

А. М. Дубас

Біфуркації станів рівноваги узагальненої ціглерової моделі пружного стержня

(Представлено членом-кореспондентом НАН України І. С. Чернишенком)

Складено диференціальні рівняння плоскопаралельного руху перевернутого дволанкового маятника зі слідкуючою асиметричною силою на пружнозакріпленому верхньому кінці. Особливістю задачі знаходження станів рівноваги є те, що допустимі значення параметрів заздалегідь невідомі. Для встановлення їх, а також рівноважних значень кутів відхилення ланок маятника від вертикалі використано метод продовження за параметром. Побудовано фазові потоки для різних значень параметрів асиметрії слідкуючої сили.

Важливі практичні застосування, з одного боку, і загрозові для функціонування конструкцій динамічні процеси при певних режимах, з другого, спонукали вчених багатьох країн звернути прискіпливу увагу на динаміку пружних циліндричних труб, всередині яких протікає з певною швидкістю рідина (нафтопроводи, гідравлічні гармати для гасіння пожеж у надвисотних будинках, ракетні двигуни тощо). Х. Ціглер [1] запропонував вдалу дискретну модель консольної труби, всередині якої рухається з певною швидкістю рідина, у вигляді подвійного математичного маятника зі слідкуючою силою і знайшов значення сили, перевищення якого веде до втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги. Пізніше задача розв'язувалась також і в континуальній постановці [2, 3]. В [4–6] запропоновано враховувати технологічні недосконалості у виготовленні труб, неточності прикладання стискувального навантаження параметрами асиметрії слідкуючої сили: лінійним ε та кутовим δ ексцентриситетами та параметром орієнтації k .

В [1] всі пружні елементи маятника вважалися лінійно деформівними. В даній роботі враховано фізичну нелінійність задачі, викликану тим, що деформівні елементи мають жорсткі характеристики [7]. Побудовано однопараметричну сім'ю станів рівноваги за припущення, що лише параметр δ змінюється неперервно, інші — дискретно. Акцентовано увагу на тих їх значеннях, що призводять до появи на рівноважних кривих біфуркаційних точок.

Диференціальні рівняння для знаходження функцій $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) є такими:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 + Pl_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2 - \delta) - Q_c^h l_1 \cos \varphi_1 - M_1^h + M_2^h, \\ m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = m_2gl_2 \sin \varphi_2 + \\ + P\{l_2 \sin[(1 - k)\varphi_2 - \delta] + \varepsilon \cos[(1 - k)\varphi_2 - \delta]\} - Q_c^h l_2 \cos \varphi_2 - M_2^h, \quad \frac{d}{dt} = (\cdot). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут

$$Q_c^h = \frac{2ac}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi y_2}{2a}, \quad M_1^h = \frac{2a_1c_1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi_1}{2a_1}, \quad M_2^h = \frac{2a_2c_2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2a_2}. \quad (2)$$

Введення фазових змінних $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \dot{\varphi}_1 = d\varphi_1/d\tau$, $x_3 = \varphi_2$, $x_4 = \dot{\varphi}_2 = d\varphi_2/d\tau$ дозволяє звести аналіз руху маятника до вивчення 4-вимірної динамічної системи

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = F_2(x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (3)$$

З (3) випливає, що рівняння рівноваги маятника мають вигляд

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*, k, \delta) &= 0, f_2(\varphi_1^*, \varphi_2^*, k, \bar{\varepsilon}, \delta) = 0, \\ f_1(\varphi_1, \varphi_2, k, \delta) &\equiv (1 + \bar{m}_2)\bar{g} \sin \varphi_1 + \bar{P} \sin(\varphi_1 - k\varphi_2 - \delta) - \\ &- \frac{2\bar{c}\bar{a}}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\bar{y}_2}{2\bar{a}} \cos \varphi_1 - \frac{2a_1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\varphi_1}{2a_1} + \frac{2\bar{c}_2a_2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2a_2}, \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, k, \varepsilon, \delta) &\equiv \bar{m}_2\bar{g}\bar{l}_2 \sin \varphi_2 + \bar{P}\{\bar{l}_2 \sin[(1 - k)\varphi_2 - \delta] + \bar{\varepsilon} \cos[(1 - k)\varphi_2 - \delta]\} - \\ &- \frac{2\bar{c}\bar{a}\bar{l}_2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\bar{y}_2}{2\bar{a}} \cos \varphi_2 - \frac{2\bar{c}_2a_2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2a_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рисками зверху позначено безрозмірні параметри маятника, якщо за нові одиниці вимірювання взяти параметри m_1 , l_1 , c_1 нижньої ланки.

Особливістю системи (4) є те, що функції f_1 і f_2 є трансцендентними, причому область зміни параметра δ наперед невідома. Необхідно встановити, при яких значеннях параметра δ система (4) має розв'язки, скільки їх та яким є їх характер стійкості. Це дозволяє здійснити диференціально-геометричний метод, запропонований у [8]. У просторі величин φ_1^* , φ_2^* , δ множина всіх розв'язків системи (4) утворює криву (L) станів рівноваги маятника. Якщо s — дугова координата точок кривої (L), то її побудова зводиться до розв'язання такої задачі Коші:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1^*}{ds} &= \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}, \quad \frac{d\varphi_2^*}{ds} = -\frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}, \quad \frac{d\delta}{ds} = \frac{D_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}, \\ \varphi_1^*|_{s=0} &= \varphi_1^*|_{s=0}, \quad \varphi_2^*|_{s=0} = \varphi_2^*|_{s=0}, \quad \delta|_{s=0} = \delta_0, \\ D_1 &= \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_2^*, \delta)}, \quad D_2 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_1^*, \delta)}, \quad D_3 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_1^*, \varphi_2^*)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, допустимі значення параметра δ відшукуються одночасно із рівноважними значеннями узагальнених координат φ_1 , φ_2 .

Числові значення “неістотних” параметрів візьмемо такими:

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 \text{ кг}, \quad m_2 = 5 \text{ кг}, \quad l_1 = 0,5 \text{ м}, \quad l_2 = 0,5 \text{ м}, \quad c = 400 \text{ Н/м}, \quad c_1 = 400 \text{ Нм}, \\ c_2 &= 400 \text{ Нм}, \quad \mu_1 = 10 \text{ Нмс}, \quad \mu_2 = 10 \text{ Нмс}, \quad P = 600 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (6)$$

Результати розв'язування задачі Коші (5) для $\bar{a} = 2,7$; $a_1 = a_2 = 2$ та числових значень (6) наведені на рис. 1 ($k = 0,25$; $\bar{\varepsilon} = 0,2$) та на рис. 2 ($k = 0,1$; $\bar{\varepsilon} = 0,1$). Ділянки кривої станів рівноваги, які зображено суцільними лініями, відповідають стійким (за О. М. Ляпуновим) точкам рівноваги маятника, штриховими — нестійким. Точки біфуркацій A , B , A_1 , B_1 є двократними станами рівноваги. В них зливаються або із них народжуються (залежно від напрямку зміни параметра δ) два стани рівноваги — стійкий та нестійкий. Кількість станів рівноваги маятника залежно від значення кутового ексцентриситета δ слідкуючої

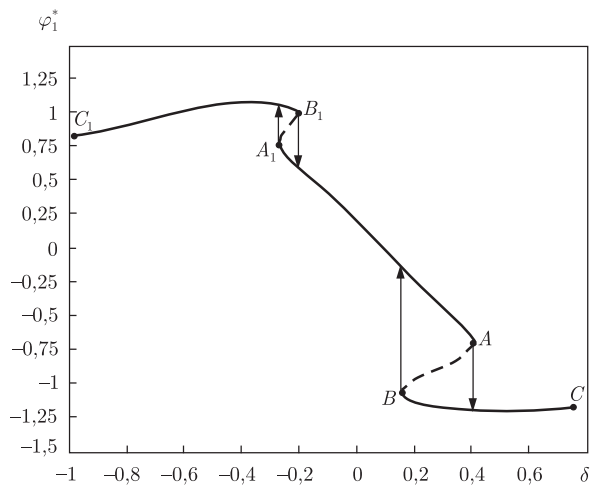


Рис. 1

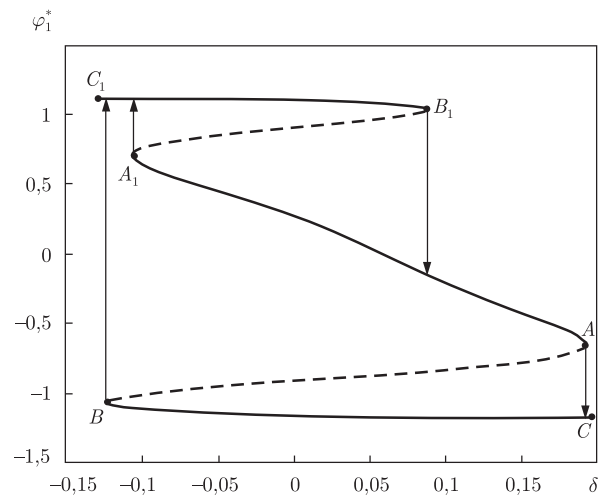


Рис. 2

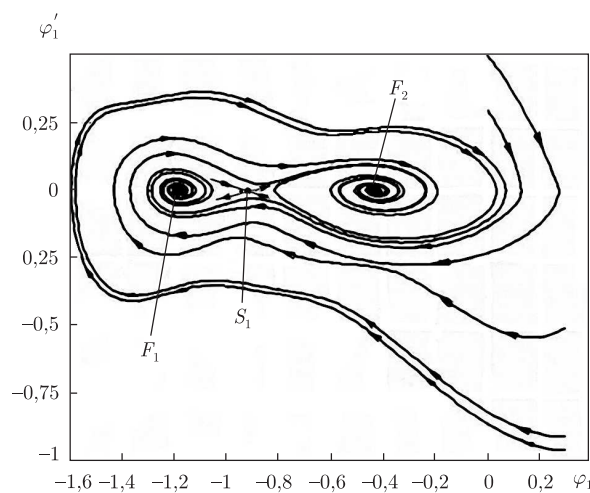


Рис. 3

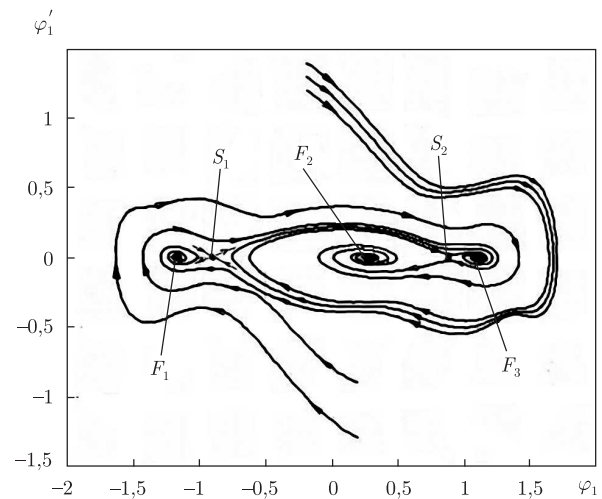


Рис. 4

сили може становити 1, 2 або 3 (рис. 1) та 1–5 (рис. 2). Якщо маятник яким-небудь штучним способом (примусово) “заведено” на нестійку ділянку (AB) або (A_1B_1), а потім йому надано можливість “бути самим собою”, то після довільного, як завгодно малого збурення відбудеться перескок в один із стійких станів рівноваги: або на ділянку (BC) чи (A_1A), або на ділянку (AA_1) чи (B_1C_1). Напрямок перескоку залежить від знаку випадкового збурення.

Крива рівноважних станів подвійного маятника на рис. 1 узгоджується із проекцією його фазових потоків на рис. 3, побудованому для $k = 0,25$; $\bar{\varepsilon} = 0,2$; $\delta = 0,3$. Із вигляду цієї проекції впливає, зокрема, що особливі точки F_1 , F_2 динамічної системи (3) є стійкими фокусами, а особлива точка S_1 — сідлом.

На рис. 4 зображено проекцію фазових потоків, побудовану для $k = 0,1$; $\bar{\varepsilon} = 0,1$; $\delta = 0$, яка дає підставу стверджувати, що особливі точки F_1 , F_2 та F_3 є стійкими, а S_1 та S_2 — нестійкими.

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. – 1952. – **20**, No 1. – S. 49–56.
2. *Джуганов В. А., Лилкова-Маркова Св. В.* Динамическая устойчивость консольной трубы, дополнительно опертой комбинированной опорой и проводящей движущуюся жидкость // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 2. – С. 71–78.
3. *Джуганов В. А., Лилкова-Маркова Св. В.* Зоны дивергентной потери устойчивости консольной трубы, проводящей движущуюся жидкость и опертой на комбинированной опоре // Там же. – 2004. – **40**, № 3. – С. 98–101.
4. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Bifurcations in two-degree of freedom elastic system with follower forces // J. Sound and Vibr. – 1988. – **126**, No 2. – P. 265–277.
5. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Stability and bifurcations of a double pendulum subjected to a follower force // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 30th Structures.
6. *Matsuzaki Y., Futura S.* Codimension three bifurcations of double pendulum subjected to a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., Apr. 5–6, 1990. – Collect. Techn. Pap. – Washington (D. C.), 1990. – P. 387–394.
7. *Lobas V. L.* Influence of the Nonlinear Characteristics of Elastic Elements on the Bifurcations of Equilibrium States of a Double Pendulum with Follower Force // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No 2. – P. 197–202.
8. *Shinohara Y. A.* A geometric method for numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1972. – **8**, No 1. – P. 13–42.

*Державний економіко-технологічний
університет транспорту, Київ*

Надійшло до редакції 21.10.2008

A. M. Dubas

Bifurcations of equilibrium states of generalized Ziegler's model of elastic bar

The differential equations of plane-parallel motion are obtained for an inverted double mathematical pendulum with elastic end support and asymmetric follower force. The character and the number of singular points of the vector field of phase velocities are investigated. Phase flows are built at the different values of a follower force.