УДК 517.928.7

В. А. Плотников, д-р физ.-мат. наук,
Т. С. Зверкова, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

МЕТОД ЧАСТИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ В СИСТЕМАХ СТАНДАРТНОГО ВИДА С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Предложена схема частичного усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями. Приведено обоснование и получена оценка решений без предположения периодичности правых частей систем.

Запропонована схема часткового усереднення для систем стандартного вигляду з розривними правими частинами. Наведено обгрунтування і одержано оцінку розв'язків при умові неперіодичності правих частин систем.

Рассматривается система стандартного вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x) = \varepsilon \begin{cases} X_1(t,x), \ \Phi_1(t,x) < 0; \\ X_2(t,x), \ \Phi_1(t,x) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$x(0) = x_0,$$

где $\Phi_1(t,x) = 0$ — уравнение поверхности разрывов правых частей системы (1).

Вопросы обоснования схемы полного усреднения для системы вида (1) рассматривались в работе [1] в предположении 2π-периодичности функций $X_1(t,x)$, $X_2(t,x)$, $\Phi_1(t,x)$.

Системе (1) поставим в соответствие систему

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{X}(t,\tilde{x}) = \varepsilon \begin{cases} \tilde{X}_1(t,\tilde{x}), \ \Phi_2(t,\tilde{x}) < 0; \\ \tilde{X}_2(t,\tilde{x}), \ \Phi_2(t,\tilde{x}) > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\Phi_2(t,x) = 0$ — уравнение поверхности разрывов правых частей системы (2) и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[X(t,x) - \tilde{X}(t,\tilde{x}) \right] dt = 0. \tag{3}$$

Близость решений систем (1) и (2) на сегменте $[0, L\varepsilon^{-1}]$, $L > 0$, доказывает следующая теорема.

Теорема. *Пусть в области $Q\ \{t \geq 0,\ x \in D \subset E_n\}$ выполнены следующие условия:*

1) $X_i(t,x)$, $\tilde{X}_i(t,x)$, $i = 1, 2$, *равномерно непрерывны по x равномерно относительно t, ограничены постоянной $M > 0$ и удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ;*

2) *равномерно относительно x существует предел* (3);

3) *решение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = x_0 \in D' \subset D$ определено при $\varepsilon \in [0, \sigma]$ для всех $t \geq 0$ и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в D;*

4) *функции $\Phi_s(t,x)$, $s = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы, имеют простые корни $t_j^s(x)$, $s = 1, 2$, и выполняются следующие условия:*

$$\frac{1}{T-t} K^s(t,T) \leq k^s, \ k^s \leq k, \ k^s \geq 0, \ s = 1, 2,$$

где $K^s(t,T)$ — количество корней $t_j^s(x)$ на промежутке $[t, T]$, k — const *и*

$|\partial\Phi_s/\partial t| \geq \delta > 0$ *в корнях* $t_j^s(x)$, $s = 1, 2$;

5) *функции* $t_j^s(x)$, $s = 1, 2$, *удовлетворяют условию Липшица, т.е*

$$|t_j^s(x) - t_j^s(y)| \leq \mu \, \| x - y \|, \; s = 1, 2.$$

Тогда для любого сколь угодно большого $L > 0$ *и сколь угодно малого* $\eta > 0$ *найдется такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, *что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $[0, L\varepsilon^{-1}]$ *будет выполняться оценка* $\| x(t) - \tilde{x}(t) \| < \eta$.

Доказательство. Из (1) и (2) имеем

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| = \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(s, x(s)) - \tilde{X}(s, \tilde{x}(s)) \right] ds \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(s, x(s)) - X(s, \tilde{x}(s)) \right] ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(s, \tilde{x}(s)) - \tilde{X}(s, \tilde{x}(s)) \right] ds \right\|. \tag{4}$$

Разделим отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей и положим $t_i = i L / (m \varepsilon)$, $\Delta t = L / (\varepsilon m)$, $x_i = x(t_i)$, $\tilde{x}_i = \tilde{x}(t_i)$, $i = \overline{0, m}$. Пусть $t \in [t_l, t_{l+1}]$, где $0 \leq l \leq m - 1$. Тогда

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(s, x(s)) - X(s, \tilde{x}(s)) \right] ds \right\| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left[X(s, x(s)) - X(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds.$$

Оценим каждое слагаемое суммы. На каждом сегменте $[t_i, t_{i+1}]$ введем множества

$$I_1^s(x, \tilde{x}) = \{ t \in [t_i, t_{i+1}] \mid \Phi_s(t, x) < 0, \; \Phi_s(t, \tilde{x}) < 0 \},$$

$$I_2^s(x, \tilde{x}) = \{ t \in [t_i, t_{i+1}] \mid \Phi_s(t, x) > 0, \; \Phi_s(t, \tilde{x}) > 0 \},$$

$$I_3^s(x, \tilde{x}) = \{ t \in [t_i, t_{i+1}] \mid \Phi_s(t, x) < 0, \; \Phi_s(t, \tilde{x}) > 0 \},$$

$$I_4^s(x, \tilde{x}) = \{ t \in [t_i, t_{i+1}] \mid \Phi_s(t, x) > 0, \; \Phi_s(t, \tilde{x}) < 0 \}, \; s = 1, 2,$$

что позволяет применить условия 1 и 4 теоремы. Тогда

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \left[X(s, x(s)) - X(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds \leq \int_{I_1^1} \left\| \left[X_1(s, x(s)) - X_1(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds +$$

$$+ \int_{I_2^1} \left\| \left[X_2(s, x(s)) - X_2(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds + \int_{I_3^1} \left\| \left[X_1(s, x(s)) - X_2(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds +$$

$$+ \int_{I_4^1} \left\| \left[X_2(s, x(s)) - X_1(s, \tilde{x}(s)) \right] \right\| ds \leq \varepsilon (\lambda + 4M\mu k) \int_0^t \| x(s) - \tilde{x}(s) \| ds + 4M^2 \mu k \frac{L^2}{m}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и применяя лемму Гронуолла — Беллмана, получаем оценку первого слагаемого

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leq e^{(\lambda + 4M\mu k)L} \left[\frac{4M^2 \mu k L^2}{m} + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X(s, \tilde{x}(s)) - \tilde{X}(s, \tilde{x}(s)) \right] ds \right\| \right].$$

Оценим второе слагаемое в (4):

$$\varepsilon\left\|\int_0^t\left[X(s,\bar{x}(s))-\tilde{X}(s,\bar{x}(s))\right]ds\right\|\le\varepsilon\sum_{i=0}^{l-1}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\left[X(s,\bar{x}(s))-X(s,\bar{x}_i)\right]\right\|ds+\right.$$

$$\left.+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\left[\tilde{X}(s,\bar{x}(s))-\tilde{X}(s,\bar{x}_i)\right]\right\|ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\left[X(s,\bar{x}_i)-\tilde{X}(s,\bar{x}_i)\right]\right\|ds\right\}. \qquad (6)$$

Первое и второе слагаемое в (6) оцениваются аналогично (5) с использованием множеств $I_i^2(x,\bar{x})$, $i=\overline{1,4}$. Очевидно,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\left[X(s,\bar{x}(s))-X(s,\bar{x}_i)\right]\right\|ds\le\varepsilon(\lambda+8M\mu k)M\frac{(\Delta t)^2}{2}\le\varepsilon c_1\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

Второе слагаемое оценивается аналогично. При оценке третьего слагаемого согласно условию 2) существует такая монотонно убывающая функция $f(x)$, стремящаяся к 0 при $t\to\infty$, что

$$\left\|\int_0^t\left[X(s,x)-\tilde{X}(s,x)\right]ds\right\|\le t f(t),$$

поэтому можно записать

$$\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[X(s,\bar{x}_i)-\tilde{X}(s,\bar{x}_i)\right]ds\right\|\le\Delta t\, f(\Delta t).$$

Окончательно (6) будет иметь вид

$$\varepsilon\left\|\int_0^t\left[X(s,\bar{x}(s))-\tilde{X}(s,\bar{x}(s))\right]ds\right\|\le\frac{2c_1L^2}{m}+mF(\varepsilon),$$

$$F(\varepsilon)=\max_{0\le\tau\le L}\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right),$$

где $F(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Итак,

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\le e^{(\lambda+4M\mu k)L}\left[\frac{c_2}{m}+mF(\varepsilon)\right]$$

и соответствующим выбором $m>m_0$ и $\varepsilon<\varepsilon_0$ можно получить оценку

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<\eta. \qquad (7)$$

Теорема доказана.

Замечания. **1.** Из теоремы очевидным образом следует справедливость оценки (7) для случая непрерывной правой части одной из систем (1) или (2).

2. Пусть вместо условия 2 теоремы выполнено условие существования равномерно относительно x среднего $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(s,x)ds=\tilde{X}(x)$. Тогда доказанная теорема обобщает результаты работы [1] на случай непериодических правых частей.

1. *Плотников В. А., Зверкова Т. С.* Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями // Дифференц. уравнения.– 1982.– **18**, № 6.– С. 1091–1093.

Получено 12.11.90