УДК 519.21

Л. В. Ковальчук, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

СЕМИМАРТИНГАЛЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГРУППАХ И АЛГЕБРАХ ЛИ

Установлено взаимно однозначное соответствие между процессами, принимающими значения в группе Ли и ее алгебре Ли. При этом сохраняются основные свойства процессов: семимартингальность относительно некоторого потока, независимость приращений, непрерывность.

Установлено взаємно однозначну відповідність між процесами, що приймають значення в групі Лі та її алгебрі Лі. При цьому зберігаються основні властивості процесів: семимартингальність відносно деякого потоку, незалежність приростів, неперервність.

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются случайные процессы с ограниченными скачками, принимающие значения в конечномерных группах Ли и их алгебрах Ли, являющиеся стохастически непрерывными семимартингалами или процессами с независимыми приращениями. Если речь идет о процессах со значениями в группе, то имеются в виду мультипликативные приращения.

Семимартингалом в группе G называется такой процесс $X(t)$, что для любой вещественнозначной функции $f \in \mathbb{C}^{\infty}(G)$ процесс $f(X(t))$ — семимартингал. В частности, если G — матричная группа, то можно использовать обычное определение семимартингала, т. е. $X_{ij}(t), i, j = \overline{1,N}$, — семимартингалы, где

$$X(t) = (X_{ij}(t))_{i,j=1}^{N}.$$

В работе показано, что такие процессы со значениями в группах Ли являются мультипликативными функционалами от процессов со значениями в соответствующих алгебрах Ли, обладающих аналогичными свойствами. Используя известные результаты, описывающие структуру процессов с независимыми приращениями со значениями в векторных пространствах, удается описать структуру процессов, принимающих значения в группах Ли.

Процессы, принимающие значения в группах, рассматривались многими авторами. Так, в [1] стохастические операторные полугруппы U_t^s, принимающие значения в группе всех обратимых матриц, описываются как решения стохастического дифференциального уравнения

$$dU_t^s = U_t^s dY_t, \; U_s^s = I, \tag{1}$$

где процесс Y_t принимает значения в алгебре всех матриц. Такое соответствие между U_t^s и Y_t (при фиксированном s) является взаимнооднозначным, однако в более общем случае, когда U_t^s принимает значения в произвольной матричной группе Ли, процесс Y_t, вообще говоря, не будет принимать значения в ее алгебре, и наоборот.

В [2] также изучаются уравнения вида (1) и свойства их решений, где интеграл по семимартингалу понимается как интеграл Стратоновича. Тогда если Y_t в (1) — непрерывный с вероятностью 1 семимартингал со значениями в алгебре Ли, то решение уравнения принимает значения в соответствующей группе Ли; справедливо и обратное утверждение. Однако для произвольного стохастически непрерывного семимартингала это утверждение неверно.

Маккин в [3] по броуновскому движению со значениями в матричной группе Ли строит „вложение" — мультипликативный интеграл, который является броуновским движением на соответствующей группе Ли. В настоящей работе эта конструкция распространена на произвольный стохастически непрерывный семимартингал с ограниченными скачками и независимыми приращениями.

Мультипликативные процессы, т. е. процессы с независимыми мультипликативными приращениями, рассматривались в различных случаях в работах [4, 5].

2. Построение логарифма и экспоненты для процессов со значениями в матричных группах и алгебрах Ли. Пусть $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией. Процессы, которые встречаются в этой работе, определены на $[0; 1] \times \Omega$, принимают значения в конечномерной группе Ли G и ее алгебре Ли g и являются F_t-согласованными. Процессы, принимающие значения в группе, обозначаются большими латинскими буквами, в алгебре — маленькими. Когда говорится о приращениях процесса $X(t)$ в группе, имеются в виду его мультипликативные приращения; однако иногда (если G — матричная группа) рассматриваются его аддитивные приращения (или аддитивные приращения процесса $x(t)$ в алгебре), которые будут обозначаться $\Delta X(t_k^\pi) = X(t_{k+1}^\pi) - X(t_k^\pi)$, если задано разбиение $\pi = \{0 = t_0^\pi < t_1^\pi < \ldots < t_{n_\pi}^\pi = t \leq 1\}$ (соответственно, $\Delta x(t_k^\pi)$). Аддитивные скачки процесса обозначаются $\Delta X_\tau = X_\tau - X_{\tau-}$ (соответственно Δx_τ).

Для того чтобы пояснить цель данной работы и ход дальнейших рассуждений, рассмотрим следующий пример. Пусть $d = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}_{>0}$ — группа по умножению. Между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_{>0}$ действует отображение $\exp: x \to \exp(x)$, являющееся взаимно однозначным. Обратное к нему — логарифм — переводит $\mathbb{R}_{>0}$ в $\mathbb{R}$. Это помогает установить соответствие между процессами с независимыми мультипликативными приращениями на g и процессами с независимыми мультипликативными приращениями на G (в дальнейшем такие процессы будем соответственно называть аддитивными и мультипликативными).

Пусть $x(t)$ — аддитивный процесс на g. Тогда $X(t) := \exp(x(t))$ — мультипликативный процесс на G, и наоборот. Заметим, что при таком отображении сохраняются и другие свойства, например, непрерывность с вероятностью 1 и стохастическая непрерывность, семимартингальность.

Однако, в случае, например, матричной группы Ли G соответствующее экспоненциальное отображение имеет обратное лишь в некоторой окрестности U_e единицы e этой группы. Если все мультипликативные скачки процесса $X(t)$ принадлежат этой окрестности, то можно определить следующее выражение:

$$P - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} \ln(X(t_k^\pi)^{-1} X(t_{k+1}^\pi)),$$

где логарифм понимается как сумма соответствующего ряда Тейлора. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только процессы, имеющие ограниченные скачки, т. е. если U_e и V_0 — окрестности единицы в G и нуля в g соответственно такие, что отображения $\exp: V_0 \to U_e$ — биекция, то потребуем, чтобы $X_{\tau-}^{-1} X_\tau \in U_e$; $\Delta x_\tau \in V_0$. Например, если G — матричная группа, то в качестве окрестности U_e можно выбрать $U_e = \{z : \| z - I \| < 1\}$, где I — единичная матрица.

Для удобства U_e и V_0 выбираются симметричными в том смысле, что $X \in U_e \Rightarrow X^{-1} \in U_e$; $x \in V_0 \Rightarrow -x \in V_0$. Кроме того, в дальнейшем понадобится, чтобы окрестность V_0 была ограничена. Этого можно добиться, положив $U_e = \{ z : \| z - I \| < 1 - \varepsilon \}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

В случае произвольной группы Ли на U_e и V_0 будут налагаться дополнительные ограничения.

В дальнейшем нам понадобятся теоремы из [6, 7], которые по процессу со значениями в матричной группе Ли G строят соответствующий процесс в ее алгебре g, и наоборот.

Теорема 1. *Пусть* $X(t)$, $t \in [0;1]$, — *стохастически непрерывный* F_t-*семимартингал со значениями в матричной группе Ли* G. *Тогда существует процесс* $x(t)$ *со значениями в соответствующей алгебре Ли* g, *также являющийся* F_t-*семимартингалом, определенный следующим образом:*

$$x(t) = P-\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} \ln (X(t_k^\pi)^{-1} X(t_{k+1}^\pi)) = Y(t) - \frac{1}{2}\langle Y^c\rangle_t +$$
$$+ \sum_{\tau\in[0;t]} (\ln (X(\tau-)^{-1} X(\tau)) - X(\tau-)^{-1} X(\tau) + I), \tag{2}$$

где $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)^{-1}\, dX(s)$; $Y^c(t)$ — *непрерывная составляющая мартингальной части процесса* $Y(t)$; $\pi = \{0 = t_0^\pi < t_1^\pi < \ldots < t_{n_\pi}^\pi = t < 1\}$ — *разбиение отрезка* $[0;t]$; n_π — *число точек разбиения,* $|\pi|$ — *его диаметр. При этом:*

1) *если* $X(t)$ *имеет независимые (мультипликативные) приращения, то* $x(t)$ *имеет независимые аддитивные приращения;*

2) *если* $X(t)$ *непрерывен с вероятностью* 1, *то* $x(t)$ *также непрерывен с вероятностью* 1;

3) *если* $X(t)$ *ограниченной вариации, то* $x(t)$ — *также ограниченной вариации;*

4) *если в точке* $\tau(\omega)$ *процесс* $X(t)$ *имеет скачок, то* $\Delta x_\tau = \ln X(\tau-)^{-1} X(\tau)$.

Процесс $x(t)$ назовем логарифмом процесса $X(t)$ и обозначим через $LN(X)(t)$.

Следующая теорема является в некотором смысле обратной к теореме 1, так как в ней для семимартингала, принимающего значения в алгебре Ли g матричной группы Ли G, строится его экспонента, принимающая значения в G. Однако, в отличие от теоремы 1 этот результат удалось получить лишь в предположении, что исходный процесс имеет независимые приращения, хотя, по-видимому, от этого условия можно избавиться.

Теорема 2. *Пусть* $x(t)$, $t \in [0;1]$, — *стохастически непрерывный* F_t-*семимартингал с независимыми приращениями, принимающий значения в алгебре Ли* g *матричной группы* G. *Тогда существует процесс* $X(t)$ *со значениями в* G, *также являющийся стохастически непрерывным* F_t-*семимартинглом, определяемый следующим образом:*

$$X(t) = \lim_{|\pi|\to 0} \prod_{k=0}^{n_\pi - 1} \exp(\Delta x(t_k^\pi)) \tag{3}$$

(*предел в среднем квадратичном*).

При этом:

1) $X(t)$ *является решением уравнения*

$$dX(t) = X(t)\, dz(t), \quad X(0) = I, \tag{4}$$

где

$$z(t) = P-\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} \exp(\Delta x(t_k^\pi) - I) = x(t) + \langle x^c\rangle_t/2 + \sum_{\tau\le t} (\exp \Delta x_\tau - \Delta x_\tau - I); \tag{5}$$

2) $X(t)$ *имеет независимые мультипликативные приращения;*

3) *если* $x(t)$ *непрерывен с вероятностью* 1, *то* $X(t)$ *также непрерывен с*

вероятностью 1;

4) *если* $x(t)$ *имеет ограниченную вариацию, то* $X(t)$ *также имеет ограниченную вариацию;*

5) *если в точке* $\tau(\omega)$ *процесс* $x(t)$ *имеет скачок* Δx_τ, *то мультипликативный скачок процесса* $X(t)$ *следующий:*

$$X(\tau-)^{-1}X(\tau) = \exp\Delta x_\tau$$

Процесс $X(t)$ будем называть экспонентой процесса $x(t)$ и обозначать $EXP(x)(t)$.

Обозначим через $S(g)$ класс стохастически непрерывных семимартингалов с независимыми аддитивными приращениями и ограниченными скачками в алгебре Ли g, $S(G)$ — класс стохастически непрерывных семимартингалов с независимыми мультипликативными приращениями и ограниченными мультипликативными скачками в соответствующей группе Ли G. Теоремы 1 и 2 устанавливают некоторое соответствие между $S(g)$ и $S(G)$. Следующая теорема описывает его свойства.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 2. *Тогда отображение* EXP: $(x)(t)\to EXP(x)(t) = X(t)$ *является биекцией между* $S(g)$ *и* $S(g)$, $EXP^{-1}(x)(t) = LN(x)(t)$.

Доказательство. Покажем, что это отображение является инъекцией.

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — процессы, удовлетворяющие условиям теоремы, и $x_1(t)\neq x_2(t)$. Тогда $X_i(t) = EXP(x_i)(t)$, $i = 1, 2$, — решения уравнений

$$dX_i(t) = X_i(t)\,dz_i(t);\quad X_i(0) = I,$$

где $z_i(t)$ получены из $x_i(t)$ по формуле (5). Поскольку $x_1(t)\neq x_2(t)$, то $z_1(t)\neq$ $\neq z_2(t)$ (так как $x_i(t)$ однозначно восстанавливается по $z_i(t)$). Предположим, что $X_1(t) = X_2(t)$. Но тогда

$$z_1(t) = \int_0^t X_1(s)^{-1}\,dX_1(s) = \int_0^t X_2(s)^{-1}\,dX_2(s) = z_2(t),$$

что противоречит условию $x_1(t)\neq x_2(t)$.

Покажем, что EXP — сюръекция, т. е. построим прообраз процесса $x(t)$ при этом отображении.

Пусть $X(t)$ такой, как в теореме 2; положим $x(t) = LN(x)(t)$. Достаточно показать, что $EXP(LN(X))(t) = X(t)$; другими словами, это означает, что $X(t)$ является решением уравнения

$$dX(t) = X(t)\,dz(t);\quad X(0) = I,$$

где $z(t)$ построено по процессу $LN(x)(t)$ по формуле (5).

Из формулы (2) легко получить, что справедливы соотношения

$$\langle x^c\rangle_t = \langle Y^c\rangle_t;\quad \Delta x_\tau = \ln(X(\tau-)^{-1}X(\tau));$$

поэтому формула (2) перепишется в виде

$$x(t) = Y(t) - \langle x^c\rangle_t/2 - \sum_{\tau\in[0;t]}(e^{\Delta x_\tau} - \Delta x_\tau - I)$$

или с учетом того, что

$$Y(t) = \int_0^t X(s)^{-1}\,dX(s),$$

— в виде

$$\int_0^t X(s)^{-1}\, dX(s) = x(t) + \langle x^c \rangle_t / 2 + \sum_{\tau \in [0;t]} (e^{\Delta x_\tau} - \Delta x_\tau - I),$$

что равносильно

$$dX(s) = X(s)\, dz(s), \quad X(0) = I.$$

Отсюда же следует, что $EXP^{-1} = LN$, и теорема полностью доказана.

3. Мультипликативные процессы со значениями в произвольных конечномерных группах Ли. До сих пор рассматривались процессы со значениями в матричных группах Ли. Однако, используя теорему Адо о локальной структуре произвольной группы Ли [8], имеющиеся результаты можно перенести на произвольную группу Ли.

Теорема Адо утверждает, что каждая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление, т. е. изоморфна матричной. Поскольку группы Ли, алгебры которых изоморфны, являются локально изоморфными, произвольная группа Ли локально изоморфна некоторой матричной.

В этом пункте будет показано, что между мультипликативными процессами с ограниченными скачками, принимающими значения в локально изоморфных группах, устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть группы G и H являются группами Ли, локально изоморфными друг другу. Выберем окрестности U и W единицы e_G в группе G и единицы e_H в группе H соответственно такие, что замыкания этих окрестностей изоморфны, т. е. $\varphi(\overline{U}) = \overline{W}$, $\varphi^{-1}(\overline{W}) = \overline{U}$, где φ — локальный изоморфизм.

Определение. *Будем говорить, что процесс, принимающий значения в группе Ли G (или H), имеет ограниченные скачки, если его мультипликативные скачки с вероятностью 1 принадлежат окрестности единицы U (соответственно W).*

Лемма. *Пусть $X(t)$, $t \in [0;\ 1]$, $X(0) = e_G$, — стохастически непрерывный мультипликативный процесс с ограниченными скачками в группе Ли G. Тогда ему соответствует стохастически непрерывный мультипликативный процесс $Y(t)$, $t \in [0;\ 1]$, $Y(0) = e_H$, с ограниченными скачками, принимающий значения в группе Ли H, такой, что для любых марковских моментов u_1, u_2, $u_1 \le u_2$, с вероятностью 1 таких, что*

$$u_2 \le \inf\{t : X(u_1)^{-1} X(t) \notin U\},$$

выполнено соотношение

$$\varphi(X(u_1)^{-1} X(u_2-)) = Y(u_1)^{-1}\, Y(u_2-) \in \varphi(\overline{U}) = \overline{W}, \quad \text{с вероятностью } 1. \tag{6}$$

Доказательство. По процессу $X(t)$ строим последовательность марковских моментов $\tau_i(\omega)$, $i \ge 1$, следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 0;\\
\tau_1 &= \inf\{t \in [\tau_0;\ 1] : X(t) \notin U\} \wedge 1;\\
\tau_2 &= \inf\{t \in [\tau_1;\ 1] : X(\tau_1-)^{-1} X(t) \notin U\} \wedge 1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\tau_k &= \inf\{t \in [\tau_{k-1};\ 1] : X(\tau_{k-1}-)^{-1} X(t) \notin U\} \wedge 1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Поскольку из условия леммы следует, что процесс $X(t)$ без разрывов II-го рода, то таких моментов с вероятностью 1 конечное число $r = r(\omega)$ (тогда $\tau_{r(\omega)}(\omega) = 1$ с вероятностью 1). Эта последовательность моментов обладает тем свойством, что

$$X(\tau_i-)^{-1}X(\tau_{i+1}-) \in \overline{U},\ i=\overline{0, r(\omega)}, \quad \text{с вероятностью } 1.$$

Теперь определим процесс $Y(t)$ на группе Ли H.

Пусть $t \in [\tau_n(\omega), \tau_{n+1}(\omega))$ при данном $\omega \in \Omega$. Тогда

$$Y(t) = \varphi(X(0)^{-1}X(\tau_1-))\varphi(X(\tau_1-)^{-1}X(\tau_2-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{n-1}-)^{-1}X(\tau_n-))\varphi(X(\tau_n-)^{-1}X(t)).$$

Покажем, что если выбрать другую окрестность U' единицы e_G (замыкание которой изоморфно замыканию окрестности W' единицы e_H), содержащую мультипликативные скачки процесса $X(t)$, то, хотя последовательность случайных моментов будет, вообще говоря, другая, процесс $Y(t)$ при этом не изменится. Достаточно рассмотреть случай, когда $U' \subset U$. При этом с вероятностью 1 $r'(\omega) \ge r(\omega)$, где $r'(\omega)$ — количество марковских моментов, построенных для окрестности U' так, как было указано выше. Рассмотрим случай, когда к последовательности моментов добавился момент $\tau'(\omega)$ такой, что для каждого $\omega \in \Omega$ $\tau'(\omega) \in (\tau_{k(\omega)}(\omega); \tau_{k(\omega)+1}(\omega))$. Отсюда будет следовать справедливость утверждения для того случая, когда к последовательности добавлено любое конечное число моментов.

Пусть $t \in [\tau_{n(\omega)}(\omega); \tau_{n(\omega)+1}(\omega))$ при данном $\omega \in \Omega$ и $t \ge \tau'(\omega)$. Тогда

$$Y(t) = \varphi(X(0)^{-1}X(\tau_1-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1}X(\tau_{k(\omega)+1}-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{n(\omega)}-)^{-1}X(t));$$

$$Y'(t) = \varphi(X(0)^{-1}X(\tau_1-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1}X(\tau'-)) \times$$

$$\times\, \varphi(X(\tau'-)^{-1}X(\tau_{k(\omega)+1}-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{n(\omega)}-)^{-1}X(t)).$$

Но

$$X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1}X(\tau'-)X(\tau'-)^{-1}X(\tau_{k(\omega)+1}-) = X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1}X(\tau_{k(\omega)+1}-) \in U,$$

поэтому

$$\varphi(X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1}X(\tau'-))\varphi(X(\tau'-)^{-1}X(\tau_{k(\omega)+1}-)) = \varphi(X(\tau_{k(\omega)}-)^{-1} \times X(\tau_{k(\omega)+1}-)),$$

и $Y(t) = Y'(t)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$.

Теперь докажем справедливость утверждения (6). Пусть $u_2 \le \inf\{t: X(u_1)^{-1}X(t) \notin U\}$ с вероятностью 1. При фиксированном $\omega \in \Omega$

$$u_1(\omega) \in [\tau_{i(\omega)}(\omega); \tau_{i(\omega)+1}(\omega)); \quad u_2(\omega) \in [\tau_{k(\omega)}(\omega); \tau_{k(\omega)+1}(\omega)).$$

При $i = k$ утверждение очевидно; полагаем, что $i < k$. Тогда

$$Y(u_1)^{-1}Y(u_2-) = \varphi(X(\tau_i-)^{-1}X(u_1))^{-1}\varphi(X(\tau_i-)^{-1}(\tau_{i+1}-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_k-)^{-1}X(u_2-)) =$$

$$= \varphi(X(u_1)^{-1}X(\tau_k-)X(\tau_k-)^{-1}X(u_2-)) = \varphi(X(u_1))^{-1}X(u_2-))$$

при фиксированном $\omega \in \Omega$.

Покажем, что процесс $Y(t), t \in [0; 1]$, имеет независимые приращения.

Пусть $s < t$; τ_i, $i = \overline{1, r(\omega)}$,— последовательность марковских моментов, $\tau_i \le \tau_j$ с вероятностью 1 при $i < j$, построенная так, как указано выше. Преобразуем эту последовательность (при этом, как было доказано, процесс $Y(t)$ не изменится) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_i' &= \tau_i \wedge s; \\ \tau_{r(\omega)+i}' &= (\tau_i \vee s) \wedge t; \\ \tau_{2r(\omega)+i}' &= \tau_i \vee t, \quad i = \overline{1, r(\omega)}. \end{aligned}$$

Тогда вследствие того, что φ — изоморфизм, получаем

$$Y(s)^{-1}\, Y(t) = \varphi(X(s)^{-1}\, X(\tau_{r+1}-))\varphi(X(\tau_{r+1}-)^{-1}\, X(\tau_{r+2}-)) \times \cdots \times \varphi(X(\tau_{2r}-)^{-1}\, X(t)).$$

Правая часть равенства не зависит от приращений процессов $X(t)$, $Y(t)$ до момента времени s.

Замечания. **1.** Если $v_i(\omega)$, $i \geq 1$, — моменты скачков $X(v_i-)^{-1}\, X(v_i)$ процесса $X(t)$, то эти же моменты являются моментами скачков процесса $Y(t)$ и выполнено равенство $Y(v_i-)^{-1}\, Y(v_i) = \varphi(X(v_i-)^{-1}\, X(v_i))$ с вероятностью 1.

2. Если $X(t)$ является F_t-семимартингалом, то вследствие гладкости локального изоморфизма φ процесс $Y(t)$ также будет F-семимартингалом.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Каждому стохастически непрерывному мультипликативному процессу* $X(t)$, $t \in [0;\, 1]$, $X(0) = e_G$, *с ограниченными скачками, принимающему значения в группе Ли* G, *однозначно соответствует такой же процесс* $Y(t)$ *со значениями в группе Ли* H, *где группы* G *и* H *локально изоморфны. При этом:*

1) *если* $u_1 \leq u_2 \leq \inf\{t: X(u_1)^{-1}\, X(t) \notin U\}$ *с вероятностью* 1, *то*

$$Y(u_1)^{-1}\, Y(u_2-) = \varphi(X(u_1)^{-1}\, X(u_2-)) \in \varphi(U) = W;$$

2) *если* v_i, $i \geq 1$, — *моменты мультипликативных скачков процесса* $X(t)$, *то*

$$Y(v_i-)^{-1}\, Y(v_i) = \varphi(X(v_i-)^{-1}\, X(v_i));$$

3) *если* $X(t)$ — F_t-*семимартингал, то* $Y(t)$ — *также* F_t-*семимартингал.*

Обозначим процесс $Y(t)$, построенный по процессу $X(t)$ с помощью локального изоморфизма φ, через $\varphi(X)(t)$, $t \in [0;\, 1]$.

Замечание 3. Следует уточнить, как в случае произвольных групп Ли выбираются окрестности, ограничивающие скачки процессов. Пусть группа Ли H локально изоморфна матричной группе Ли G. Выбираем окрестность U_1 единицы в G так, как это было описано в п. 1, и окрестность U_2 так, чтобы в ее замыкании действовал локальный изоморфизм φ. Тогда окрестностью, ограничивающей скачки процессов со значениями в группе G, будет $U_1 \cap U_2$, а в группе H — $\varphi(U_1 \cap U_2)$.

1. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук – 1982. – **34**, №6. – С. 157 – 185.
2. *Estrade A.* Sur l'integrale stochastique multiplicative discontinue // Comput. rendus de l'acad. des sci. – 1990. – **311**, №12. – P. 797 – 801.
3. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. – М. : Мир, 1972. – 182 с.
4. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
5. *Feinsilver P.* An operator approach to processes on Lie groups // Prob. Theory on Vect. Spaces. – 1987. – **1391**, N 6. – P. 59 – 65.
6. *Ковальчук Л. В.* Построение логарифма от процесса в группе Ли // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №11. – С. 1491 – 1497.
7. *Ковальчук Л. В.* Построение экспоненты от процесса, принимающего значения в алгебре Ли // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 62 – 75.
8. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. – М.: Мир, 1976. – 496 с.

Получено 06. 07. 92