Delta L_e2(\%) \approx 17{,}81 \\ \Delta L_e3(\%) \approx -0{,}19 \\ \Delta L_e4(\%) = 0 \\ \Delta L_e5(\%) = 0 \end{vmatrix}.$$

Як видно з аналізу, довжина еліпса L_e у точці $\lambda=0$, обчислена за формулою (13), у випадку $k=1$, $(L_e4 = f(\lambda))$ — залежність лінійна, і у випадку $k=1{,}435350$, $(L_e5 = f(\lambda))$ — залежність нелінійна, збігається з дійсним значенням довжини еліпса, оскільки абсолютна та відносна похибки в цій точці дорівнюють нулю.

Крива L_e5 з кривою L_e1 у точці $\lambda=0{,}5$ збігаються з точністю до восьмого знаку після коми. Отже крива L_e5, єдина із розглянутих вище, точно збігається з дійсним значенням довжини еліпса у двох крайніх точках інтервалу зміни відношення півосей і з високою точністю наближається до дійсного значення довжини L_e у середній точці інтервалу у випадку $\lambda=0{,}5$.

Це свідчить про те, що L_e5 з високою точністю наближається в усьому інтервалі зміни λ до граничної уявної (*якої не існує*) кривої дійсних значень довжини еліпса, оскільки дійсні значення довжини L_e являють собою числа трансцендентні, окрім граничного значення у випадку $\lambda=0$.

Результати аналізу дають підставу для застосування формули (13) для обчислення довжини еліпса L_e з високою точністю (при $k=1{,}435350$) в усьому інтервалі зміни відношення півосей, а також проводити спрощений (наближений) розрахунок за лінійним рівнянням (при $k=1$) з максимальною похибкою не більше як 6,2 %.

5. Заключні зауваження. Як відомо (див. [6, с. 386]), довжина контура еліпса, що заданий канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a \geqslant b > 0$ обчислюється за формулою

$$L_e = 4a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin\psi} d\psi, \qquad (14)$$

де $k^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$ — квадрат ексцентриситету еліпса. Оскільки інтеграл $E(k, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin\psi} d\psi$ не інтегрується в квадратурах, застосування формули (14) пов'язано з використанням спеціальних таблиць наближених значень для еліптичних інтегралів другого роду в формі Лежандра (див. [7]).

Натомість використання на практиці формули (13) не потребує додаткових даних, крім параметрів еліпса. В цьому полягає практичне значення формули (13) для визначення довжини контуру еліпса.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. Москва: Наука, 1990. 672 с.
2. Розенфельд Б.А. Апполоний Пергский. Москва: МЦНМО, 2004. 176 с.
3. Устянич Є.П. Спосіб визначення довжини країв еліптичних виробів, отворів, ліній: пат. 74127 Україна. МПК G01B 1/00, G01B 3/00, G01B 11/00, G01B 17/00; заявл. 24.11.2011; опубл. 25.10.2012, Бюл. № 20.
4. Устянич Є. Золотий логарифм і його застосування. Еліпс і рівняння його довжини. 2-ге вид., доп. Львів: Каменяр, 2013. 164 с. (Сер. Математичні новинки).
5. Устянич А., Устянич Є. Кібернетика у фармації. Теоретичні основи оптимізації, комп'ютеризації і апаратурне оформлення для виготовлення твердих лікарських форм. Львів: Каменяр, 2013. 480 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1. Москва: Наука, 1981. 543 с.
7. Беляков В.М., Кравцова Р.И., Раппопорт М.Г. Таблицы эллиптических интегралов. Т. 1, 2. Москва: Наука, 1962—1963.

Надійшло до редакції 18.05.2020

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. D., Netsvetaev, N. Yu. (1990). Geometry. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Rosenfeld, B. A. (2004). Appollonii Pergskii. Moscow: MCNMO (in Russian).
3. Pat. 74127 UA, IPC G01B 1/00, G01B 3/00, G01B 11/00, G01B 17/00. A method of determining the length of the edges of elliptical products, holes, line, Ustyanich, E.P. Publ. 25.10.2012.
4. Ustyanich, E. (2013). The golden logarithm and its application. The ellipse and the equation of its length. 2 ed. Lviv: Kamenyar (in Ukrainian).
5. Ustyanich, A. & Ustyanich, E. (2013). Theoretical bases for optimization, computerization and hardware design for the production of solid dosage forms. Lviv: Kamenyar (in Ukrainian).
6. Zorich, V. A. (1981). Mathematical analysis. Vol. 1. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Belyakov, V. M., Kravtsova, R. I. & Rappoport, M. G. (1962-1963). Tables of elliptic integrals. Vol. 1, 2. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 18.05.2020

E.P. Ustyanich, A.E. Ustyanich
Technopharm Inc., Toronto, Canada
E-mail: austyanich@gmail.com

ABOUT A PRACTICAL METHOD
OF DETERMINING THE LENGTH OF AN ELLIPSE

The article presents a practical highly accurate way to determine the length of an ellipse, which does not require the use of tables for elliptical integrals of the second kind in the Legendre form. On the basis of the postulate accepted by the authors that the ellipse is a projection of a circle, a new universal formula for calculating the length of the ellipse is derived. Since the ellipse is a projection of a circle inclined at an arbitrary angle to the plane, the equation of the length of the ellipse is analytically and functionally related to the equation of the length of the circle. The line of projection of a circle is a “double” and continuous Jordan curve, and the ratio of the lengths of the axes of the ellipse (projection of the circle) decreases from 1 to 0. If the small axis is zero, the length of the “double” line of projection is twice the diameter of the circle. Increasing the angle of inclination, the “double” line of projection of the circle bifurcates, forming an ellipse, the ratio of the axes of which increases from zero, at $\alpha = 90°$, to one, at an angle of $\alpha = 180°$. Thus, the main parameter of the proposed calculation is the ratio of the lengths of the semiaxes of the ellipse. This allowed us to derive a nonlinear equation for calculating the length of the ellipse with high accuracy over the entire range of changes in the ratio of its axes.

Keywords: *ellipse, formula for determining the length.*