УДК 512.515

А.О. Пришляк, асп.(Киев.ун-т)

МИНИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МОРСА НА ПАРЕ МНОГООБРАЗИЙ

Доказана теорема о существовании минимальной функции Морса на паре односвязных многообразий (M^n, N^k), где $n-k \geq 3$, $k \geq 6$.

Доведена теорема про існування мінімальної функції Морса на парі однозв"язних многовидів (M^n, N^k), де $n-k \geq 3$, $k \geq 6$.

Пусть M^m — замкнутое PL-многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Определение. *Вложением с критическими уровнями называется такая последовательность многообразий* $\emptyset = M_0' \subset M_1 \subset M_1' \subset M_2 \subset \ldots \subset M_l = M$, *в которой* M_i *получено из* M_{i-1}' *с помощью приклейки ручки* H_i *к границе* $\partial M_{i-1}'$. *Ручка* H_i *лежит в* $\mathbb{R}^m \times \{t_i\}$ *и* $M_i' = M_i \cup \partial M_i \times [t_i, t_{i+1}]$.

Пусть $\pi : M \to \mathbb{R}^m$ и $p : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ — естественные отображения. Функция высоты p является PL-аналогом функции Морса. Пусть N^k — локально незаузленное подмногообразие в многообразии M^n, вложенном с критическими уровнями в $\mathbb{R}^{m+1}$, $k < n$. Наша цель — построение такого вложения M в $\mathbb{R}^{m+1}$ и, следовательно, N в $\mathbb{R}^{m+1}$, при котором оба многообразия вложены с критическими уровнями и имеют минимальное количество ручек каждого индекса.

Покажем, что N может быть объемлемо произотопировано к N', так что $N' \subset \cup\, \partial M_i \times [t_i, t_{i+1}]$. Для каждой ручки H_i существует диск $d_i \subset H_i$ такой, что $d_i \cap N = \emptyset$. Пусть H_i^ε — ε-окрестность H_i. Тогда объемлемая изотопия строится путем расширения d_i до H_i и сжатия $H_i^\varepsilon \setminus d_i$ до $H_i^\varepsilon \setminus H_i$.

Так как N' лежит в $\cup \partial M_i \times [t_i, t_{i+1}]$, то существует ε-изотопия N' к N'' такая, что N'' — вложение в $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ с критическими уровнями [1]. Будем считать, что N вложено с критическими уровнями и $H_i \subset \mathbb{R}^m \times \{t_i\}$ — ручки на M. Ручки $h_j \subset (M \cap \mathbb{R}^m \times \{t_i\})$ на N в дальнейшем будем называть вложенными.

Лемма. *Если индекс ручки* h_j *меньше индекса ручки* H_i *и между* t_i *и* t_j *нет других критических уровней ни на* M, *ни на* N, *то вложенная ручка* h_j *может быть опущена ниже ручки* H_i.

Доказательство. В общем положении образы проекции π среднего диска ручки h_j и косредней сферы H_i не пересекаются. Приведение в общее положение осуществляется путем клеточных сдвигов на h_j [2]. Затем ручка h_j опускается вдоль $\mathbb{R}^1$ ниже H_i.

Клеточный сдвиг может быть реализован как тривиальный шаг — приклейка диска D^k по диску D^{k+1} к ∂N_p в уровне $\mathbb{R}^m \times \{t_p\}$, для $t_p = t_j + \varepsilon$. Удаление критического уровня, на котором происходит тривиальный шаг, может быть осуществлено изотопией [3].

Следствие. *Если* $n - k = l$, *то ручка* h_i *индекса* i *может быть передвинута (опущена или поднята) в любой уровень между ручками индексов* i и *ручками индексов* $i + l$ *на* M.

Доказательство. В каждом воротнике $\partial M_j \times [t_j, t_{j+1}]$ упорядочим внутренние ручки по возрастанию индексов [3]. По лемме каждая внутренняя ручка индекса i может быть опущена ниже ручек индекса $i+1$ на M. Рассмотрим вложение M, в котором первые m координат совпадают с координатами при вложении M в $\mathbb{R}^{m+1}$, а последняя меняет знак на противоположный. Тогда ручки индекса i на M перейдут в ручки индекса $n-1$, а ручки индекса i на N — в ручки индекса $k-i=(n-i)-l$. Повторное применение леммы доказывает следствие.

Теорема. *Пусть многообразие* N^k *вложено в многообразие* M^n, *причем* $k \geq 6$, $n-k \geq 3$, $\pi_1(M)=\pi_1(N)=0$. *Тогда для достаточно большого* m *существует вложение* M в $\mathbb{R}^{m+1}$ *такое, что вложения* N *и* M *в* $\mathbb{R}^{m+1}$ — *вложения с критическими уровнями, в которых функция высоты на* N —*ограничение функции высоты на* M. *Число ручек каждого индекса* λ *минимально на обоих многообразиях* N *и* M *и равно* $m_\lambda=\mu(H_\lambda(M^n))+\mu(\operatorname{Tors} H_{\lambda-1}(M^n))$ *на многообразии* M, *и* $n_\lambda=\mu(H_\lambda(N^k))+\mu(\operatorname{Tors} H^*_{\lambda-1}(M^n))$ *на многообразии* N, *где* $\mu(H)$ — *минимальное число образующих группы* H.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда в M число ручек каждого индекса минимально и они упорядочены по возрастанию индексов. На основании следствия можно произотопировать N в такое вложение, что вложенные ручки индекса i лежат между ручками индексов i и $i+1$ на M. Так как $\pi_1(M)=0$, то в M нет ручек индексов 1 и $n-1$, а имеется одна ручка индекса 0 и одна ручка индекса n.

Так как в общем положении образы проекций при проектировании π средних дисков внутренних ручек индексов 1 и косредних дисков ручек индексов 0 не пересекаются, то их критические уровни можно совместить в один, опуская или поднимая внутренние ручки. Соответствующие пары ручек заменяются тривиальными шагами, которые удаляются с помощью изотопии. Таким образом, сокращаются все, кроме одной, вложенные 0- и k-ручки. Вложенные 1-ручки можно заменить 3-ручками путем прибавления пар взаимно сокращающихся 2- и 3-ручек к $\partial N_2(\pi_1(\partial N_2)=\pi_1(M)=0)$ и сокращения 1- и 2-ручек, как при доказательстве теоремы Смейла. Аналогично, $(k-1)$-ручки заменяются $(k-3)$-ручками.

Далее, для $i \geq 2$ на основании следствия вложенные i-ручки можно поднять выше $(i+1)$-ручек на M и путем сложения ручек матрица, составленная из индексов пересечения вложенных i- и $(i+1)$-ручек (точнее из индексов пересечений образов проекций на $\mathbb{R}^n$ средних и косредних сфер), приводится к диагональному виду. Если на диагонали стоят 1, то соответствующие ручки сокращаются [3]. Ручки индекса i, которые не пересекаются с ручками индексов $i-1$ и $i+1$, соответствуют свободным образующим группы $H_i(N^k)$. Остальные ручки задают кручения в группе гомологий. Таким образом, разложение на ручки является минимальным. Поскольку при $n-k \geq 3$ изотопия N^k в M^n объемлема [2], то, изменяя с помощью изотопии функцию высоты p, получаем необходимое вложение M^n в $\mathbb{R}^{m+1}$. Применяя рассуждения, приведенные выше, к паре $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, а затем к $N \subset M$, получаем доказательство теоремы. В категории Diff справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* (M^n, N^k) — *пара гладких класса* C^∞ *односвязных многообразий,* $k \geq 6$, $n-k \geq 3$. *Тогда существует минимальная функция Морса на* M *такая, что ее ограничение на* N *есть также минимальная функция Морса.*

Доказательство аналогично доказательству в PL-категории.

1. *Kearton C., Lickorish W.B.* Piecewise linear critical levels and collapsing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **170**. – P.415 – 424.
2. *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно-линейную топологию. – М.: Мир, 1974. – 206 с.
3. *Rourke C. P.* Embedded handle theory, concordans and isotopy // University of Warwick, 1968 (preprint). – 8 p.

Получено 22.05.91