УДК 517. 5

А. В. Бондарь, д-р физ-мат. наук,
Е. А. Лукьянова, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ σ-МОНОГЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Вводится понятие множеств σ-моногенности непрерывных функций, позволяющих исследовать их псевдоаналитические свойства. Доказывается теорема о структуре этих множеств.

Вводиться поняття множин σ-моногенності неперервних функцій, які дозволяють досліджувати їх псевдоаналітичні властивості. Доводиться теорема про структуру цих множин.

Во многих исследованиях по проблеме моногенности, стиранию особых точек и установлению критериев голоморфности функций из различных классов широко используется впервые введенное Н. Н. Лузиным понятие множества моногенности [1, 2]. Одна из основных задач о структуре множеств моногенности в большинстве точек области определения решена в [2] для непрерывных и в [3] для произвольных функций. С другой стороны, традиционные применения классической теории аналитических функций, связанные с системой уравнений Коши — Римана, в последние десятилетия распространилась на решения эллиптических систем уравнений 1-го порядка. Такие решения, не обязательно являясь аналитическими функциями, в то же время сохраняют ряд их основных свойств (принцип аргумента, теорема единственности и т. д.) и называются псевдоаналитическими функциями [4, 5]. В связи с этим возникает задача корректного определения, изучения и последующего применения аналога множества моногенности для псевдоаналитических функций, который должен выполнять ту же роль в исследовании свойства псевдоаналитичности, что и множества моногенности Н. Н. Лузина в теории аналитичности. Целью статьи является определение множеств σ-моногенности и доказательство для них теоремы о структуре этих множеств на подмножестве полной меры.

Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, p, q — вещественные непрерывные в D функции, причем $p(z) > 0$ $\forall z \in D$, и $\sigma = p - iq$. Функция $f: D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, называется (p, q)-аналитической или σ-аналитической в области D [4], если ее вещественная и мнимая части имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} p\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + q\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ -q\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + p\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

что равносильно следующему уравнению для f:

$$(\sigma + 1)\frac{\partial f}{\partial \bar z} + (\sigma - 1)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = 0$$

или, обозначив

$$\lambda(z) = \frac{\sigma(z) - 1}{\sigma(z) + 1}, \quad z \in D,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = 0. \tag{1}$$

Пусть $\sigma = p - iq$ — функция класса C^1 и $f = u + iv$ — произвольная непрерывная функция. Обозначим

$$t_\sigma(z) = \exp\left[\int \frac{1}{2p(z)} \frac{d\sigma}{d\bar z}(z) d\bar z\right],$$

$$\Delta_\sigma f(a, \Delta z) = \sigma(a)[u(a + \Delta z) - u(a)] + i[v(a + \Delta z) - v(a)],$$

где $a \in D$, $a + \Delta z \in D$.

Определение 1. *Комплексное число* $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ *называется* σ*-производным числом функции* f *в точке* $a \in D$, *если существует такая последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset D$, *сходящаяся к точке* a, *для которой*

$$\lim_{n\to\infty} t(a) \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z_n)}{\Delta z_n}, \tag{2}$$

где $\Delta z_n = z_n - a$ $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Определение 2. *Если в точке* $a \in D$ *существует предел*

$$\lim_{\Delta z\to 0} t(a) \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z}, \tag{3}$$

то этот предел называется σ*-производной функции* f *в точке* a *и обозначается* $\partial_\sigma f(a)$. *Если в точке* $a \in D$ *функция* f *имеет* σ*-производную, то она называется* σ*-моногенной в этой точке.*

Из теоремы 1 [4, с. 62] вытекает, что для того чтобы функция f класса C^1 была псевдоаналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы она была σ-моногенной в каждой точке $a \in D$.

Определение 3. *Множество всех* σ*-производных чисел функции* f *в точке* $a \in D$ *называется множеством* σ*-моногенности функции* f *в точке* a *и обозначается* $\mathfrak{m}_a^\sigma(f)$.

Замечание. Очевидно, $t(a)$ не влияет на существование пределов (2) и (3); этот множитель вводится для того, чтобы максимально приблизить свойства σ-производной из определения 2 к свойствам обычной комплексной производной аналитической функции [4]; в последнем случае $\sigma(a) = 1$ и $t(a) = 1$ $\forall a \in D$.

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathfrak{m}_a^\sigma(f, \varepsilon)$ множество значений отношения

$$t(a) \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z}, \tag{4}$$

где Δz произвольное, но удовлетворяющее соотношениям $a + \Delta z \in D$ и $0 < |\Delta z| \le \varepsilon$.

Лемма 1. *Для произвольной непрерывной функции* f *множество ее* σ*-моногенности в точке* $a \in D$ *является компактным подмножеством расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *и справедливо равенство*

$$\mathfrak{m}_a^\sigma(f) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathfrak{m}_a^\sigma(f, \varepsilon)}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\overline{\mathfrak{m}_a^\sigma(f, \varepsilon)}$ — замкнутое подмножество компакта $\overline{\mathbb{C}}$, то достаточно доказать равенство (5), которое является аналогом исходного геометрического определения множеств моногенности Н. Н. Лузина.

Очевидно,

$$\mathfrak{m}_a^\sigma(f) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathfrak{m}_a^\sigma}(f, \varepsilon).$$

Обратно, если $\lambda \in \overline{\mathfrak{m}_a^\sigma}(f, \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, то при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое Δz_n, что $a + \Delta z_n \in D$, $0 < |\Delta z_n| \le 1/n$, и разность между λ и отношением (4) при $\Delta z = \Delta z_n$ по модулю меньше, чем $1/n$ в случае конечного λ, и отношение (4) при $\Delta z = \Delta z_n$ по модулю больше n в случае $\lambda = \infty$. Отсюда следует, что λ является σ-производным числом функции f в точке a, и обратное включение доказано. Лемма 1 доказана.

Пусть в точке $a \in D$ существуют частные производные действительной и мнимой частей функции $f = u + iv$. Введем обозначения

$$f_z^\sigma(a) = t_\sigma(a)\left[\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial z}(a) + i\frac{\partial v}{\partial z}(a)\right],$$

$$f_{\bar z}^\sigma(a) = t_\sigma(a)\left[\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial \bar z}(a) + i\frac{\partial v}{\partial \bar z}(a)\right].$$

Лемма 2. *Если функция f $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $a \in D$, то множество σ-моногенности $\mathfrak{m}_a^\sigma(f)$ является окружностью с центром в точке $f_z^\sigma(a)$ и радиусом $r = |f_{\bar z}^\sigma(a)|$. При этом параметрическое представление этой окружности имеет вид*

$$\lambda_\alpha = f_z^\sigma(a) + f_{\bar z}^\sigma(a)\, e^{-2i\alpha}, \tag{6}$$

где λ_α — σ-производное число функции f вдоль луча l_α, выходящего из точки a под углом α к вещественной оси Ox. В частности, при $r = 0$ $\mathfrak{m}_a^\sigma(f)$ есть точка и f σ-моногенна в точке a.

Доказательство. Пусть $\{\Delta z_n\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность комплексных чисел, сходящаяся к нулю, что $a + \Delta z_n \in D$ $\forall n$, и последовательность $\{a + \Delta z_n\}_{n=1}^\infty$ имеет полукасательную l_α. Тогда из $\mathbb{R}$-дифференцируемости f в точке a следует, что σ-производное число, соответствующее этой последовательности, существует и σ-производные числа вдоль любых последовательностей, имеющих одну и ту же полукасательную l_α, совпадают между собой и их общее значение λ_α можно назвать σ-производным числом вдоль l_α.

Далее, для $\Delta z = z - a = re^{i\alpha}$ имеем

$$t(a)\frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} = t(a)\frac{\sigma(a)[u(a+\Delta z) - u(a)] + i[v(a+\Delta z) - v(a)]}{\Delta z} =$$

$$= t(a)\left\{\sigma(a)\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar z}\frac{\Delta \bar z}{\Delta z}\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \bar z}\frac{\Delta \bar z}{\Delta z}\right]\right\} + O(1) =$$

$$= t(a)\left\{\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} + \left[\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z}\right]e^{-2i\alpha}\right\} + O(1)$$

и при $\Delta z \to 0$ правая часть этого равенства стремится к правой части (6).

Лемма 2 доказана.

Если в (1) функцию λ продолжить нулем вне области D, то по теореме 3.33 [5, с. 221] это уравнение имеет определенное во всей плоскости единственное решение f_0, обладающее свойствами: а) f_0 голоморфно вне $\overline{D}$, б) $f_0(z) \sim z$ при $z \to \infty$. Поскольку для f_0 справедливы принцип аргумента, теорема об изолированности нулей и критерии однолистности в той же формулировке, что и для аналитических функций [5, с. 220], то функция f_0 однолистна во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Эту функцию будем называть гомеоморфизмом уравнения (1).

Сформулируем и докажем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\sigma = p - iq$, $p(z) > 0$ $\forall z \in D$, — функция класса C^1, f — произвольная непрерывная в D функция и M — множество всех тех точек $a \in D$, в которых множество $\mathfrak{M}_a^\sigma(f)$ не совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда:*

а) при любых $n, m = 1, 2, \ldots$ существуют такие компакты M_{nm} и комплексные числа b_{nm}, что $M_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} M_{nm}$, и для любых точек $a \in M_{nm}$ и $z \in D$ таких, что $|a - z| < 1/m$, выполняется неравенство

$$|f(a) - f(z) + b_{nm}(f_0(a) - f_0(z))| \geq \delta_{nm} |z - a|;$$

б) функция $f_{nm}(z) = f(z) + b_{nm} f_0(z)$ $\mathbb{R}$-дифференцируема почти в каждой точке множества M_{nm};

в) почти в каждой точке множества M функция f $\mathbb{R}$-дифференцируема и множество σ-моногенности $\mathfrak{M}_a^\sigma(f)$ является либо точкой, либо окружностью.

Доказательство. Пусть $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное в $\mathbb{C}$ подмножество. Обозначим через M_n множество тех точек $a \in D$, для которых неравенство

$$\left| \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} - w_n \right| \geq \frac{1}{n}$$

выполняется при всех таких Δz, что $a + \Delta z \in D$ и $0 < |\Delta z| \leq 1/n$. Из непрерывности f следует, что каждое из множеств M_n замкнуто в D, а из определений $\mathfrak{M}_a^\sigma(f), M$ и леммы 1 вытекает

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Представим область D в виде объединения возрастающей последовательности компактов K_ν:

$$D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu.$$

Так как гомеоморфизм уравнения (1) f_0 является σ-аналитической функцией, то по теореме о сохранении однолистной окрестности [4, с. 148] $\partial_\sigma f_0(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Поэтому $\delta(\nu) = \inf\limits_{z \in K_\nu} |\partial_\sigma f_0(z)| > 0$. Положим

$$A_n = \max\left\{|w_n|, \frac{1}{6n}\right\}, \quad \varepsilon_{n\nu} = \frac{\delta(\nu)}{6A_n} \tag{7}$$

и введем в рассмотрение множества

$$M_{n\nu k} = \left\{a \in M_n \cap K_\nu : \left| \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z} - \partial_\sigma f_0(a) \right| \le \frac{\varepsilon n\nu}{n},\right.$$

$$\left. 0 < |\Delta z| \le 1/k, \quad \rho(a, \operatorname{Fr} D) > 1/k \right\}, \tag{8}$$

где $\rho(a, \operatorname{Fr} D)$ — расстояние от точки a до границы области D. Легко видеть, что

$$M_n = \bigcup_{\nu, k=1}^{\infty} M_{n\nu k},$$

а так как функция $\partial_\sigma f_0(a)$ непрерывна в D и, следовательно, равномерно непрерывна на каждом компакте $K_\nu \subset D$, то любое из множеств $M_{n\nu k} \subset K_\nu$ можно представить в виде конечного объединения компактов $M_{n\nu ks}$, $s = 1, 2, \ldots, N(n, \nu, k)$, на каждом из которых колебание функции $\partial_\sigma f_0(a)$ не превышает $\varepsilon_{n\nu}/n$, т. е. для любых a' и a'' из $M_{n\nu ks}$ выполняется неравенство

$$|\partial_\sigma f_0(a') - \partial_\sigma f_0(a'')| \le \varepsilon_{n\nu}/n. \tag{9}$$

Выберем в каждом непустом множестве $M_{n\nu ks}$ точку $a_{n\nu ks}$ и определим комплексные числа соотношением

$$b_{n\nu ks} = -\frac{w_n}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})}.$$

Тогда для вспомогательной функции

$$f_{n\nu ks}(z) = f(z) + b_{n\nu ks} f_0(z)$$

при $a \in M_{n\nu ks}$ и $0 < |\Delta z| \le 1/k$ справедлива следующая оценка:

$$\left| \frac{\Delta_\sigma (f + b_{n\nu ks} f_0)(a, \Delta z)}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} + b_{n\nu ks} \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z} \right| =$$

$$= \left| \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} - w_n \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right| =$$

$$= \left| \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} - w_n + w_n \left(1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a)} \, \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right) \right| \ge$$

$$\ge \left| \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} - w_n \right| - |w_n| \left| 1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a)} \, \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right|. \tag{10}$$

Далее,

$$\left| 1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a)} \, \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right| =$$

$$= \left| 1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a)} + \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z\, \partial_\sigma f_0(a)} + \left(1 - \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right) \right| \le$$

$$\leq \left| 1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z \partial_\sigma f_0(a)} \right| + \left| \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z \partial_\sigma f_0(a)} \right| \left| 1 - \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right|. \tag{11}$$

Оценим теперь каждый модуль в (11). Учитывая (7) и (8), получаем

$$\left| 1 - \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z \partial_\sigma f_0(a)} \right| = \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a)|} \left| \partial_\sigma f_0(a) - \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} \right| \leq$$

$$\leq . \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a)|} \frac{\varepsilon_{n\nu}}{n} \leq \frac{1}{6nA_n}.$$

Так как

$$\left| \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z \partial_\sigma f_0(a)} - 1 \right| = \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a)|} \left| \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z} - \partial_\sigma f_0(a) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a)|} \frac{\varepsilon_{n\nu}}{n} \leq \frac{1}{6nA_n},$$

то

$$\left| \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z \partial_\sigma f_0(a)} \right| \leq 1 + \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a)|} \frac{\varepsilon_{n\nu}}{n} \leq 1 + \frac{1}{6nA_n}.$$

Кроме того, согласно (9) имеем

$$\left| 1 - \frac{\partial_\sigma f_0(a)}{\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})} \right| = \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})|} \left| \partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks}) - \partial_\sigma f_0(a) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\partial_\sigma f_0(a_{n\nu ks})|} \frac{\varepsilon_{n\nu}}{n} \leq \frac{1}{6nA_n}.$$

Отсюда вытекает, что правая часть (11) будет не больше

$$\frac{1}{6nA_n} + \left(1 + \frac{1}{6nA_n}\right) \frac{1}{6nA_n} \leq \frac{1}{6nA_n} [1 + 2] = \frac{1}{2nA_n}.$$

Подставляя этот результат в (10) и учитывая, что $|w_n| \leq A_n$, получаем

$$\left| \frac{\Delta_\sigma (f + b_{n\nu ks} f_0)(a, \Delta z)}{\Delta z} \right| \geq \frac{1}{n} - |w_n| \frac{1}{2nA_n} \geq \frac{1}{2n}. \tag{12}$$

Таким образом доказано, что $\forall a \in M_{n\nu ks}$ и $0 < |\Delta z| \leq 1/k$ выполняется неравенство (12). Пусть $\varphi\colon Z \times Z \times Z \to Z$, $(\nu, k, s) \to m$ — такое взаимно однозначное отображение, что $m \geq k$ и

$$b_{nm} = b_{n\varphi^{-1}(m)} = b_{n\nu ks},$$

$$M_{nm} = M_{n\varphi^{-1}(m)} = M_{n\nu ks},$$

$$f_{nm} = f_{n\varphi^{-1}(m)} = f_{n\nu ks}.$$

Тогда в новых обозначениях $\forall a \in M_{nm}$ и $0 < |\Delta z| \leq 1/m$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\Delta_\sigma (f + b_{nm} f_0)(a, \Delta z)}{\Delta z} \right| \geq \frac{1}{2n}.$$

Пусть теперь n, m фиксированы, $g = f + b_{nm} f_0$ и $\delta = 1/2n$. Тогда

$$\left| \frac{\Delta_\sigma g(a,\Delta z)}{\Delta z} \right| \geq \delta, \quad a \in M_{nm}, \quad 0 < |\Delta z| \leq 1/m, \tag{13}$$

а отсюда следует, что найдется такое $\delta_{nm} > 0$, для которого будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{\Delta g(a,\Delta z)}{\Delta z} \right| \geq \delta_{nm}, \quad a \in M_{nm}, \quad 0 < |\Delta z| \leq 1/m. \tag{14}$$

Действительно, если $g = u_1 + iv_1$, то из (13) вытекает

$$\sqrt{|\sigma\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2} \geq \delta \, |\Delta z|,$$

и поэтому должно выполняться, по крайней мере, одно из неравенств:

$$|\sigma\Delta u_1| \geq \sqrt{\frac{\delta}{2}} \, |\Delta z|$$

или

$$|\Delta v_1| \geq \sqrt{\frac{\delta}{2}} \, |\Delta z|.$$

Так как $\sigma = p - iq$ непрерывна и $p(z) > 0 \ \forall z \in D$, то

$$\gamma_{nm} = \inf_{z \in M_{nm}} |\sigma(z)| > 0.$$

Поэтому неравенство (14) будет выполнено, если положить

$$\delta_{nm} = \min\left\{ \sqrt{\frac{\delta}{2}}, \gamma_{nm}\sqrt{\frac{\delta}{2}} \right\}.$$

Тем самым доказано утверждение а).

Кроме того, из (14) и леммы 2 [3, с. 26] вытекает

$$\overline{\lim} \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} \right| < \infty$$

почти всюду на M_{nm}, откуда по теореме Степанова [3, с. 203] функция g $\mathbb{R}$-дифференцируема почти в каждой точке множества M_{nm}, т. е. доказано утверждение б).

А так как функция f_0 непрерывно дифференцируема во всей плоскости, то функция $f = g - b_{nm} f_0$ $\mathbb{R}$-дифференцируема почти всюду на M_{nm}, и поэтому утверждение в) вытекает из равенства

$$M = \bigcup M_{nvks} = \bigcup M_{nm}$$

и леммы 2. Теорема 1 доказана.

1. *Федоров В. С.* Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1952. – **7**, №**2**. – С. 7–16.
2. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 211 с.
3. *Долженко Е. П.* О производных числах комплексных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**. – С. 347–360.
4. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1956. – 441 с.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.–628 с.

Получено 26.02.92