УДК 519. 65

Н. П. Корнейчук, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ АЛГОРИТМАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются пассивные и активные алгоритмы восстановления функций, удовлетворяющих условию $|f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, по значениям $f(t)$ в точках промежутка $[a, b]$. Предъявлен активный алгоритм, который при $0 < \alpha < 1$ для монотонных функций указанного класса гарантирует порядок погрешности в $C[a, b]$ более высокий, чем любой пассивный алгоритм.

Розглядаються пасивні та активні алгоритми відновлення функцій, які задовольняють умову $|f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, за значеннями $f(t)$ в точках відрізка $[a, b]$. Запропонований активний алгоритм, який при $0 < \alpha < 1$ для монотонних функцій вказаного класу гарантує порядок похибки в $C[a, b]$ більш високий, ніж будь-який пасивний алгоритм.

1. Успехи в решении экстремальных задач теории приближения дают возможность полностью решить и некоторые задачи оптимального восстановления функций по априорной и дискретной информации (см., например, [1 – 3]), причем в ряде случаев точные результаты здесь непосредственно вытекают из знания величины поперечников. Однако проблема оптимального восстановления функциональной зависимости по неполной информации имеет и специфические аспекты, требующие самостоятельного рассмотрения.

Наиболее важным с практической точки зрения является, по-видимому, случай, когда функция $f(t)$, заданная на некотором компакте I, восстанавливается по ее значениям в отдельных точках этого компакта. Задача будет корректной, если о функции $f(t)$ мы располагаем априорной информацией, позволяющей включить $f(t)$ в некоторый класс функций $\mathfrak{M}$ такой, что для любого $t_* \in I$ множество $\{f : f \in \mathfrak{M}, f(t_*) = 0\}$ ограничено. Каждому набору $P_N = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ точек из I соответствует числовой вектор

$$f(P_N) = \{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_N)\}, \tag{1}$$

по которому строится определенная на I функция $\varphi(f(P_N), t)$ (например, интерполяционный полином или сплайн), приближенно представляющая функцию $f(t)$. Метод восстановления, определяемый вектором информации (1) и выбором функции $\varphi(f(P_N), t)$, будем обозначать $(\varphi, f(P_N))$. Если X — некоторое метрическое пространство функций с расстоянием $r(f, g)_X$, содержащее как класс $\mathfrak{M}$, так и функции $\varphi(f(P_N), t)$ для $f \in \mathfrak{M}$, то величина

$$\rho\left(\mathfrak{M}, (\varphi, f(P_N))\right)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} r\left(f, \varphi, f(P_N)\right)_X$$

дает оценку погрешности восстановления методом $(\varphi, f(P_N))$ на классе $\mathfrak{M}$. Задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины (при фиксированном N)

$$\rho_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{(\varphi, f(P_N))} \rho\left(\mathfrak{M}, (\varphi, f(P_N))\right)_X$$

и предъявлении метода $(\varphi, f(P_N))$, реализующего эту точную нижнюю грань. Эквивалентной, по сути дела, является следующая постановка задачи: при заданном $\varepsilon > 0$ указать наименьшее натуральное число N и метод $(\varphi, f(P_N))$ такие, что $\rho\left(\mathfrak{M}, (\varphi, f(P_N))\right)_X = \rho_N(\mathfrak{M}, X) \le \varepsilon$. Речь идет о вычислении или оценке (при фиксированном N) величины

$$\mu_\varepsilon(\mathfrak{M}, X) = \inf_{(\varphi, f(P_N))} \mu_\varepsilon\left(\mathfrak{M}, (\varphi, f(P_N))\right)_X,$$

где

$$\mu_\varepsilon\left(\mathfrak{M}, (\varphi, f(P_N))\right)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf \left\{ N : N \in \mathbb{N}^+, r\left(f, \varphi, f(P_N)\right)_X \le \varepsilon \right\}. \qquad (2)$$

Заметим, что имеющийся в нашем распоряжении выбор точек $t_1, t_2, \ldots, t_N$ можно осуществить двумя принципиально разными способами: или сразу задать все N точек t_k, а потом вычислять значения $f(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, или выбирать их последовательно, учитывая при выборе точки t_k и значения $f(t_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, в уже выбранных точках. Первый способ называют пассивным алгоритмом, а второй — активным (адаптивным) алгоритмом (стратегией), состоящим, по существу, из двух последовательных алгоритмов (отображений)

$$A^1 : \left(\{t_\nu\}_1^{k-1}, \{f(t_\nu)\}_1^{k-1}\right) \to t_k,$$

$$A^2 : \left(\{t_\nu\}_1^{k}, \{f(t_\nu)\}_1^{k-1}\right) \to f(t_k).$$

Активный алгоритм восстановления можно интерпретироветь в терминах теории игр: первый игрок, стремясь обеспечить минимальную погрешность, выбирает точку t_k, используя алгоритм A^1, второй игрок выдает значение $f(t_k)$. И здесь возможны две существенно различные ситуации. Первая из них возникает, когда значение $f(t_k)$ появляется в результате некоторого опыта, физического эксперимента („игра с природой"). В этом случае активный алгоритм восстановления сводится только к стратегии A^1 первого игрока, который стремится наилучшим образом использовать при выборе t_k информацию $(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_{k-1}))$.

Если же необходимо оценить погрешность восстановления с помощью активного алгоритма на некотором классе функций $\mathfrak{M}$, то значения $f(t_k)$ также подлежат выбору и находятся в распоряжении второго игрока. Желая получить оценку для любой функции $f \in \mathfrak{M}$, следует рассчитывать при каждом шаге на худший случай. Дело сводится к антагонической игре, когда первый игрок, стремясь к минимально возможной погрешности, выбирает по алгоритму A^1 точку t_k, а второй, стремясь к максимально возможной погрешности, выбирает значение $f(t_k)$ (не выходя за пределы класса $\mathfrak{M}$).

Возможности пассивных и активных алгоритмов в задачах оптимального восстановления исследовались многими авторами (см., например, монографии [4 – 6], где приведена достаточно полная библиография). В [4], в частности, установлен факт совпадения наилучших гарантированных результатов при пассивных и активных алгоритмах для достаточно широких функциональных классов $\mathfrak{M}$.

Основное содержание настоящей статьи составляет рассмотрение ситуации, в которой активный алгоритм обеспечивает более высокий порядок погрешности (при $N \to \infty$), чем любой пассивный.

2. Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с обычной нормой, а $H^\alpha[a, b]$, $0 < \alpha \le 1$, — класс функций $f(t) \in C[a, b]$, удовлетворяющих условию Гельдера

$$|f(t')-f(t'')| \le |t'-t''|^\alpha, \quad t', t'' \in [a,b].$$

Там, где не может возникнуть недоразумение, будем писать C и H^α. Пусть P_N — некоторый набор точек $t_1, \dots, t_N$ на $[a,b]$, и определены значения $f(t_k)$ функции $f \in H^\alpha$. Если $g(t) \in H^\alpha$ и $g(t_k) = f(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, то

$$\psi_*(t) \le g(t) \le \psi^*(t), \quad a \le t \le b, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_*(t) &= \psi_*(f(P_N), t) = \max_{1\le k\le N} \left[f(t_k) - |t-t_k|^\alpha\right], \\ \psi^*(t) &= \psi^*(f(P_N), t) = \min_{1\le k\le N} \left[f(t_k) + |t-t_k|^\alpha\right], \end{aligned} \tag{4}$$

причем нетрудно проверить, что функции $\psi_*(t)$ и $\psi^*(t)$ принадлежат H^α. Ясно, что наилучшей, в смысле равномерной погрешности, функцией восстановления будет чебышевский центр множества функций $g(t) \in H^\alpha$, удовлетворяющих неравенствам (3), т.е. функция

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(f(P_N), t) = (1/2)\left[\psi_*(t) + \psi^*(t)\right].$$

В случае $\alpha = 1$ задача оптимального восстановления весьма детально исследована в [4], где получены точные результаты и при наличии дополнительной информации о функции $f \in H^1$ в виде значений $f(a), f(b)$ и монотонности. Оказалось, что эта информация может несколько улучшить гарантированный результат, но порядок погрешности как при пассивном, так и при активном алгоритме остается равным $O(N^{-1})$. Иначе обстоит дело при $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим три ситуации, последовательно расширяя априорную информацию: 1) $f(t) \in H^\alpha$; 2) $f \in H^\alpha$, известны значения $f(a)$ и $f(b)$; 3) $f \in H^\alpha$, $f(t)$ монотонна, известны $f(a)$ и $f(b)$.

В первой ситуации результаты очевидны. Занимая в антагонистической игре позицию второго игрока, полагаем $f(t_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots N$, как при пассивном, так и при активном алгоритме. Тогда $\varphi_0(f(P_N), t) \equiv 0$ и, если положить $f(t) = \psi^*(t)$, при любом наборе P_N точек t_k будет $\| f - \varphi_0(f(P_N))\|_C \ge \ge ((b-a)/2N)^\alpha$. Знак равенства имеет место, если P_N — набор точек $(2\nu - 1)(b-a)/2N$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, и при пассивном, и при активном алгоритмах

$$\rho_N(H^\alpha[a,b], C[a,b]) = ((b-a)/2N))^\alpha.$$

Пусть теперь $f \in H^\alpha$ и известны значения $f(a)$ и $f(b)$, причем без ограничения общности считаем, что $L := f(b) - f(a) \ge 0$. Ясно, что при всех $t \in [a,b]$

$$\begin{gathered} \max\left\{f(a) - (t-a)^\alpha, f(b) - (b-t)^\alpha\right\} =: f_1(t) \le f(t) \le \\ \le f_2(t) := \min\left\{f(a) + (t-a)^\alpha, f(b) + (b-t)^\alpha\right\}. \end{gathered}$$

Предположим сначала, что

$$L \leq (b-a-h)^{\alpha}, \ h = (b-a)/2N. \tag{5}$$

При пассивном алгоритме, когда предъявлен сразу весь набор P_N точек $\{t_k\}_0^N \subset [a, b]$, $t_0 = a$, $t_N = b$, можно указать число $c \in [f(a), f(b)]$ такое, что, положив $f(t_k) = f_2(t_k)$ при $f_2(t_k) \leq c$, $f(t_k) = f_1(t_k)$ при $f_1(t_k) \geq c$ и $f(t_k) = c$, если $f_1(t_k) < c < f_2(t_k)$, получим $\| \psi^* - \psi_* \|_c \geq 2h^{\alpha}$ и, следовательно,

$$\| f - \varphi_0(f(P_N)) \|_C \geq h^{\alpha}. \tag{6}$$

Можно показать, что на рассматриваемом множестве функций оценка снизу (6) является точной.При активном алгоритме точную по порядку оценку снизу в предположении (5) можно получить, полагая $f(t_k) = l(t_k)$, где

$$l(t) = ((f(b) - f(a)) / (b-a))(t-a) + f(a).$$

Так как хотя бы один из промежутков, на которые разбивается отрезок $[a, b]$ точками $\{t_k\}_0^N$, имеет длину, не меньшую $2h$, то $\| \psi^* - \psi_* \|_C \geq 2h^{\alpha} - L/N$ и, значит,

$$\| f - \varphi_0(f(P_N)) \|_C \geq h^{\alpha} - L/2N. \tag{7}$$

Если $(b-a-h)^{\alpha} < L \leq (b-a)^{\alpha}$, то и при пассивном, и при активном алгоритмах полагаем $f(t_k) = l(t_k)$ и, ориентируясь на самый худший случай, когда промежуток разбиения длинной $\geq 2h$ является только концевым, придем к оценке

$$\| f - \varphi_0(f(P_N)) \|_C \geq (1/2)(h^{\alpha} - (L/2N)). \tag{8}$$

Оценки (7) и (8) точные.

Таким образом, в рассматриваемых ситуациях точный порядок погрешности как при пассивном, так и при активном алгоритмах есть $O(N^{-\alpha})$.

3. Пусть $H_m^{\alpha} = H_m^{\alpha}[a, b]$ — множество монотонных функций класса $H^{\alpha}[a, b]$ и известны значения $f(a)$ и $f(b)$, причем без потери общности и здесь можно считать, что $f(b) - f(a) =: L > 0$. В связи с требованием монотонности необходимо внести коррективы в определение функций $\psi_*(t)$ и $\psi^*(t)$ (см. (4)). Если

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b, \tag{9}$$

и известны значения функций $f(t)$, $f \in H_m^{\alpha}$, в точках τ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, то для $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\psi_*(t) = \max \left\{ f(\tau_{j-1}), \max_{j \leq i \leq N} [f(t_i) - (t_i - t)^{\alpha}] \right\}, \tag{10}$$

$$\psi^*(t) = \min \left\{ f(\tau_j); \min_{0 \leq i < j} [f(t_i) + (t_i - t)^{\alpha}] \right\}. \tag{11}$$

Чебышевский центр $\varphi_0(t) = (1/2)(\psi_*(t) + \psi^*(t))$ и здесь является наилучшей функцией восстановления в равномерной метрике.

При пассивном алгоритме пусть выполнено условие (5) и, кроме того, $f(b) - f(a) > h^{\alpha}$. Если предъявлен набор точек (9), то найдется отрезок $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ такой, что $\tau_j - \tau_{j-1} \geq 2h$. Обозначим $\beta = (\tau_{j-1} + \tau_j)/2$. Если $\beta \leq (a+b)/2$, то полагаем $f(\tau_i)=f(a)$ для $\tau_i \le \tau_{j-1}$ и

$$f(\tau_i)=\max\left\{f(a)+h^\alpha; f(b)-(b-\tau_i)^\alpha\right\}$$

для $\tau_i \ge \tau_j$. Если же $\beta > (a+b)/2$, то полагаем

$$f(\tau_i)=\min\left\{f(a)+(\tau_i-a)^\alpha; f(b)-h^\alpha\right\}$$

для $\tau_i \le \tau_{j-1}$ и $f(\tau_i)=f(b)$ для $\tau_i \ge \tau_j$. Тогда

$$\| f-\varphi_0 \|_C \ge (1/2)\, h^\alpha. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что при равномерном разбиении отрезка $[a,b]$ точками $\tau_i=(b-a)\,i/N$, $i=0,1,\dots,N$, для любой функции $f(t)\in H_m^\alpha$ будет $\|\psi^*-\psi_*\|_C \le h^\alpha$, так что при пассивном алгоритме

$$\rho_N(H_m^\alpha, C[a,b]) = (1/2)\,h^\alpha = (b-a)^\alpha/(2(2N)^\alpha). \tag{13}$$

Переходя к двойственной постановке задачи, зададим $\varepsilon>0$. Тогда из (12) следует, что неравенство $\| f-\varphi_0\|_C \le \varepsilon$ может быть достигнуто для любой функции $f\in H_m^\alpha$, если $N \ge (b-a)/(2(2\varepsilon)^{1/\alpha})+1$, а с учетом (13) заключаем, что эта оценка точная, так что при пассивном алгоритме

$$(b-a)/(2(2\varepsilon)^{1/\alpha})+1 \le \mu_\varepsilon(H_m^\alpha, C[a,b]) \le (b-a)/(2(2\varepsilon)^{1/\alpha})+2.$$

Теперь покажем, что в отличие от рассмотренных выше ситуаций переход от пассивных алгоритмов к активным позволяет повысить порядок погрешности восстановления на классе H_m^α, если $0<\alpha<1$.

Последовательно появляющиеся при активном алгоритме точки будем нумеровать в порядке их появления; так как значения $f(a)$ и $f(b)$ предполагаются заранее известными, полагаем сразу $a=t_0$, $b=t_1$. При каждом $n=2,3,\dots$ набору точек $\{t_k\}_0^n$ сопоставляем набор $\{\tau_j\}_0^n$ тех же точек, но пронумерованных в порядке возрастания, так что $a=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_n=b$. На каждом n-м шаге алгоритма по значениям $f(\tau_j)$, $j=0,1,\dots,n$, определяем формулами (10) и (11) функции $\psi_*(t)$ и $\psi^*(t)$, а также чебышевский центр $\varphi_0(t)=\varphi_0(f(P_n),t)$ и погрешность $\|f-\varphi_0\|_C$. Желая получить для погрешности восстановления оценку сверху на классе H_m^α, интерпретируем процесс активного алгоритма как антагонистическую игру (п.1) и будем при заданном $\varepsilon>0$ считать ее законченной, если

$$\|f-\varphi_0\|_C \le \varepsilon. \tag{14}$$

Достаточное условие для этого определяет следующая лемма.

Лемма. *Если $f\in H_m^\alpha$ и после N-го шага активного алгоритма выполняются неравенства*

$$|f(\tau_{j-1})-f(\tau_j)| \le 2\varepsilon,\ j=1,2,\dots,N, \tag{15}$$

то выполняется и (14).

Справедливость леммы сразу вытекает из определений функций $\psi_*(t)$, $\psi^*(t)$ (см. (10), (11)) и $\varphi_0(t)$.

В качестве алгоритма последовательного выбора точек t_k при восстановлении функции $f(t) \in H_m^\alpha$ воспользуемся алгоритмом A_D^1 дихотомии, когда точка t_k выбирается как середина одного из отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а при заданном $\varepsilon > 0$ — того отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, для которого $|f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)| > 2\varepsilon$. Заметим, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и функция $f(t) \in H_m^\alpha$, при использовании алгоритма A_D^1 неравенство (14) будет выполнено через конечное число $N = N(\varepsilon)$ шагов. В частности, это будет, если $N = 2^n$, где n выбрано из условия $2^{-n\alpha} < \varepsilon$.

Пусть $N(f, \varepsilon, A^2)$ — наименьшее число шагов алгоритма (A_D^1, A^2), обеспечивающее неравенство (14).

Теорема. *Каков бы ни был алгоритм* A_2, *для любой функции* $f \in H_m^\alpha$ *справедлива оценка*

$$N(f, \varepsilon, A^2) \le \frac{2}{\varepsilon}|f(b) - f(a)| \left[\frac{1}{\alpha}(\log_2|\varepsilon|) + \log_2(b-a)\right] + O(\log_2|\varepsilon|).$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$, зафиксируем функцию $f \in H_m^\alpha$, $f(a) < f(b)$, и пусть $N = N(\varepsilon)$ — наименьшее число шагов парного алгоритма (A_D^1, A^2), после которых выполнены неравенства (15), а значит, и (14). Оценим это число N через ε.

После N-го шага имеем набор точек $\{t_k\}_0^N$ $(t_0 = a,\ t_1 = b)$, который будем записывать также в виде $\{\tau_j\}_0^N$, где $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$. Отображение $t_k \to f(t_k)$ обладает следующими свойствами:

1) каждая точка t_k, $k = 2, 3, \ldots, N-1$, является серединой некоторого промежутка $[\tau_{i-1}, \tau_1] = [t_\nu, t_\mu]$, где $\nu \le k-1$, $\mu \le k-1$, причем $|f(t_\nu) - f(t_\mu)| > 2\varepsilon$;

2) если $t_\nu < t_\mu$, то $f(t_\nu) \le f(t_\mu)$;

3) $|f(\tau_{i-1}) - f(\tau_1)| \le 2\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Пусть $[\beta, \gamma] \subset [f(a), f(b)]$, $\gamma - \beta = 2\varepsilon$. Оценим сверху число точек $f_k = f(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, которые могут попасть на отрезок $[\beta, \gamma]$ длины 2ε. Если такие точки есть, то выберем ту, которая появилась раньше остальных, т. е. имеет наименьший индекс (номер) $k = k_0$. Пусть t_{k_0} — середина отрезка $[\tau_\nu, \tau_\mu]$, причем ясно, что $f_\nu < \beta < \gamma < f_\mu$, ибо $\nu < k_0$ и $\mu < k_0$. Если на промежутке $[\beta, f_{k_0}]$ есть f-точки (для краткости так называем точки $f(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$), то они появились в результате дихотомийного деления отрезка $[t_\nu, t_{k_0}]$. Пусть $t_{k_1} = (t_\nu + + t_{k_0}) / 2$. Если $f(t_{k_1}) \in [\beta, f_{k_0})$ и, следовательно, $f_{k_0} - f_{k_1} \le 2\varepsilon$, то на промежутке (f_{k_1}, f_{k_0}) f-точек быть не может, и мы исследуем аналогичным образом $[\beta, f_{k_1}]$, т.е. определяем положение точки f_{k_2}, где $t_{k_2} = (t_\nu + t_{k_1}) / 2$. Если же $f_{k_1} < \beta$, то переходим к промежутку $[f_{k_1}, f_{k_0}]$, определяя положение точки f_{k_2}, где теперь $t_{k_2} = (t_{k_1} + t_{k_0}) / 2$, и т. д.

Продолжая рассуждать таким образом, последовательно выделим точки f_{k_1}, $f_{k_2}, f_{k_3}, \ldots$, которые могут попасть на $[\beta, f_{k_0})$, причем на каждом шаге делится пополам только одна из половин t-отрезка, полученных на предыдущем шаге.

Этот процесс заканчивается на ν-шаге, когда окажется, что $|f_{k_{\nu-1}} - f_{k_\nu}| \le 2\varepsilon$, однако на предыдущем шаге было $|f_{k_{\nu-2}} - f_{k_{\nu-1}}| > 2\varepsilon$, так что

$$|t_{k_{\nu-2}} - t_{k_{\nu-1}}| > (2\varepsilon)^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Так как с каждым шагом длина t-промежутка уменьшается в два раза, то

$$|t_{k_{\nu-2}} - t_{k_{\nu-1}}| = (t_{k_0} - t_\nu) / 2^{\nu-1}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) находим, что

$$2^{\nu-1} \le (t_{k_0} - t_\nu) / (2\varepsilon)^{1/\alpha} \le (b-a) / (2\varepsilon)^{1/\alpha}$$

и

$$\nu \le \log_2 ((b-a) / (2\varepsilon)^{1/\alpha}) + 1 = (1/\alpha) \log_2 |\varepsilon| + \log_2 (b-a) - (1-\alpha)/\alpha.$$

Таким же неравенством оценивается максимально возможное число f-точек на промежутке $(f_{k_0}, \gamma]$ и, следовательно, на любом отрезке длиной 2ε из промежутка $[f(a), f(b)]$ число $\nu[\beta, \gamma]$ f-точек удовлетворяет неравенству

$$\nu[\beta, \gamma] \le (2/\alpha) \log_2 |\varepsilon| + 2 \log_2 (b-a)^\alpha - (2-2\alpha)/\alpha.$$

Умножив правую часть на $[f(b) - f(a)] / \varepsilon + 1$, получим оценку числа f-точек на всем отрезке $[f(a), f(b)]$, а это число равно N. Теорема доказана.

Через $\mu_\varepsilon(A^1, A^2; \mathfrak{M}; X)$ обозначим величину (2), в которой $(\varphi, f(P_N))$ определяется парой алгоритмов (A^1, A^2).

Следствие. *Каков бы ни был алгоритм* A^2, *справедлива оценка*

$$\mu_\varepsilon\left(A_D^1, A^2; H_m^\alpha; C[a,b]\right) \le (2(b-a)\alpha/\varepsilon) \left[(\log_2 |\varepsilon|)/\alpha + \right.$$

$$\left. + \log_2 (b-a)\right] + O(\log_2 |\varepsilon|).$$

Таким образом, если пассивные алгоритмы восстановления не могут обеспечить на классе H_m^α $(0 < \alpha < 1)$ при $N \to \infty$ порядок погрешности выше $O(N^{-\alpha})$, алгоритм дихотомии гарантирует погрешность порядка $O(N^{-1} \log_2 N)$. Вопрос о неулучшаемости этого результата будет исследован в другой статье.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
5. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
6. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 184 с.

Получено 22. 06. 92